

# 狹義相對論常見的幾個議題及實驗

張海潮

## 一、背景

愛因斯坦 (1879~1955) 從 26 歲 (1905) 到 37 歲 (1916), 花了大約 10 年的時間, 依序完成了狹義和廣義相對論。狹和廣的區別在於狹只討論時間、空間和居中聯繫的光/電磁波, 而廣則加入了重力。如果將廣義相對論中的重力拿掉, 就回到狹。(這兩個理論的原文分別是 Special and general theory of relativity, 也有翻譯為特殊和一般相對論)。(註一) 本文嘗試針對狹義相對論的一些議題作科普式的介紹, 相關的實驗見註二及註四。

為什麼叫相對論呢?“相對”兩字因何所指? 這就要回到 1905 愛氏提出狹義相對論時的兩個基本概念, 即相對性原理 (principle of relativity) 和光速恆定原理 (principle of the constancy of the speed of light)。

相對性原理是指不同觀察者所觀察到的世界規律是一樣的。舉例來說, 有兩個朋友坐在高鐵的餐車上, 用餐、喝咖啡、聊天。在穩定速度的情形下, 他們不察覺相對地面正在運動, 並且他們用餐、聊天和在月台上用餐、聊天感覺是完全一樣的。當然, 高鐵不能突然剎車, 那會使咖啡潑出來, 也會讓人頭暈。(到了廣義相對論, 相對性原理適用的觀察者更為廣泛, 但在狹義相對論中的觀察者只能是互相以等速運動的慣性系統。)

狹義的第二個基本概念, 光速恆定原理, 是指在真空中, 不管是在火車或是在月台上量到的光速  $c$  都是每秒 30 萬公里 (299792458 公尺), 與這束光從何而來無關 (這也可以說是相對性原理的結論, 即光速是一個與觀察者獨立的數字)。

舉例來說, 有一台火車平穩的駛過月台, 火車司機打開手電筒對著月台上的站務員打了束光, 則火車司機和站務員測得的光速都是每秒 30 萬公里, 不管火車開得多快, 都不會影響站務員量得的光速。(註二)

在這裡, 必須提醒的是, 若要量光速, 基本上要量光在一秒中走的距離。因此, 當然火車有火車的一秒和一公尺, 而月台有月台的一秒和一公尺。這就是愛因斯坦最早的思想發端:

什麼是時間? 什麼是空間?

什麼是鐘? 什麼是尺?

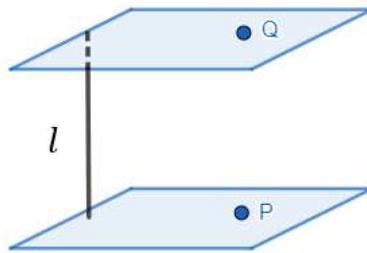
怎麼量? (註三)

## 二、光鐘

在愛因斯坦的(狹義)相對論裡,相對性原理只是一個普遍性的原則,更重要的是光速恆定原理,因為它是一個量化的結論,並且是用來聯繫空間與時間的唯一工具。(同見註一)

一個最基本的問題是,什麼是時間?伽利略了解可以用單擺計時,而後有擺鐘的設計,牛頓知道在擺幅小的時候單擺的週期公式是  $2\pi\sqrt{l/g}$ 。式中  $l$  是擺長、 $g$  是重力加速度。自古人們就了解必須要靠自然界的週期運動,才能定義時間。例如春去秋來、日升日落、陰晴圓缺等等。

現在,愛因斯坦說“光速恆定”,那我們就來設計一個光鐘如下:



圖一

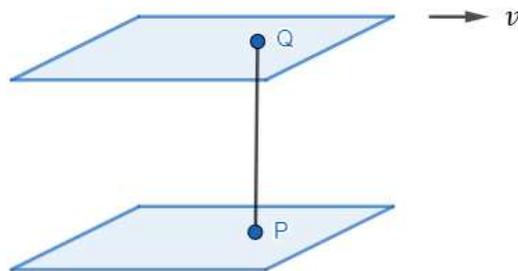
$l$  代表一根長度為  $l$  的桿子,上、下有兩面鏡子與  $l$  垂直,  $P, Q$  分別是兩面鏡子的中心,  $PQ$  平行  $l$ , 則從  $P$  發一光射向  $Q$ , 到  $Q$  後再反射回  $P$ , 然後再反射到  $Q$ , 如此生生不息。

這當然是一個週期運動,也可想成是來回振動的擺,只要計算振動的次數,就可以定義時間了。概念上不妨假設  $l$  長是 299792458 公尺,則從  $P$  出發的光走到  $Q$  剛好是 1 秒。

於是我們製作許多光鐘,送給各火車司機,大家就都有了可測的時間。當然,在製作的材料上要講究一點,不會因為火車的速度而扭曲了光鐘的結構。

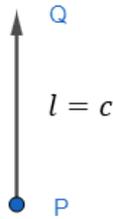
## 三、時間膨脹

想像火車司機手中拿著一個光鐘,以速度  $v$  通過月台,  $l = 299792458$  公尺 = 光每秒的速度  $c$ 。



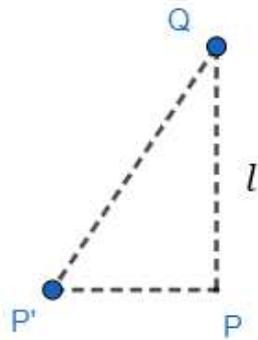
圖二

爲了不致在運動方向上，光鐘可能會改變長度  $l$ ，所以將光鐘的  $l$  桿保持與行進的方向  $v$  垂直。此時在火車上有一束光從  $P$  到  $Q$ ，對火車而言，花了 1 秒鐘 (因爲  $l = c = 299792458$  公尺)。



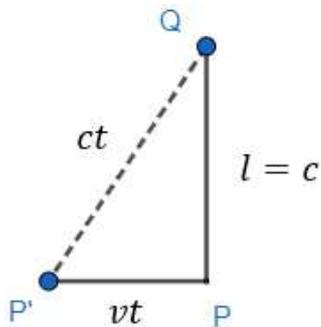
圖三

但當光從  $P$  出發時，由於  $P, Q$  對月台都在運動中，我們以  $P'$  表  $P$  的原始位置，一秒後的  $P, Q$  位置如圖四。



圖四

亦即當光到達  $Q$  時，月台看到的光是從  $P'$  斜斜的射到  $Q$ ，所以月台看到的光行路徑是  $P'Q$ ，火車看到的光行路徑是  $PQ$ ，而  $P'P$  是火車車行的距離，如下圖五：



圖五

假設月台看到光到達  $Q$  花了  $t$  秒，根據光速恆定原理，從上述圖形由畢氏定理得到

$$c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2,$$

或

$$t^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

所以

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \text{ 秒}.$$

也就是說，火車覺得過了 1 秒但月台覺得過了  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  秒，多於 1 秒，這個效應稱為時間膨脹。(註四)

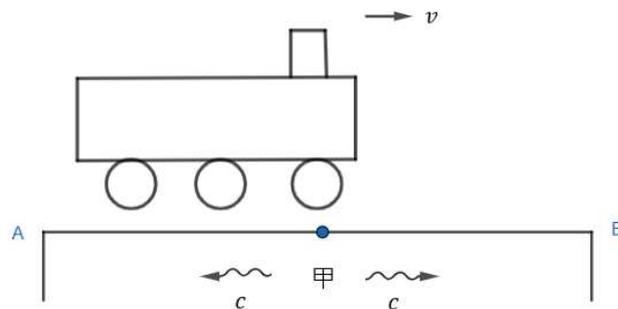
注意在上述的論證中，用了畢氏定理，畢氏定理適用於慣性系統，它是狹義相對論的舞台，但當有重力時，即在廣義相對論，畢氏定理不再適用。

#### 四、雙生子詭論

雙生子中的哥哥坐太空船離去，速度奇快，他在太空船中過了一年回到地球，基於時間膨脹，發現弟弟在地球上老了十年，真的如此？有人說，如果運動是相對的，當哥哥離開時，從哥哥的坐標來看，反而是弟弟高速離去。兩人再度相見，為什麼不見哥哥多老了十年？到底是誰變老？這稱為 twin paradox，雙生子詭論。(註五)

#### 五、同時性在火車和月台不一致

一列火車通過月台，速度  $v$ ，月台上坐著一個站務員甲，



圖六

甲距月台兩端  $A, B$  等距，當火車司機與甲重合的瞬間，甲向月台兩端“同時”放一束光，則此兩束光將“同時”到達  $A, B$ 。但對司機而言，他看到一束光向  $B$ ，另一束光向  $A$ ，此時司機覺得  $B$  向他以  $v$  奔來，而  $A$  以  $v$  向他離去，又因為光速恆定，對司機而言也是  $c$ ，所以司機覺得光到達  $B$  的時間早，而光到達  $A$  的時間比較晚，並非同時。

對火車及月台來說，同時性不是一個一致的概念，愛因斯坦用這個簡單的例子說明時間的概念不可能是絕對的，這當然違背了牛頓所主張的絕對時間觀，即所有的觀察者都有一致的時間，不管相對速度多少。

## 六、長度收縮現象

火車上，司機量火車的長度（就像我們在月台上量月台的長度），司機拿一把尺慢慢從車頭量到車尾，但是，月台上的站務員要怎麼量一列以速度  $v$  通過月台的火車長度？

愛因斯坦說，你（站務員）不能拿一把尺從車頭量到車尾，因為火車在動（這令人想到刻舟求劍的故事），站務員應該要同時標出火車頭和車尾的位置，再相減。請看圖六，如果某時刻車頭位置在  $B$ ，並且對站務員在同一時刻，車尾恰好在  $A$ ，因為月台的同時並非火車的同時，所以火車司機認為站務員是先標出車頭位置  $B$ ，然後再標出車尾位置  $A$ ，所以司機認為站務員的答案（火車長度）比司機所量實際的長度要小一些。

這個現象也稱為勞倫茲收縮，意即運動的尺比較短。

愛因斯坦對此另加說明：對運動的尺，我們要量度它，這個量度是說明這把運動的尺在我們（靜止的）空間中所佔據的部份，因此必須同時標記尺的兩端，再來相減而得到它在我們（靜止的）空間中的長度。

而這個長度是它原來長度的  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  倍（縮短了）。（註六）

## 七、質點的速度可以超過光速嗎？

當然不可以。對月台而言，如果一個質點  $P$  的速度大於光速  $c$ ，則從質點  $P$  放出的光，對月台而言光速也會大於  $c$ ， $c = 299792458$  公尺/秒。違背了光速恆定原理。

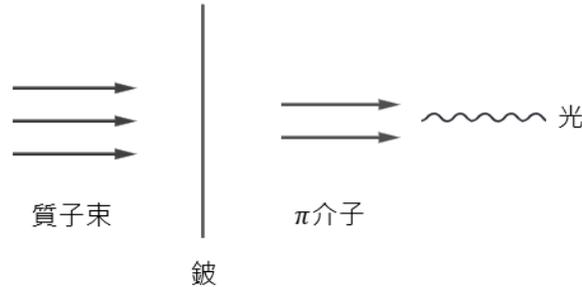
註一：狹義主張在同一個觀察系統用下列方式校準在  $A, B$  兩定點的鐘。



圖七

從  $A$  向  $B$  發一束光，當光到達  $B$  時，立刻反射回  $A$ 。如果從  $A$  向  $B$  發出光的時刻是 12 點，而光從  $B$  反射再回到  $A$  的時刻是 12 點 2 分，則把  $B$  接收到光的時刻定為 12 點 1 分。用這個辦法可以把該觀察系統各點的鐘全部校準。但並不代表可以把火車上的鐘用月台的鐘來校準。（參見本文五、同時性在火車和月台不一致。）

註二：1964 在瑞士日內瓦，歐洲核子研究組織 (CERN) 進行了一場實驗，用高速度的質子束去轟一片鈹的薄膜，鈹的原子核被轟碎後，產生了高速的  $\pi$  介子 ( $0.99975c$ )，這些  $\pi$  介子隨後衰變而放出光，而這些被高速的  $\pi$  介子放出的光，速度仍然是  $c$ 。



圖八：(Jackson, *Classical Electrodynamics* 古典電磁學, 3版, 頁 523。)

註三：最早公尺的定義是從北極通過巴黎到赤道子午線長的 1 千萬分之 1。(即地球一圈定為 4 萬公里)。幾經演變，在 1983 年第 17 屆的國際度量衡大會中，決議用光在真空中於 299792458 分之 1 秒所行經的距離為 1 公尺的定義。

這表示，已經公認光在真空中的速度是 299792458 公尺/秒，與光源的速度無關。

註四：關於時間膨脹的實驗有：Hafele-Keating experiment(1971)：把校好的鐘繞地球飛行，然後與地面的比較，發現有差，差的原因有因為相對速度，也有因為地球的重力效果 (Jackson 3 版, 頁 529)。此外，在實驗室中高速運動的介子平均壽命 (即在衰變之前) 比靜止的高了許多倍 (Jackson 3 版, 頁 529)，這也是時間膨脹的佐證。

註五：哥哥離去，必須經歷加速運動 (剎車、轉彎) 才能回到地球，因此哥哥與弟弟的經歷不同。事實是重逢時，弟弟比哥哥老得多。(同見註四)

註六：愛因斯坦在 1911 年對瓦里恰克的論文提出反駁。瓦懷疑勞侖茲收縮的“真實性”，但愛因斯坦強調靜止系統對運動長度的理解必須指基於對尺的首尾兩端“同時”的確立，因為這才是運動的尺在靜止空間所佔據的“真實的”形狀。(見凡異出版社，愛因斯坦文集，頁 210。)

## 參考資料

1. 李精益譯。相對論入門。台灣商務印書館，2005。
2. 狹義相對論的意義。張海潮。台灣商務印書館，2012。
3. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 第三版, 1999. 第 11 章/ Special Theory of Relativity.
4. 張海潮。愛因斯坦對勞侖茲變換的簡單推導。數學傳播季刊, 47(1), 15-19, 2023。
5. 愛因斯坦文集。第二卷，學術論文，新竹凡異出版社。

—本文作者為台大數學系退休教授—