數學傳播 47卷3期, pp. 60-71

2023年第64屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2023 年第 64 屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 在日本千葉舉行。本屆共有 112 個國家與會、合計 618 位學生 (含 67 位女學生) 代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕。除了確認各項議題外, 評審會議的主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出 30 道左右的預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。

本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認爲較適當的試題, 再由各國領隊組成的評審會議經過四天的討論票選出 6 道正式試題, 其中第一題的領域爲數論、第二、六題爲幾何、第三、四題爲代數, 第五題爲組合。對此次我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

問題一: 試找出所有滿足下述條件的合數 $n>1$: 若 $d_1, d_2, \ldots, d_k$ 爲 n 的所有正因數, 其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$, 則對每一個 $1\leqslant i\leqslant k-2$, 都有 d_i 整除 $d_{i+1}+d_{i+2}$。

試題委員會公布的參考答案:

n 是所有形如 p^r 的正整數, 其中 p 爲質數, r 爲大於 1 的整數。

首先, 易知如上的整數 n 滿足題設, 因爲此時 n 的正因數爲 $d_i=p^{i-1}$, 其中 $i=1, 2, \ldots, r+1=k$, 而顯然有 $p^{i-1}\mid p^i+p^{i+1}$。

接下來我們證明上述爲所有的解。我們從以下引理開始:

引理: 對每一個 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 都有 $d_i\mid d_{i+1}$。

證明: 對 i 進行數學歸納法。由於 $d_1=1$, 命題對 $i=1$ 顯然成立。今設 $2\leqslant i\leqslant k-1$ 且命

題對 $i-1$ 成立, 即 $d_{i-1} \mid d_i$。由歸納法假設及題設 $d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1}$, 可知 $d_{i-1} \mid d_{i+1}$。

現考慮下列因數: $d_{k-i} = \dfrac{n}{d_{i+1}}$, $d_{k-i+1} = \dfrac{n}{d_i}$, $d_{k-i+2} = \dfrac{n}{d_{i-1}}$。由題設知

$$\frac{d_{k-i+1} + d_{k-i+2}}{d_{k-i}} = \frac{\frac{n}{d_i} + \frac{n}{d_{i-1}}}{\frac{n}{d_{i+1}}} = \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1}}$$

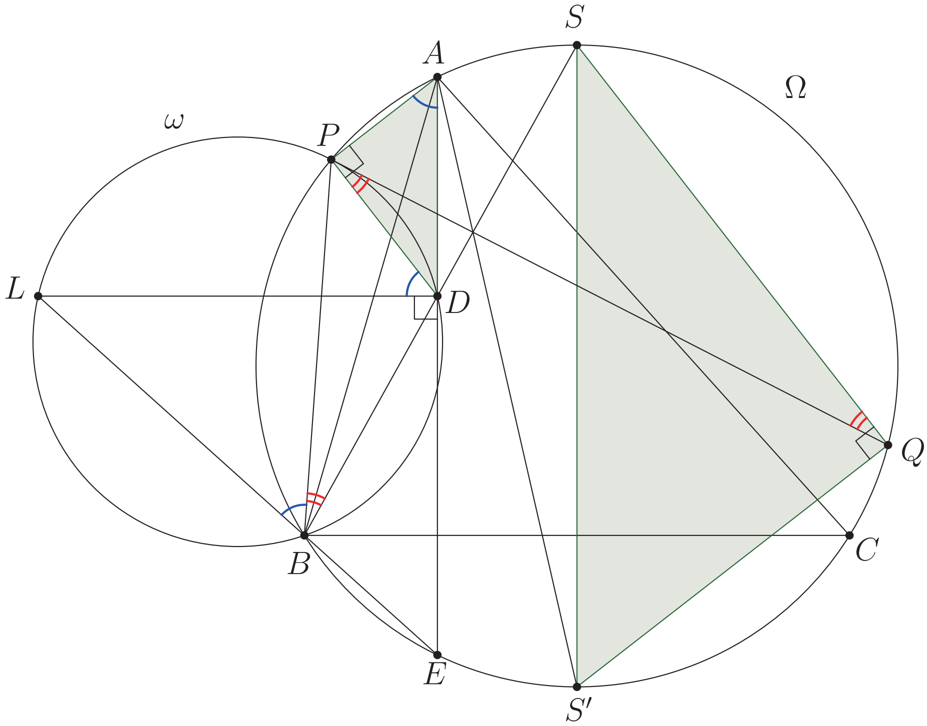
爲整數。由 $\dfrac{d_{i+1}}{d_{i-1}}$ 爲整數, 推得 $\dfrac{d_{i+1}}{d_i}$ 亦爲整數, 即 $d_i \mid d_{i+1}$, 命題對 i 成立。故宣稱由數學歸納法原理得證。 □

回到原題。由此引理, 可知 n 不可能有兩個以上不同的質因數, 否則最小的質因數會整除次大的質因數。所以合數 n 必爲質數的次方數, 且次方至少爲 2, 如所求。 □

評註: 此題爲本屆賽事最簡單的數論題, 獲得各國領隊的一致支持。對於同學參與數學競賽活動, 在本題得到滿分, 無疑是很大的鼓勵。

問題二: 設 ABC 爲銳角三角形, 其中 $AB < AC$。設 Ω 爲 ABC 的外接圓, 而點 S 爲 Ω 上包含 A 點的弧 CB 的中點。過 A 作與 BC 垂直的直線, 該直線和 BS 交於點 D, 並和 Ω 再交於點 $E \neq A$。設過 D 並與 BC 平行的直線和直線 BE 交於點 L; 又將三角形 BDL 的外接圓記爲 ω。設 ω 與 Ω 再交於點 $P \neq B$。

試證: 圓 ω 在點 P 的切線和直線 BS 交在 $\angle BAC$ 的內角平分線上。



試題委員會公布的參考答案:

設點 S' 爲 Ω 上弧 BC 的中點, 其與 S 形成對徑點, 且直線 AS' 爲 $\angle BAC$ 的內角平分線。設圓 ω 在點 P 的切線與 Ω 再交於點 $Q \neq P$, 有 $\angle SQS' = 90°$。

由於 $APBE$ 與 $DPLB$ 皆爲圓內接四邊形, 所以有

$$\angle PAD = \angle PAE = 180° - \angle EBP = \angle PBL = \angle PDL = 90° - \angle ADP.$$

因此在三角形 APD 中, $\angle DPA = 180° - \angle PAD - \angle ADP = 90°$。

接下來注意到:

- 直線 ADE 與 SS' 皆與 BC 垂直, 故 $AD\,//\,S'S$。
- 直線 PQ 是圓 ω 在點 P 的切線, 故 $\angle DPQ = \angle DBP = \angle SBP = \angle SQP$。由此知 $PD\,//\,QS$。
- 由於 $AP \perp PD\,//\,QS \perp S'Q$, 所以 $AP\,//\,S'Q$。

由上述三點, 可知三角形 APD 與 $S'QS$ 相似, 且它們的對應邊互相平行。於是其三組對應點的連線, 即直線 PQ (即圓 ω 在點 P 的切線)、直線 DS (即直線 BS)、直線 AS' (即 $\angle BAC$ 的內角平分線) 三線共點或互相平行。但由於邊 AD 與邊 $S'S$ 逆平行, 故可排除三線平行的狀況。所以題目結論成立, 得證。 $\square$

評註: 本題爲中等難度的幾何題, 其中有許多相似形與圓周角、圓切角的性質, 也有許多證明的路徑, 甚至可用複數幾何求解, 是值得多方探究的好題目。

問題三: 對每一個整數 $k \geqslant 2$, 試找出所有具有下述性質的無窮正整數數列 $a_1, a_2, \ldots$: 存在以下形式的多項式 $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$, 其中 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ 爲非負的整數, 使得

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

對每一個整數 $n \geqslant 1$ 均成立。

試題委員會公布的參考答案:

公差 $d \geqslant 0$ 的等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足題設, 滿足的多項式爲

$$P(x) = (x+d)(x+2d)\cdots(x+kd).$$

以下我們證明, 滿足題設的數列 $\langle a_n \rangle$ 必爲非遞減的等差數列。

因爲 $P(x)$ 的係數都是非負整數 (且首項係數爲 1), 故對任意正實數 x, y, 都有

$$P(x) < P(y) \iff x < y.$$

再者, 若數列 $\langle a_n\rangle$ 終究是常數數列 (即存在正整數 N, 使得 $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = \cdots$), 則 $P(x) = x^k$ 且 $\langle a_n\rangle$ 爲常數數列。這是因爲若 $P(x)$ 不是單項式 x^k 的話, 題設 $P(a_n) = a_{n+1}\cdots a_{n+k}$ 不會有 $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{n+k}$ 的 n 所滿足。由此可回推得到 $\langle a_n\rangle$ 爲常數數列。所以接下來我們總是假設 $\langle a_n\rangle$ 從任一項開始的子數列都不是常數數列。

首先我們比較下列兩條等式:

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k},$$
$$P(a_{n+1}) = a_{n+2}\cdots a_{n+k}a_{n+k+1},$$

可觀察到

$$a_n < a_{n+1} \iff P(a_n) < P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} < a_{n+k+1}, \tag{1}$$
$$a_n > a_{n+1} \iff P(a_n) > P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} > a_{n+k+1}, \tag{2}$$
$$a_n = a_{n+1} \iff P(a_n) = P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} = a_{n+k+1}. \tag{3}$$

引理 1: $a_n \leqslant a_{n+1}$ 對所有正整數 n 均成立。

證明: 假設存在 $n(0) \geqslant 2$ 滿足 $a_{n(0)-1} > a_{n(0)}$。以下建構一個無窮正整數數列 $n(0) < n(1) < \cdots$ 滿足

$$a_{n(i)-1} > a_{n(i)} \quad 且 \quad a_{n(i)} > a_{n(i+1)}.$$

從而得無窮遞減的正整數數列 $a_{n(0)}, a_{n(1)}, a_{n(2)}, \ldots$, 顯然不合。

考慮對 i 作數學歸納法, 設 $n(i)$ 已經選好了。由 (2) 可知 $a_{n(i)} > a_{n(i)+k}$, 故在區間 $[n(i)+1, n(i)+k]$ 中必存在滿足 $a_{n(i)} > a_{n(i+1)}$ 的最小足標 $n(i+1)$。此處須驗證 $a_{n(i+1)-1} > a_{n(i+1)}$。若 $n(i+1) = n(i)+1$, 此不等式顯然成立; 若 $n(i+1) \geqslant n(i)+2$, 則由 $n(i+1)$ 的最小性知 $a_{n(i+1)-1} \geqslant a_{n(i)} > a_{n(i+1)}$, 亦成立。引理 1 得證。 □

引理 1 已經得到 $\langle a_n\rangle$ 的非遞減性。若有 n 滿足 $a_n = a_{n+1}$, 則由 (3) 知 $a_{n+1} = a_{n+k+1}$, 再由非遞減性知 $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{n+k+1}$。重複此論證在 $a_{n+k} = a_{n+k+1}$ 及其後的數列, 可知 $\langle a_n\rangle$ 終究爲常數數列, 與此處的假設不合。故 $\langle a_n\rangle$ 實際上爲嚴格遞增數列。

定義 $d_{n,i} := a_{n+i} - a_n$, 其中 $i = 1, 2, \ldots, k$。由於 $\langle a_n\rangle$ 嚴格遞增, 所以 $0 < d_{n,1} < \cdots < d_{n,k}$。改寫

$$P(a_n) = (a_n + d_{n,1})\cdots(a_n + d_{n,k}) \geqslant (a_n)^k + d_{n,k}\cdot(a_n)^{k-1}.$$

若 $d_{n,k}$ 大於 c_{k-1}, 則對足夠大的 a_n 會產生矛盾。所以 $d_{n,k}$ 有界, 也就是 $d_{n,i}$ 都有界。

於是, 某一種 $(d_{n,1}, \ldots, d_{n,k})$ 的組合會出現無限多次, 將其記爲 $(D_1, \ldots, D_k)$, 由代數基本定理知

$$P(x) = (x + D_1)(x + D_2)\cdots(x + D_k)$$

爲多項式恆等式。特別地, $a_{n+1}-a_n=D_1=d$ 對所有正整數 n 均成立, 因此 $P(x)=(x+d)(x+2d)\cdots(x+kd)$, 而 $\langle a_n\rangle$ 爲遞增的等差數列。本題證明完畢。 $\square$

評註: 本題是偏難的代數題, 但在 IMO 的三、六題又屬較易的題目。本題探討由多項式產生數列的性質, 證明中需考慮數列的無界性、單調性, 以及掌握相鄰兩項差距的大小, 並輔以多項式係數的對稱性, 才能得出結論。

問題四: 設 $x_1,x_2,\ldots,x_{2023}$ 爲兩兩相異的正實數, 使得對所有 $n=1,2,\ldots,2023$,

$$a_n=\sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}$$

均爲整數。試證 $a_{2023}\geqslant 3034$。

試題委員會公布的參考答案:

由數列 $\langle a_n\rangle$ 的定義, 可知其爲嚴格遞增; 又因它是正整數數列, 所以 $a_{n+1}-a_n\geqslant 1$ 總是成立。

引理: 若 $a_{n+1}-a_n=1$ 且 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$, 則 $x_{n+2}=x_{n+1}$。

證明: 首先觀察

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2&=(x_1+\cdots+x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right)\\
&=(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+1\\
&\qquad+\frac{1}{x_{n+1}}(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\\
&\geqslant a_n^2+1+2\sqrt{\frac{1}{x_{n+1}}(x_1+\cdots+x_n)\cdot x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}\\
&=a_n^2+1+2a_n=(a_n+1)^2,
\end{aligned}$$

其中使用了算幾不等式。而且當 $a_{n+1}=a_n+1$, 即等號成立時, 有

$$\frac{1}{x_{n+1}}(x_1+\cdots+x_n)=x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right). \tag{4}$$

同理, 當 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$ 時, (4) 式成爲

$$\frac{1}{x_{n+2}}(x_1+\cdots+x_{n+1})=x_{n+2}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right). \tag{5}$$

將 (5) 式改寫爲

$$\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\left(\frac{1}{x_{n+1}}(x_1+\cdots+x_n)+1\right)=\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\left(x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+1\right).$$

將 (4) 式代入整理, 即得 $x_{n+2}=x_{n+1}$。 □

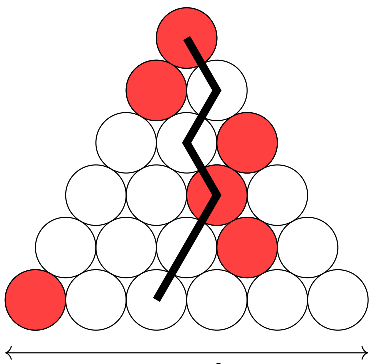
回到原題。由引理知 $a_{n+2}\geqslant a_n+3$ 對所有正整數 n 均成立。由於 $a_1=1$, 所以

$$a_{2023}=a_1+\sum_{k=1}^{1011}(a_{2k+1}-a_{2k-1})\geqslant 1+3\cdot 1011=3034,$$

原題得證。 □

評註: 本題是簡單的代數題。題目中的 3034 約爲 2023 的 $\frac{3}{2}$ 倍, 提供了重要的解題線索。中間配合算幾不等式的應用與等號成立條件的觀察, 即可推得結論。應該是稍有數學競賽訓練的同學都能完成的題目。

問題五: 設 n 爲正整數。日式三角形是將 $1+2+\cdots+n$ 個圓排成正三角形的形狀, 使得對所有 $i=1,2,\ldots,n$, 由上往下數的第 i 列有 i 個圓, 且每一列都有一個圓塗成紅色。在日式三角形中, 所謂的忍者通道, 是由一串由最上列到最下列的 n 個圓, 其中每個圓連到下一列與之相切的兩圓之一。下圖是一個 $n=6$ 的日式三角形的例子, 其中畫有一條包含兩個紅色圓的忍者通道。

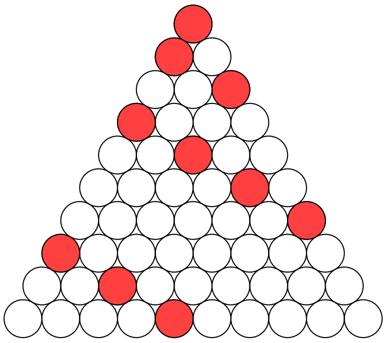


試找出 k 的最大值 (以 n 表示), 保證在每一個日式三角形中, 有一條包含至少 k 個紅色圓的忍者通道。

試題委員會公布的參考答案:

k 的最大值爲 $1+N$, 其中 $N=\lfloor\log_2 n\rfloor$。

先給出一個建構, 其中每一條忍者通道最多只能包含 $N+1$ 個紅色圓。由上往下數, 在第 $i=2^a+b$ 列 (其中 $0\leqslant a\leqslant N$, 且 $0\leqslant b<2^a$), 將由左數來第 $(2b+1)$ 個圓塗成紅色, 如下示意圖所示。



可知每一條忍者通道, 對每個 $a=0,1,\ldots,N$, 在第 $2^a, 2^a+1,\ldots,2^{a+1}-1$ 列中至多包含一個紅色圓。所以每一條忍者通道最多只會包含 $N+1$ 個紅色圓。

以下證明其爲最佳下界; 此時只需考慮 $n=2^N$ 的情形即可。$N=0$ 時命題顯然成立。下設 $n=2^N$, 其中 $N\geqslant 1$。

以下我們將會找出 2^N 條忍者通道 (可重複), 證明這些通道所包含的紅色圓數量的平均數大於 N, 則其中必有一條忍者通道所包含的紅色圓數量大於 N。爲了設計這些通道, 我們有以下引理。

引理: (這裡我們延伸忍者通道的定義, 使其可以從任一列開始, 至任一列結束, 且容許由下往上的連接。) 對每一個 $s=1,2,\ldots,N$, 都存在 2^s 條忍者通道, 由第 2^s 列開始至第 2^{s-1} 列結束, 並滿足下列條件:

- 第 2^s 列中的每個圓都恰在其中的一條通道中。
- 第 2^{s-1} 列中的每個圓都恰在其中的兩條通道中。
- 當 $2^{s-1}\leqslant j<2^s$ 時, 第 j 列的紅色圓, 恰包含於其中的兩條通道。

我們首先證明此引理可推出所需下界。將由第 2^N 列到第 2^{N-1} 列的忍者通道接上由第 2^{N-1} 列到第 2^{N-2} 列的忍者通道, 其中後者的通道都要用兩次, 可以得到由第 2^N 列到第 2^{N-2} 列的 2^N 條忍者通道。依此類推, 建構出由第 2^N 列到最上面第 1 列的 2^N 條忍者通道。由條件, 當 $2^{N-m-1}\leqslant j<2^{N-m}$ 時, 第 j 列的紅色圓, 恰包含於其中的 2^{m+1} 條通道中。於是這些忍者通道包含的紅色圓數量的平均值可計算爲

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^N}\left(1+\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{j=2^{N-m-1}}^{2^{N-m}-1}2^{m+1}\right)&=\frac{1}{2^N}\left(1+\sum_{m=0}^{N-1}2^{N-m-1}\cdot 2^{m+1}\right)\\&=\frac{1}{2^N}+\sum_{m=0}^{N-1}1=\frac{1}{2^N}+N>N,\end{aligned}$$

其中的第一個括號內的 $1+$ 來自於第 2^N 列的紅色圓。得證。

接下來只需證明引理。(想像在日式三角形中的任一圓 C_h 中寫入數字 n_h; 在下方列的圓寫有數字 1 或 2 的, 將向上方列的圓畫 1 或 2 個箭頭。)

我們給出歸納式建構。對每一個 $0 \leqslant i \leqslant 2^{s-1}$, 考慮由第 2^s 列到第 $2^s - i$ 列的 2^s 條忍者通道滿足下列條件:

($*$) 對所有 $2^s - i \leqslant j \leqslant 2^s$, 在第 j 列的每個圓, 都包含在 1 或 2 條通道中。

(†) 對所有 $2^s - i \leqslant j < 2^s$, 在第 j 列的紅色, 恰包含在 2 條通道中。

當 $i = 0$ 時, 可取所有的 2^s 個圓, 每個圓當作一條獨立的通道, 即滿足要求。現設我們對 $i \in [0, 2^{s-1})$ 已經有了這樣的忍者通道, 我們來建構對 $i+1$ 成立的通道。

由左至右對第 $2^s - i$ 列的圓依序編號爲 $C_1, \ldots, C_{2^s-i}$, 並讓 C_a, C_{a+1} 爲第 $2^s - i - 1$ 列的紅色圓正下方的兩個圓。設 n_h $(1 \leqslant h \leqslant 2^s - i)$ 爲對 i 的忍者通道中包含 C_h 圓的數量。條件 ($*$) 即等價於每個數字 n_h 等於 1 或 2。以下細分四種情形。

情形 1: 存在 $b_1 \leqslant a$ 及 $a+1 \leqslant b_2$ 滿足 $n_{b_1} = 1$ 及 $n_{b_2} = 1$。

取 b_1 爲滿足上述假設的最大足標, b_2 爲滿足上述假設的最小足標。將對 i 的通道依下述規則向上延伸一列:

- 對 $h \leqslant b_1$ 者, 將包含 C_h 圓的通道延伸到其右上圓。
- 對 $h \geqslant b_2$ 者, 將包含 C_h 圓的通道延伸到其左上圓。
- 對 $b_1 < h < b_2$ 者, 由假設可知有兩條通道包含 C_h 圓。將其中一條通道延伸到其左上圓, 並將另一條通道延伸到其右上圓即可。

由此建構方式, 若原來的數字爲

$$n_1, \ldots, n_{b_1-1}, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{b_2-b_1-1}, 1, n_{b_2+1}, \ldots, n_{2^s-i},$$

則其上一列的數字爲

$$n_1, \ldots, n_{b_1-1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{b_2-b_1}, n_{b_2+1}, \ldots, n_{2^s-i},$$

故 ($*$) 成立。且由於紅色圓必位於中間數字 $2, \ldots, 2$ 的區域內, 所以 (†) 亦成立。

情形 2: 對每個 $h \leqslant a$ 有 $n_h = 2$, 但存在 $h \geqslant a+1$ 滿足 $n_h = 1$。

因爲所有 n_h 的總和爲 2^s, 是個偶數, 所以至少有兩個 h 滿足 $n_h = 1$。令 $b_1 < b_2 < \cdots$ 爲所有滿足 $n_h = 1$ 的足標 h。現對 b_1, b_2 進行同情形 1 的建構。($*$) 依然成立; 且由於紅色圓落在左方數字 $n_1, \ldots, n_{b_1-1}$ 的區域 (它們全部都是 2), 故 (†) 亦成立。

情形 3: 對每個 $h \geqslant a+1$ 有 $n_h = 2$, 但存在 $h \leqslant a$ 滿足 $n_h = 1$。
此情形與情形 2 左右對稱。

情形 4: 對每個 $1 \leqslant h \leqslant 2^s - i$ 有 $n_h = 2$。
因爲所有數字 n_h 的總和爲 2^s, 所以 $2^s - i = 2^{s-1}$, 此與假設 $i < 2^{s-1}$ 矛盾, 不合。

綜上所述, 我們得到由第 2^s 列到第 2^{s-1} 列的 2^s 條忍者通道。比較通道的數量與第 2^{s-1} 列的每個數字, 可知引理成立。

至此本題證明完畢。 □

評註: 本題屬中等難度的組合題, 需觀察紅色圈擺放的規律才能求得最大可能值。這裡提供具有機率組合想法的官方解答, 並且配合演算法得證。對於同時掌握數學與資訊學科的人, 應該對本題有很大的興趣。

問題六: 設 ABC 是一個正三角形。設 A_1, B_1, C_1 是三角形 ABC 的內部點, 其中 $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, 並且

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

設 BC_1 與 CB_1 交於 A_2, CA_1 與 AC_1 交於 B_2, AB_1 與 BA_1 交於 C_2。

試證: 若 $A_1B_1C_1$ 形成一個不等邊三角形, 則三角形 AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 的三個外接圓, 會同時通過兩相異點。

試題委員會公布的參考答案:

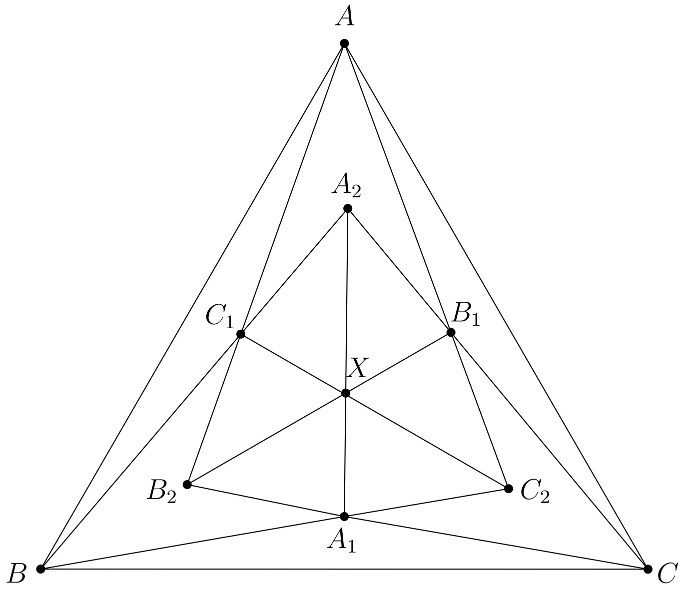
令 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 分別是三角形 AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 的外接圓。策略是找到兩個對 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 等冪的點。

引理: A_1 是三角形 A_2BC 的外心, 餘者類推。

證明: 由於 A_1 位於線段 BC 的中垂線上並落在 $\triangle BA_2C$ 的內部, 此時證明 $\angle BA_1C = 2\angle BA_2C$ 即可。計算角度可知

$$\begin{aligned}
\angle BA_2C &= \angle A_2BA + \angle BAC + \angle ACA_2 \\
&= \frac{1}{2}\left((180^\circ - \angle AC_1B) + (180^\circ - \angle CB_1A)\right) + 60^\circ \\
&= 240^\circ - \frac{1}{2}(480^\circ - \angle BA_1C) \\
&= \frac{1}{2}\angle BA_1C,
\end{aligned}$$

引理 1 得證。 □



由這些外心的性質, 可知

$$\angle B_1B_2C_1 = \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1,$$

所以 $B_1C_1B_2C_2$ 共圓。同理 $C_1A_1C_2A_2$, $A_1B_1A_2B_2$ 都是四點共圓。注意到六邊形 $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ 不在某圓上, 因爲

$$\angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 + \angle A_2B_1C_2 = 480^\circ \neq 360^\circ.$$

所以對這三個圓使用根軸定理, 可知三條根軸 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 同時通過根心 X, 且 X 對圓 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 等冪。

令 $\triangle A_2BC$ 的外接圓與 δ_A 再交於點 $A_3 \neq A_2$; 同理定義 B_3 和 C_3。

引理 2: BCB_3C_3 共圓; 餘者類推。

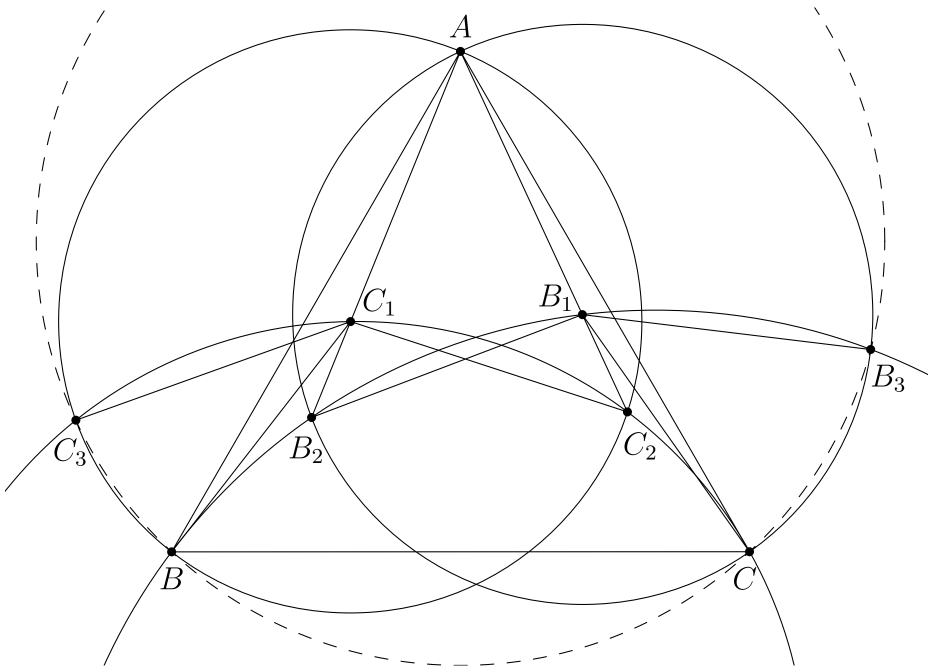
證明: 使用有向角作以下計算:

$$\begin{aligned}
\measuredangle BC_3C &= \measuredangle BC_3C_2 + \measuredangle C_2C_3C \\
&= \measuredangle BAC_2 + \measuredangle C_2C_1C \\
&= 90^\circ + \measuredangle(C_1C, AC_2) + \measuredangle C_2C_1C \qquad (CC_1 \perp AB) \\
&= 90^\circ + \measuredangle C_1C_2B_1.
\end{aligned}$$

同理可得 $\measuredangle CB_3B = 90^\circ + \measuredangle B_1B_2C_1$。利用 $B_1C_1B_2C_2$ 共圓可得

$$\measuredangle BB_3C = 90^\circ + \measuredangle C_1B_2B_1 = 90^\circ + \measuredangle C_1C_2B_1 = \measuredangle BC_3C,$$

引理 2 得證。 □



同理, CAC_3A_3 與 ABA_3B_3 也是四點共圓。但 $AC_3BA_3CB_3$ 不共圓, 因爲如此的話, 有 AB_2CB_3 共圓, 得 B_2 落在圓 ABC 上, 此與 B_2 位於三角形 ABC 內部矛盾。再一次, 我們對這三個圓使用根軸定理, 可知三條根軸 AA_3, BB_3, CC_3 同時通過根心 Y, 且 Y 對 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 三圓等冪。

最後是一些細節。

- 設點 O 爲正三角形 ABC 的中心。有

$$\angle BA_1C = 480^\circ - \angle CB_1A - \angle AC_1B > 480^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 120^\circ,$$

  所以 A_1 位於三角形 BOC 內部。類似的結論對 B_1, C_1 亦成立。因此 $\triangle BA_1C$, $\triangle CB_1A$, $\triangle AC_1B$ 有互斥的內部。於是 $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ 爲凸六邊形, 得 X 落在線段 A_1A_2 內, 也就落在圓 δ_A 內部。

- 由於 A_1 是三角形 A_2BC 的外心, 得 $A_1A_2 = A_1A_3$。觀察圓內接四邊形 $AA_2A_1A_3$ 知直線 AA_2 與 $AA_3 \equiv AY$ 關於直線 AA_1 對稱。而在已知 X 落在線段 A_1A_2 內時, X 與 Y 重合的唯一可能是當 A_1 與 A_2 都落在 BC 的中垂線上。但此時會得到 B_1 與 C_1 關於此直線對稱, 導致 $\triangle A_1B_1C_1$ 爲等腰三角形, 此與題設的不等邊三角形矛盾。

綜上所述, X, Y 是與 $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ 三圓等冪的兩相異點, 所以此三圓有共同的根軸。由於點 X 落在圓 δ_A 內部 (同時也在圓 δ_B, δ_C 的內部), 由此知這三個圓會同時通過兩相異點。證明完畢。 □

評註: 本題是今年最難的問題, 全場僅有 6 人獲得滿分。解答中, 先由一個奇怪的 480° 條件,

發現 A_1 是三角形 A_2BC 的外心等等, 從而一步步探索, 發現許多四點共圓的性質, 最後利用三圓共根軸的性質得證。某些領隊在選題會議中大讚此題的精妙, 認爲是近年來 IMO 難得一見的幾何佳題, 值得大家好好欣賞。

—本工作小組係由教育部委託國立台灣師範大學, 於「中華民國參加 2023 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者爲林延輯副教授, 任教於國立台灣師範大學數學系。—