數學傳播 47卷3期, pp. 80-88

# 對一道遞迴數列問題的探索

連威翔

## 一、前言

在國立新竹高中 101 學年度第二學期「竹籤算籌數學有獎徵答」活動中 (請參考 [1]), 高一組第一次徵答第二題是個關於遞迴數列的問題, 問題如下:

**第二題**: 設 $c$ 為非零整數, 定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 為 $a_1 = 2$ 且

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)({a_n}^2-4)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

試證: $a_{2000}$ 是整數。(提示：先列出 $a_1, a_2, a_3, \ldots$, 再觀察其關係)

首先, 由 (1) 式可知

$$a_{n+1} - ca_n = \sqrt{(c^2-1)({a_n}^2-4)},$$

等號兩側取平方得

$${a_{n+1}}^2 - 2ca_{n+1}a_n + c^2{a_n}^2 = c^2{a_n}^2 - 4c^2 - {a_n}^2 + 4,$$

因此

$${a_{n+1}}^2 - 2ca_{n+1}a_n + {a_n}^2 = 4(1-c^2). \tag{2}$$

同理有

$${a_{n+2}}^2 - 2ca_{n+2}a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 4(1-c^2). \tag{3}$$

計算 (3)−(2) 得

$${a_{n+2}}^2 - {a_n}^2 - 2ca_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0,$$

或者寫成

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} - 2ca_{n+1} + a_n) = 0. \tag{4}$$

由上式可知對任意正整數 $n$, 底下兩個遞迴式至少有一式須成立:

$$a_{n+2} = a_n, \tag{5}$$

$$a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n. \tag{6}$$

筆者研究過後, 發現在不同的 $c$ 值之下滿足遞迴式 (1) 之解 $a_n$ 所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ (底下簡稱遞迴式的解數列 $\langle a_n \rangle$), 其連續三項 $a_n, a_{n+1}$, $a_{n+2}$, 有可能對任意正整數 $n$ 恰滿足 (5), (6) 兩式其中之一, 也有可能兩者皆滿足; 此外, 還有可能對某些正整數 $n$ 恰滿足 (5) 式, 對另外一些正整數 $n$ 恰滿足 (6) 式。

爲了清楚探討, 底下兩節我們就分別以 (5), (6) 兩遞迴式爲標題, 而筆者將在不同 $c$ 值之下, 由遞迴式 (1) 求出數列 $\langle a_n \rangle$ 的表達式或討論其特性, 並說明數列 $\langle a_n \rangle$ 是否滿足該節標題的遞迴式。探討過程中, 也會順便完成原問題的證明。

## 二、遞迴式 $a_{n+2} = a_n$

本節中, 存在正整數 $n$ 使 (1) 式的解數列 $\langle a_n \rangle$ 之相鄰三項 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 滿足標題之遞迴式 (即 (5) 式) 的 $c$ 值, 共有 $c = 1$, $c = -1$ 與 $c \le -2$ 三種情形。其中, 當 $c = \pm 1$ 時, 對於任意正整數 $n$, (5) 式均成立; 而 $c \le -2$ 時, 僅對於滿足 $n \ge 2$ 的正整數 $n$, (5) 式成立。其詳細探討過程如下:

(a) 當 $c = 1$ 時, 遞迴式 (1) 化爲

$$a_{n+1} = a_n,$$

因此 $\langle a_n \rangle$ 爲常數列, 滿足

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 2,$$

由此結果可知 $a_{2000} = 2$ 爲一整數。

進一步看, 因爲此時也有

$$a_{n+2} = a_{n+1} = a_n,$$

可知本情形之下, 對任意正整數 $n$, 遞迴式 (5) 均成立。

(b) 當 $c = -1$ 時, 遞迴式 (1) 化爲

$$a_{n+1} = -a_n,$$

因此 $\langle a_n \rangle$ 爲正負交錯數列, 滿足

$$a_n = -a_{n-1} = \cdots = (-1)^{n-1} a_1 = 2 \times (-1)^{n-1},$$

由此結果可知 $a_{2000} = -2$ 爲一整數。

進一步看, 因爲此時也有

$$a_{n+2} = -a_{n+1} = a_n,$$

可知本情形之下, 對任意正整數 $n$, 遞迴式 (5) 均成立。

(c) 當 $c \le -2$ 時, 將已知條件 $a_1 = 2$ 代入遞迴式 (1), 得 $a_2 = 2c$, 再將 $a_2 = 2c$ 代入 (1) 式, 可得 $a_3 = 4c^2 - 2$。接著, 將 $a_3 = 4c^2 - 2$ 代入 (1) 式後, 在化簡 (1) 右式的根式時, 因爲 $|c| = -c$, 可得

$$a_4 = 4c^3 - 2c + 4|c|(c^2 - 1) = 2c.$$

因爲有

$$a_2 = 2c, \quad a_3 = 4c^2 - 2, \quad a_4 = 2c,$$

可知接下來 $a_5$ 之值將於 $a_3$ 相同, 即 $a_5 = 4c^2 - 2$, 且接著由 $a_6$ 開始的各項之值將繼續以 $2c$ 與 $4c^2 - 2$ 交替出現 (註 1), 因此可知 $a_{2000} = 2c$ 爲一整數。

由上述結果, 可看出當 $n \ge 2$ 時, 遞迴式 (5) 成立。但請注意, 當 $n = 1$ 時, 由於 $c \le -2$, 可知 $c^2 \ge 4$, 因此有

$$a_3 = 4c^2 - 2 \ge 14 > 2 = a_1,$$

故 $n = 1$ 時遞迴式 (5) 不成立。

(d) 當 $c \ge 2$ 時, 我們可證明在此情形下, 對任意正整數 $n$, 遞迴式 (5) 均不成立。在證明這件事之前, 我們先證明在遞迴式 (1) 的條件下, 對任意正整數 $n$ 均有 $a_n \ge 2$, 證明如下:

**證明**: 已知 $c \ge 2$, 使用數學歸納法討論如下:

(1) 當 $n = 1$ 時, 因 $a_1 = 2$, 可知 $a_1 \ge 2$;

(2) 當 $n = k$ 時, 設 $a_k \ge 2$, 其中 $k \ge 1$, 則 ${a_k}^2 - 4 \ge 0$, 又 $c^2 - 1 > 0$, 因此當 $n = k + 1$ 時, 由遞迴式 (1) 可知

$$a_{k+1} = ca_k + \sqrt{(c^2 - 1)({a_k}^2 - 4)} \ge ca_k \ge 2c \ge 4 \ge 2.$$

由數學歸納法原理, 可知對任意正整數 $n$, $a_n \ge 2$ 均成立, 證畢。

利用上述結果, 可證明 $c \ge 2$ 時對任意正整數 $n$ 遞迴式 (5) 均不成立, 證明如下:

**證明**: 當 $c \ge 2$ 時, 因爲對任意正整數 $n$ 均有 $a_n \ge 2$, 故

$$(c^2 - 1)({a_k}^2 - 4) \ge 0.$$

因此由 (1) 式可知

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)({a_k}^2 - 4)} \ge ca_n \ge 2a_n > a_n,$$

故數列 $\langle a_n \rangle$ 嚴格遞增, 從而對任意正整數 $n$, 我們有

$$a_{n+2} > a_{n+1} > a_n.$$

上式的結果告訴我們當 $c \ge 2$ 時, 對任意正整數 $n$ 遞迴式 (5) 均不成立, 證畢。

## 三、遞迴式 $a_{n+2}=2ca_{n+1}-a_n$

本節中, 存在正整數 $n$ 使 (1) 式的解數列 $\langle a_n\rangle$ 之相鄰三項 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 滿足標題之遞迴式 (即 (6) 式) 的 $c$ 值, 共有 $c=1$, $c=-1$, $c\le -2$ 與 $c\ge 2$ 四種情形。其中, 當 $c=\pm 1$ 時, 對於任意正整數 $n$, (6) 式均成立; 而 $c\le -2$ 時, 僅 $n=1$ 使 (6) 式成立; 最後當 $c\ge 2$ 時, 對於任意正整數 $n$, (6) 式均成立。底下的內容, 將仿照上節列出四個項目的方式進行詳細討論。

注意底下各項目中, 相關的討論與 $a_{2000}$ 爲整數的證明若在上一節中已介紹過, 則此處將會省略之, 請讀者自行參閱上一節中的相關內容。討論如下:

(a) 當 $c=1$ 時, 遞迴式 (1) 化爲

$$a_{n+1}=a_n,$$

因此 $\langle a_n\rangle$ 爲常數列, 此時對任意正整數 $n$, 我們有

$$a_{n+2}=a_{n+1}, \qquad a_{n+1}-a_n=0.$$

利用上述兩式, 我們可寫下

$$a_{n+2}=a_{n+1}+0=a_{n+1}+(a_{n+1}-a_n)=2a_{n+1}-a_n.$$

注意上式之頭尾恰好是對遞迴式 (6) 取 $c=1$ 的結果, 因此可知在本情形下, 對任意正整數 $n$, 遞迴式 (6) 均成立。

(b) 當 $c=-1$ 時, 遞迴式 (1) 化爲

$$a_{n+1}=-a_n,$$

此時對任意正整數 $n$, 我們有

$$a_{n+2}=-a_{n+1}, \quad a_{n+1}+a_n=0.$$

利用上述兩式, 同理可寫下

$$a_{n+2}=-a_{n+1}-0=-a_{n+1}-(a_{n+1}+a_n)=-2a_{n+1}-a_n.$$

注意上式之頭尾恰好是對遞迴式 (6) 取 $c=-1$ 的結果, 因此可知在本情形下, 對任意正整數 $n$, 遞迴式 (6) 均成立。

(c) 當 $c\le -2$ 時, 由上一節 (c) 項目的討論內容, 我們知道 $a_1=2$, 且當 $m\ge 1$ 時有

$$a_{2m}=2c, \qquad a_{2m+1}=4c^2-2,$$

其中 $m$ 爲正整數。因此數列 $\langle a_n\rangle$ 的前三項爲

$$a_1=2, \qquad a_2=2c, \qquad a_3=4c^2-2,$$

檢查過後可知滿足

$$a_3 = 2ca_2 - a_1.$$

因此, 本情形下當 $n=1$ 時, 遞迴式 (6) 成立。
而當 $n \geq 2$ 時, 若 $n$ 爲偶數, 因爲 $c \leq -2$ 且 $c^2 \geq 4$, 可發現有

$$a_{n+2} - 2ca_{n+1} + a_n = 2c - 2c \times (4c^2-2) + 2c = 8c(1-c^2) > 0;$$

而若 $n$ 爲奇數, 也可發現

$$a_{n+2} - 2ca_{n+1} + a_n = (4c^2-2) - 2c \times 2c + (4c^2-2) = 4(c^2-1) > 0.$$

因此對滿足 $n \geq 2$ 的正整數 $n$, 遞迴式 (6) 均不成立。

(d) 當 $c \geq 2$ 時, 在上一節 (d) 項目的討論中, 我們已證明在此情形下對任意正整數 $n$ 遞迴式 (5) 均不成立。然而在第一節當中, 我們已證明對任意正整數 $n$ 而言 (5), (6) 兩遞迴式至少有一式須成立, 這表示對任意正整數 $n$, 遞迴式 (6) 必須成立。

在遞迴式 (6) 對任意正整數 $n$ 成立的條件下, 先由原問題初始條件 $a_1 = 2$ 與 (1) 式求出 $a_2 = 2c$, 接著我們可透過數學歸納法證明 $a_n$ 恆爲整數, 證明如下:

**證明**: (1) 當 $n = 1, 2$ 時, 已知 $a_1 = 2$, $a_2 = 2c$, 故 $a_1, a_2$ 爲整數;
(2) 當 $n = k, k+1$ 時, 若 $a_k, a_{k+1}$ 均爲整數, 其中 $k \geq 1$, 則當 $n = k+2$ 時, 由於

$$a_{k+2} = 2ca_{k+1} - a_k,$$

因此知 $a_{k+2}$ 亦爲整數。
由數學歸納法原理, 知 $a_n$ 恆爲整數, 證明完畢。

由以上證明結果, 我們也知道原問題關心的 $a_{2000}$ 爲整數。

## 回顧與整理:

本節最後, 若回顧上一節與本節各個項目的討論結果, 觀察在不同的 $c$ 值下遞迴式 (1) 的解數列 $\langle a_n \rangle$, 則其相鄰三項 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 滿足 (5) 式或 (6) 式的各種情形可整理如下表:

表1

<table>
<tr><td>$c$ 值範圍</td><td colspan="2">$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 對哪些正整數 $n$ 滿足 (5) 式或 (6) 式?</td></tr>
<tr><td>$c = \pm 1$</td><td colspan="2">對任意正整數 $n$, 同時滿足 (5) 式與 (6) 式</td></tr>
<tr><td>$c \leq -2$</td><td>$n = 1$ 時僅滿足 (6) 式</td><td>$n \geq 2$ 時僅滿足 (5) 式</td></tr>
<tr><td>$c \geq 2$</td><td colspan="2">對任意正整數 $n$, 僅滿足 (6) 式</td></tr>
</table>

# 四、延伸探討

回顧前兩節兩個 (d) 項目的討論內容, 可發現當 $c \geq 2$ 時我們並未求出 $a_n$ 的表達式。因此, 不妨利用本節計算當 $c \geq 2$ 時 $a_n$ 一般項的表達式。

當 $c \geq 2$ 時, 遞迴式 (1) 的解 $a_n$ 滿足二階遞迴式 (6) (可參考上一節末所列之表 1), 而初始條件爲 $a_1 = 2$, $a_2 = 2c$。將遞迴式 (6) 改寫爲

$$a_{n+2} - 2ca_{n+1} + a_n = 0, \tag{7}$$

此爲常係數二階線性遞迴式, 其特徵方程式 $\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0$ 的兩根如下:

$$\lambda = c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

爲求簡化符號, 我們令上述兩根爲

$$\alpha = c + \sqrt{c^2 - 1}, \tag{8}$$

$$\beta = c - \sqrt{c^2 - 1}, \tag{9}$$

則有 $\alpha\beta = 1$, 且由 $c \geq 2$ 的條件可知 $\alpha > \beta > 0$。

由求解線性遞迴式的相關理論 (可參考 [2] 第 7.2 節), 知滿足 (7) 式的解可假設爲

$$a_n = k_1\alpha^n + k_2\beta^n, \tag{10}$$

其中 $k_1, k_2$ 爲常數。將 $n = 1, 2$ 代入上式後搭配 $a_1 = 2$, $a_2 = 2c$ 的條件, 可得方程組

$$\begin{cases} k_1\alpha + k_2\beta = 2 \\ k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 = 2c \end{cases}.$$

解上述方程組, 可得 $k_1 = 1/\alpha$, $k_2 = 1/\beta$, 將此兩結果代入 (10) 式可知

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}, \tag{11}$$

也就是有

$$a_n = (c + \sqrt{c^2 - 1})^{n-1} + (c - \sqrt{c^2 - 1})^{n-1}. \tag{12}$$

上式就是當 $c \geq 2$ 時, 在初始條件 $a_1 = 2$, $a_2 = 2c$ 下滿足遞迴式 (6) 的解 $a_n$ 之表達式, 同時也是在初始條件 $a_1 = 2$ 下滿足遞迴式 (1) 的解 $a_n$ 之表達式。

注意因 $\alpha > \beta > 0$, 可知對任意正整數 $n$ 有 $\alpha^{n-1} \geq \beta^{n-1}$, 或者寫成

$$\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \geq 0. \tag{13}$$

利用 (11) 式與 $\alpha\beta = 1$ 的條件, 可知

$$a_n{}^2 - 4 = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})^2 - 4\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 \geq 0. \tag{14}$$

對 (14) 式中等式部份的兩端加上根號後, 利用 (13) 式可得

$$\sqrt{a_n{}^2 - 4} = |\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}| = \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}. \tag{15}$$

此時回頭觀察 (8), (9) 兩式, 可知

$$\alpha - c = c - \beta = \sqrt{c^2 - 1}, \tag{16}$$

再利用 (11) 式的結果, 配合 (15), (16) 兩式可知

$$\begin{aligned} a_{n+1} - ca_n &= (\alpha^n + \beta^n) - c(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = (\alpha - c)\alpha^{n-1} - (c - \beta)\beta^{n-1} \\ &= \sqrt{c^2 - 1} \times (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = \sqrt{c^2 - 1} \times \sqrt{a_n{}^2 - 4}. \end{aligned}$$

上式所得的結果, 移項後即得

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n{}^2 - 4)}, \tag{17}$$

而這應該就是第一節原問題中遞迴式 (1) 的由來。

不過, 原問題是將本節設定的條件「$c$ 爲不小於 2 之整數」放寬爲「$c$ 爲非零整數」後再看 (17) 式, 也因此才有第三節末之表 1 所列, 在不同的 $c$ 值範圍下所得的不同結果。

## 五、可能之推廣

接下來, 我們不妨把遞迴式 (7) 推廣爲更一般的

$$a_{n+2} - 2pa_{n+1} + qa_n = 0, \tag{18}$$

其中 $p, q$ 爲正實數且滿足 $p > 1$, $p^2 - q > 0$, 並取初始條件 $a_1 = 2$, $a_2 = 2p$。此時, (7) 式只是對 (18) 式取 $p = c$, $q = 1$ 且 $c$ 爲大於 1 之整數的特例。遞迴式 (18) 的特徵方程式爲

$$\lambda^2 - 2p\lambda + q = 0,$$

它有兩相異實根 $p \pm \sqrt{p^2 - q}$。我們令

$$\alpha = p + \sqrt{p^2 - q}, \tag{19}$$

$$\beta = p - \sqrt{p^2 - q}, \tag{20}$$

則同樣有 $\alpha > \beta > 0$, 且有

$$\alpha - p = p - \beta = \sqrt{p^2 - q}. \tag{21}$$

回顧 (10) 式的由來, 同理可知 (18) 式的解可假設爲

$$a_n = k_1\alpha^n + k_2\beta^n, \tag{22}$$

其中 $k_1, k_2$ 爲常數。將 $n = 1, 2$ 代入上式後搭配 $a_1 = 2$, $a_2 = 2p$ 的條件, 可得方程組

$$\begin{cases} k_1\alpha + k_2\beta = 2 \\ k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 = 2p \end{cases}.$$

解上述方程組, 可得 $k_1 = 1/\alpha$, $k_2 = 1/\beta$, 將此兩結果代入 (22) 式可知

$$a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}, \tag{23}$$

也就是有

$$a_n = (p + \sqrt{p^2 - q})^{n-1} + (p - \sqrt{p^2 - q})^{n-1}.$$

由於 $\alpha\beta = q$, 此時若仿照寫下 (14) 式時的想法, 改考慮 ${a_n}^2 - 4q^{n-1}$, 可得

$${a_n}^2 - 4q^{n-1} = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})^2 - 4\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 \geq 0. \tag{24}$$

注意因 $\alpha > \beta > 0$, 可知對任意正整數 $n$, 我們有

$$\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \geq 0, \tag{25}$$

仿照 (15) 式的推導方式, 利用 (24), (25) 兩式可得

$$\sqrt{{a_n}^2 - 4q^{n-1}} = |\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}| = \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}. \tag{26}$$

接著, 依序利用 (23), (21), (26) 三式的結果, 可知

$$\begin{aligned} a_{n+1} - pa_n &= (\alpha^n + \beta^n) - p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = (\alpha - p)\alpha^{n-1} - (p - \beta)\beta^{n-1} \\ &= \sqrt{p^2 - q} \times (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) = \sqrt{p^2 - q} \times \sqrt{{a_n}^2 - 4q^{n-1}}, \end{aligned}$$

因此得到

$$a_{n+1} = pa_n + \sqrt{(p^2 - q)({a_n}^2 - 4q^{n-1})}. \tag{27}$$

當然, 遞迴式 (17) 就是對上式取 $p = c$, $q = 1$ 且 $c$ 爲大於 1 之整數的結果。注意取 $q = 1$ 可使 (27) 式中的 $4q^{n-1}$ 變成與 $n$ 無關的常數 4, 從而得到較 (27) 式簡潔許多的 (17) 式。

## 六、結語

本文前三節的內容, 是先由非線性一階遞迴式 (1) 求出 (5) 與 (6) 這兩個線性二階遞迴式, 接著再對不同的 $c$ 值範圍, 探討遞迴式 (1) 的解數列 $\langle a_n \rangle$ 之相鄰三項 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 對於哪些 $n$ 值會滿足遞迴式 (5) 或 (6)。第四節的 (12) 式是在 $c \geq 2$ 之條件下遞迴式 (6) 的解, 它是本文想強調的一個重點, 而藉由第四節後半的探討, 我們也大約知道遞迴式 (1) 的由來應與 (12) 式有關。

本文投稿後歷經兩次主要的修正, 感謝審稿者提供了許多有益的修正建言, 使本文得以更臻完善。其中, 在第一節由遞迴式 (1) 推得 (4) 式的手法與第二、第三節分開探討 (5), (6) 兩式的寫法均出自其建議, 前者完全取代了筆者原本推得 (4) 式時所用的方法, 而後者則使本文原有的研究結果得以清楚呈現, 再次感謝。

**註** 1: 在 $c \leq -2$ 的條件下不難證明 $2c$ 與 $4c^2-2$ 兩數不相等, 讀者不妨試著證明看看。

## 參考文獻

1. 國立新竹高中數學科教學研究會《竹籤算籌》網頁。
2. Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2007.

—本文作者投稿時任職群緯環保—