數學傳播　47卷3期, pp. 89-93

應用極坐標三點共線公式證明幾何題

于志洪

摘要: 極坐標是高中解析幾何中的必學內容。然而國內外教材中對極坐標的應用介紹甚少。爲彌補教材之不足, 以達到“數學傳播”之目的, 本文現補充介紹極坐標三點共線公式在幾何證明中的應用, 供高中師生和數學愛好者參考。

關鍵字: 三角形、垂足三角形、邊長、面積。

一、極坐標三點共線公式

已知直線上三點的極坐標爲 $A(\rho_1,\theta_1)$, $B(\rho_2,\theta_2)$, $C(\rho_3,\theta_3)$, 其中 $\rho_1>0, \rho_2>0, \rho_3>0$,

求證 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho_1} & \dfrac{1}{\rho_2} & \dfrac{1}{\rho_3} \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \end{vmatrix}=0$。

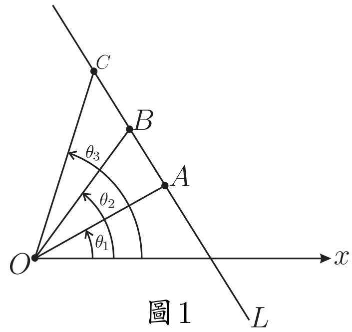

圖1

證明: 設 A、B、C 三點的直角坐標分別爲 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), A、B、C 三點共線則有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=0$ 以 $x_i=\rho_i\cos\theta_i$, $y_i=\rho_i\sin\theta_i$ $(i=1,2,3)$ 代入得:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho_1\cos\theta_1 & \rho_2\cos\theta_2 & \rho_3\cos\theta_3 \\ \rho_1\sin\theta_1 & \rho_2\sin\theta_2 & \rho_3\sin\theta_3 \end{vmatrix}=0 \because \rho_i>0\ (i=1,2,3),$$

$\therefore \rho_1\rho_2\rho_3\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho_1} & \dfrac{1}{\rho_2} & \dfrac{1}{\rho_3} \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \end{vmatrix}=0$。因而得 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho_1} & \dfrac{1}{\rho_2} & \dfrac{1}{\rho_3} \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \end{vmatrix}=0$。

設極點 O 在直線 L 上, 則有三種情況:(1) $\theta_1=\theta_2=\theta_3$; (2) $\theta_1=\theta_2$, $\theta_3=\pi+\theta_1$; (3) $\theta_2=\theta_3=\pi+\theta_1$; 容易驗證結論也都成立。

二、應用舉例

例1：如圖2, 以圓 O 的直徑 AB 爲一邊作一正 $\triangle ABC$, 同時將另一側的半圓三等分, 其分點爲 M、N, 連 CM、CN 交 AB 於 D、E。求證: $AD=DE=EB$。

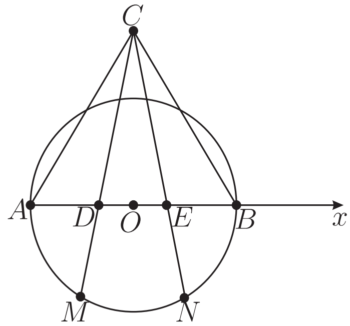

圖2

證明: 以 O 爲極點, OB 爲極軸建立極坐標系。設圓 O 半徑爲 R, 則 $C(\sqrt{3}R,90^\circ)$, $\because \angle BON=60^\circ$, $\therefore N(R,300^\circ)$, 令 $E(\rho_E,0^\circ)$, $\because C$、E、N 三點共線,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}R} & \frac{1}{\rho_E} & \frac{1}{R} \\ \cos 90^\circ & \cos 0^\circ & \cos 300^\circ \\ \sin 90^\circ & \sin 0^\circ & \sin 300^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}R} & \frac{1}{\rho_E} & \frac{1}{R} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0。$$

按三階行列式的薩魯斯法則展開即得, $\frac{1}{2\rho_E}-\frac{1}{2R}-\frac{1}{R}=0$ 解得 $\rho_E=\frac{R}{3}=|OE|$。由圖形的對稱性得知, $|DE|=\frac{2}{3}R$, 又 $|BE|=R-|OE|=\frac{2}{3}R$, 故$|AD|=\frac{2}{3}R$, $\therefore AD=DE=EB$。

例2：已知 M 爲正 $\triangle ABC$外接圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上一點, MA 和 BC 交於 F, 求證: $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}=\frac{1}{MF}$。

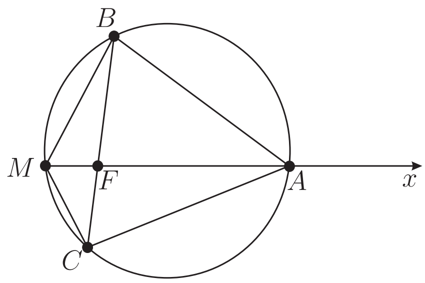

圖3

證明: 如圖 3, 以 M 爲極點, Mx 爲極軸建立極坐標系。設 $|MB|=c$、$|MC|=a$、$|MF|=b$, 則 $B\Big(c,\frac{\pi}{3}\Big)$、$C\Big(a,\frac{5\pi}{3}\Big)$、$F(b,0)$, $\because B$、F、C 三點共線,

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \\ \cos\frac{\pi}{3} & \cos 0 & \cos\frac{5\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \sin 0 & \sin\frac{5\pi}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

接三階行列式的薩魯斯法則展開即得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$, $\therefore \frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}=\frac{1}{MF}$。

例3：過等腰$\triangle ABC$的底邊BC的中點D任作一直線與AB交於M, 與AC的延長線交於N。求證: $\frac{1}{AM}$、$\frac{1}{AB}$、$\frac{1}{AN}$ 成等差數列。

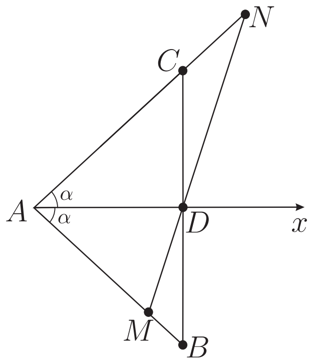

圖 4

證明: 如圖 4, 以 A 爲極點, Ax 爲極軸建立極坐標系。設 $N(n,\alpha)$、$D(d,0)$、$M(m,2\pi-\alpha)$。$\because$ N、D、M 三點共線, $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{d} & \frac{1}{m} \\ \cos\alpha & \cos 0 & \cos(2\pi-\alpha) \\ \sin\alpha & \sin 0 & \sin(2\pi-\alpha) \end{vmatrix} = 0$, 按三階行列式的薩魯斯法則展開即得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2\cos\alpha}{d}$。

而在直角三角形 ADB 中, $d = AB\cos\alpha$, 故代入上式即得 $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=\dfrac{2}{AB}$, $\therefore$ $\dfrac{1}{AM}$、$\dfrac{1}{AB}$、$\dfrac{1}{AN}$ 成等差數列。

例 4 : 已知定圓 S 的直徑 $AB=2r$, BC 是過 B 的一條動弦, 延長 BC 到 D, 使 $CD=BC$。求證: AC、SD 的交點 M 的軌跡是一個圓。

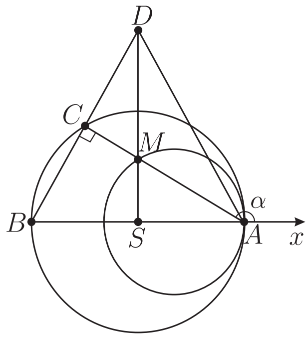

圖 5

證明: 如圖 5, 以 A 爲極點, Ax 爲極軸建立極坐標系, 設 $M(\rho,\alpha)$, $S(r,\pi)$。$\because$ AC 垂直平分 BD, $\therefore$ $AD = AB = 2r$, $\therefore \angle B = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \angle xAD = \angle D + \angle B = 2\angle B = 2\alpha - \pi$, $\therefore$ $D(2r, 2\alpha-\pi)$。

$\because$ S、M、D 三點共線, $\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{2r} \\ \cos\pi & \cos\alpha & \cos(2\alpha-\pi) \\ \sin\pi & \sin\alpha & \sin(2\alpha-\pi) \end{vmatrix} = 0$,

按三階行列式的薩魯斯法則展開化簡即得 $\rho = -\dfrac{4}{3}r\cos\alpha$。化爲直角坐標方程爲:

$\left(x+\dfrac{2}{3}r\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{2}{3}r\right)^2$, 因此 M 點的軌跡是以 $\left(-\dfrac{2}{3}r, 0\right)$ 爲圓心, $\dfrac{2}{3}r$ 爲半徑的一個圓。

例 5 : 過 $\angle P$ 的平分線上一點 F, 任作二直線 AD、BC 分別與 $\angle P$的兩邊相交於 A、D 和 C、B。求證: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{PA\cdot PC}{PB\cdot PD}$。

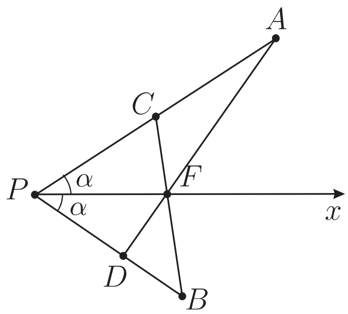

圖 6

證明: 如圖 6, 以 P 爲極點, PF 爲極軸建立極坐標系, 設 $A(a,\alpha)$、$F(f,0)$、$D(d,-\alpha)$、$C(c,\alpha)$、$B(b,-\alpha)$ 則

$\because$ A、F、D 三點共線 $\therefore$ $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{f} & \frac{1}{d} \\ \cos\alpha & \cos 0 & \cos(-\alpha) \\ \sin\alpha & \sin 0 & \sin(-\alpha) \end{vmatrix} = 0$,

按三階行列式的薩魯斯法則展開即得 $-\dfrac{\sin\alpha}{a}+\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{f}+\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{f}-\dfrac{\sin\alpha}{d}=0$, 化簡得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{2\cos\alpha}{f}$ (a) 同理由 B、F、C 三點共線可求得 $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2\cos\alpha}{f}$ (b) $\therefore$ (b)$-$(a) 得 $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{b}$, $\therefore \dfrac{a-c}{ca}=\dfrac{b-d}{db}$。即 $\dfrac{AC}{PC\cdot PA}=\dfrac{BD}{PB\cdot PD}$, 故 $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{PA\cdot PC}{PB\cdot PD}$。

三、極坐標三點共線公式逆命題的應用

例6: 已知在圓 O 內, 直徑 AOB 和半徑 OC 互相垂直, 圓 O' 與 OB、OC 分別相切於 D、E, 並與圓 O 內切於 F。求證: A、E、F 三點共線。

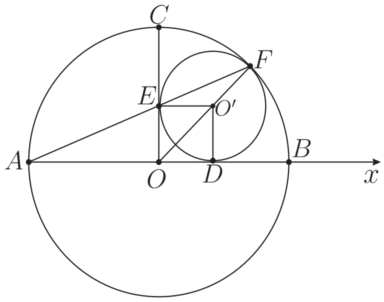

圖7

證明: 如圖 7, 以 O 爲極點, Ox 爲極軸建立極坐標系。設圓 O 的半徑爲 R, 圓 O' 的半徑爲 r, 則 $A(R,180^\circ)$, $F(R,45^\circ)$。而由 $OO'=R-r$, $OO'=\sqrt{2}r$ 得

$$R-r=\sqrt{2}r,\ \therefore r=\frac{R}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)R=OE,$$

$\therefore E[(\sqrt{2}-1)R,90^\circ]$ 由

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} & \frac{1}{(\sqrt{2}-1)R} \\ \cos 180^\circ & \cos 45^\circ & \cos 90^\circ \\ \sin 180^\circ & \sin 45^\circ & \sin 90^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} & (\sqrt{2}+1)\frac{1}{R} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} 1 & 1 & (\sqrt{2}+1) \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{R}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)\Big]=0$$

$\therefore A$、E、F 三點共線。

綜上所述可見: 運用極坐標三點共線公式證明這類問題時, 首先要選擇好極坐標系, 再從分析題設和結論中有關點所在的直線入手, 根據三點共線公式, 適當結合三角形的邊角關係, 通過恒等變形, 消去無關的量即可。此法簡捷明快, 富有規律, 很少添設輔助線, 是證題的一種好手段, 值得重視。通過這一專題講座, 我還有如下幾點體會:

1. 注意極坐標應用的研究, 利於培養學生的思維品質、創新精神和探索精神, 利於融會貫通學過的內容, 利於培養學生學數學用數學研究數學的興趣, 利於提高教學品質。
2. 注意極坐標應用的研究, 不僅符合新課程改革, "$\cdots$讓學生的思維活躍起來" 的理念要求, 而且利於提高學生的專題總結水準, 利於學生在總結過程中, 開闊思路, 鞏固所學內容, 提高學習和研究專題講座的水準。

3. 注意極坐標應用的研究, 對於幫助學生理解課本內容, 提高解證題水準, 啟迪思維, 拓寬視野, 對於在理性思維中培養和發展學生的思維能力, 均頗有益處。
4. 注意極坐標應用的研究, 不僅利於學生系統靈活地掌握學過的知識, 提高學習效率, 而且利於提高學生數學思維的能力和綜合運用知識的水準, 對於培養學生探索精神和創新意識, 將會起到積極的作用。

參考文獻

1. 于志洪。用直線極坐標兩點式證明競賽題。中學教研 (數學), 浙江師大主辦, 1992 年第 3 期。
2. 于志洪。極坐標法證朗古萊定理及其推廣。太平洋數學雜誌 (美國加州大學主辦), 1996 年第 2 期。
3. 于志洪。三點共線的極坐標公式在平幾中的應用。教學通訊(理科版), 河南鄭州, 1984 年第 11 期。
4. 于志洪。應用極坐標兩點式方程證明幾何定理。天津教育學院學報(自然科學版), 1998 年第 1 期。

—本文作者爲中國江蘇省泰州中學附屬初級中學退休教師—