數學傳播 47卷3期, pp. 35-53

Fresnel 積分 —化虛為實的高斯積分

林琦焜

Augustin-Jean Fresnel (1788~1827)

『深藏在我內心的那種感覺或虛幻, 即世俗對於榮耀的追尋與愛慕, 是何等的單調乏味; 所有 Arago、Laplace、Biot 加諸於我的讚賞, 遠不及我因發現大自然的理論眞諦或做實驗確認計算的結果而獲得的喜樂。』

— Augustin-Jean Fresnel(1788~1827) —

1. Augustin-Jean Fresnel — 波動光學理論的創建者之一

所有的創世神話一定跟光有關聯。正如聖經的創世紀 1:3上帝說:「要有光。」 就有了光。對於光的追求應是人類歷史最重要的一件事。光無所不在, 並深深影響我們的一切。沒有光, 我們看不見彼此; 沒有光, 我們也無法存活。光是如此平常, 卻又無比詭異; 科學家爲光的性質爭辯了好幾個世紀, 至今仍然困惑不已。幾乎所有的文明都是以宗教的角度來對待光, 只有等到希臘文明的出現, 希臘的知識份子勇於逼視大自然, 以全新的態度來面對它。這些知識份子最後相信的是理性, 認爲大自然是有秩序, 而且按一套偉大的設計一成不變地運作。這其中最關鍵的一步是數學的應用, 除了天文學和力學之外, 光學是另一個最常被希臘人探索的主題。其中阿克拉加

斯的恩培多克勒 (Empedocles of Agrigentum, 494BC–434BC??) 曾斷言光是以有限的速度行進。歷史上第一個利用極值原理推出光的物理定律可能是古希臘亞力山卓 Hero (Hero of Alexandria, 60AD??) 證明的反射定律[1]。除了幾何原本之外, 歐幾里得的《光學》是歷史記載首個假設光的路線是直線的人, 他更以數學描述光的反射定律 (law of reflection)。這個成就只有等到法國數學家費馬 (Pierre de Fermat: 1601∼1665) 的費馬原理

『光線從一點行至另一點所遵循之路徑, 依所需之時間最短者。』

所推導出來的折射定律才被超越。

科學革命除了新觀念引發之外更多是新工具而驅動的革命。其中最著名的是天文學, 由於使用望遠鏡而產生的伽利略革命。這些光學儀器的發明與製造, 使得通過數學計算研究光學成爲可能, 在這研究過程中光的本性問題成爲科學研究的焦點。其中最重要是牛頓 (Isaac Newton, 1642∼1727) 以精確的實驗指出, 光具有紅、橙、黃、綠、藍、靛、紫七種分光的顏色, 並提出光的本質是由「光子」的微粒所組成。同年代英國的科學家虎克 (Robert Hooke, 1635∼1703) 認爲油在水面上會形成彩色薄膜, 是因爲光是一種波。1687年, 荷蘭的科學家惠更斯 (Christian Huygens, 1629–1695) 並依此而提出光的波動說, 但是, 虎克與惠更斯都缺乏精確實驗去量化光的波動特性。更且牛頓在虎克過世後第二年 (1704) 發表《光學》一書, 此時虎克與惠更斯都相繼過世, 無人挑戰牛頓的權威。所以整個18世紀沒有人質疑「光的微粒說」。直到1801年英國醫生兼物理學家托馬斯-楊 (Thomas Young, 1773∼1829) 在自己診所裡進行著名的楊氏實驗 (Young's Experiment), 才給「光的波動說」帶來了重生的希望與穩固的實驗基礎。托馬斯-楊提到, 讓光通過二個窄縫, 結果會產生光暗相間的平行條紋, 這是科學史上著名的「雙狹縫干涉實驗」(double-silt experiment)。1817 年托馬斯-楊更指出: 光是一種橫波並建立起新的波動理論。法國土木工程師兼物理學家菲涅耳 (Fresnel) 以托馬斯-楊的新理論爲基礎開始研究, 在 1819 年成功地完成了對由兩個平面鏡所產生的相關光源進行的光的干涉實驗, 繼托馬斯-楊之後再次證明了光的波動說。之後, Jesoph von Fraunhofer (1787∼1826) 通過光柵研究了光的衍射 (diffraction) 現象, 自此光的波動說牢固地建立起來,「光的微粒說」開始轉入劣勢。但是 1887 年奧地利實驗物理學家赫茲 (Heinrich Rudolf Hertz, 1857∼1894) 發現了光電效應, 光的微粒性再一次被證實。1900 年德國物理學家普朗克 (Max Planck, 1858∼1947) 提出量子假說, 接著 1905 年愛因斯坦提出光的量子假說, 使人們終於認清楚光的波動性與微粒性的雙重本質。而且在這個啟發下促使德布羅意 (Louis de Broglie, 1892∼1987) 發現了物質波, 使得人們認清了微觀世界的波粒二象性 (wave-particle duality), 爲後來的量子力學建立了基礎。

菲涅耳 (Augustin-Jean Fresnel, 1788∼1827) 是法國土木工程師兼物理學家, 在 8 歲

[1]根據有記載的文獻, 春秋戰國時代的《墨經》中記載了最早的小孔成像實驗:「景, 光之人, 煦若射, 下者之人也高; 高者之人也下, 足蔽下光, 故成景於上, 首蔽上光, 故成景於下。」指出小孔成倒像的根本原因是光的「煦若射」。

以前都還有閱讀障礙。但後來的事實證明他並不是自閉症, 也沒有學習障礙, 反之他以優異的成績進入法國最好的巴黎綜合理工 (École Polytechnique), 後來繼續在 École Nationale des Ponts et Chaussées 就讀並成爲一名土木工程師。1816 年由於他試圖恢復惠更斯的波動說而捲入「光的波動說與微粒說」的論戰。1818 年, 他寫了一篇關於繞射的研究報告, 因此於次年獲得法蘭西學院的大賽獎。這篇文章的 Fresnel 積分就是他研究繞射而發現的積分。1827 年, 菲涅耳因肺結核病死於巴黎的近郊, 年僅 39 歲。在他有生之年, 他對於光學所做出的貢獻並沒有得到學術界認知。一直等到他過世後多年, 很多論文才開始被法蘭西學院發表印行。本文之引言, 這段充滿感性與信仰的話是菲涅耳 (Fresnel) 1824 年寫給英國醫生兼物理學家托馬斯-楊 (Thomas Young) 的一段告白。菲涅耳並沒有被遺忘, 他的名字被永遠刻在巴黎鐵塔上, 被列爲到 19 世紀爲止 72 位法國知名人士的名字之中, 以此來銘記他們做出的貢獻。

定理 1.1. (Fresnel **積分**):

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx=\int_0^\infty \cos(x^2)dx-i\int_0^\infty \sin(x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}-i\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \tag{1.1}$$

或者取實部與虛部

$$\begin{aligned} I_c &\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty \cos(x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}},\\ I_s &\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^\infty \sin(x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

這是菲涅耳 (Fresnel) 在研究光的衍射 (diffraction) 問題所提出的一個積分, 後來由數學家 Siméon Denis Poisson (1781～1840) 給出完美的解答。Fresnel 積分最初用於計算光線在不透明物體周圍彎曲之環境中的電磁場強度。正如光, Fresnel 積分也有二象性 (duality): 由 (1.1) 複數的形式是高斯積分, 但是 (1.2) 實數的形式則是 Dirichlet 積分。這篇文章我們將針對這兩個角色做進一步的論述。

2. deMoivre 公式的觀點

Fresnel 積分 (1.1) 是複數形式的高斯積分, 因此解決之道自然從高斯積分著手

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \qquad \lambda>0. \tag{2.1}$$

在此我們將進行非典型的論證。第一步: 不管 λ 之限制, 令 $\lambda=i$ 則由 (2.1) 得

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx=\frac{1}{\sqrt{i}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{i^{1/2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.2}$$

第二步: 將虛數 i 刻意寫爲 $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ 並藉由 (非典型) deMoivre 公式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{i}}=\frac{1}{i^{1/2}}&=\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})^{1/2}}\\&=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=e^{-\frac{\pi i}{4}}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

所以 (2.2) 可以改寫爲

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ix^2}dx&=\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}-i\sqrt{\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

這正是定理 1.1 (Fresnel 積分)。我們可以說 Fresnel 積分是旋轉了 45 度的高斯積分。這樣的論證並不嚴格, 但並不減損我們對 Fresnel 積分的理解, 但我們仍須釐清複數的變數變換與 (非典型) deMoivre 公式的意義。(2.4) Fresnel積分嚴格地推導如下: 首先 (2.2) 可以藉由乘上一個高斯函數 $e^{-\epsilon x^2}$ 而後再利用積分的極限定理得

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}dx=\lim_{\epsilon\to0}\int_0^\infty e^{-\epsilon x^2}e^{-ix^2}dx=\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{\epsilon+i}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=e^{-\frac{\pi i}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\tag{2.5}$$

註解:

(i) 正式提出 (2.5) 這方法是匈牙利數學家 (同時也是泛函分析創始人之一) Frigyes Riesz (1880∼1956), 但更早之前 Karl Weierstrass (1815∼1897) 利用熱傳導方程的解證明他著名的 Weierstrass 逼近定理時就已經隱含在裡面。其實我們還可以推得更早, 在 Fourier 探討 Fourier 級數收斂性問題時就必須面對這些核 (包含 Dirichlet kernel, Fejer kernel, Poisson kernel, 熱核 $\cdots$) 是否形成 Dirac δ 數列? 這些逼近定理是數學分析最核心的問題。

3. Laplace 變換之觀點

先考慮變數變換 $t=x^2$ 將 Fresnel 積分 (1.2) 轉換爲

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\cos(x^2)dx&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,\\\int_0^\infty\sin(x^2)dx&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.\end{aligned}\tag{3.1}$$

這個積分與著名的 Dirichlet 積分

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\tag{3.2}$$

非常相像, 所以除了高斯積分之外, Fresnel 積分另一個角色是帶根號的 Dirichlet 積分。與 Dirichlet 積分相同, 計算該積分的靈感仍然是將 (3.1) 中被積分函數的$\frac{1}{\sqrt{t}}$ 轉換爲積分, 以避免 $t=0$ 所產生的困難 (singularity)。仍然由高斯積分 (2.1) 著手將 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 寫爲

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}du. \tag{3.3}$$

換句話說$\frac{1}{\sqrt{t}}$可以表示爲高斯函數的平均。將 (3.1) 轉換爲雙重積分之後, 再根據 Fubini 定理變換積分順序

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos t e^{-tu^2}dudt\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos t e^{-tu^2}dtdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}du,\\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin t e^{-tu^2}dudt\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin t e^{-tu^2}dtdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}du.\end{aligned} \tag{3.4}$$

利用積分的技巧或複變的留數定理可得

$$\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}du=\int_0^\infty \frac{1}{1+u^4}du=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \tag{3.5}$$

所以得 Fresnel 積分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{8}},\\ \int_0^\infty \sin(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.4) 本質上就是 Laplace 變換。這裡我們刻意將積分值表示爲 $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$, 那是因爲我們考慮的正是 $\frac{1}{8}$ 的披薩, 在下一節利用複變的 Cauchy 定理計算此積分時我們會看得更清楚。如果認爲 (3.4)–(3.6) 不夠嚴謹, 我們可以考慮將 $e^{-\epsilon t}$ 乘到被積分函數上, 則重複 (3.4) 的推導過程可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-\epsilon t}dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\epsilon t}\sin t dt\int_0^\infty e^{-tu^2}du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+(\epsilon+u^2)^2}du,\end{aligned} \tag{3.7}$$

則由 (3.7) 取極限令 $\epsilon \to 0$, $e^{-\epsilon t} \to 1$ 可以回到 (3.4)

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^4} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

註解:

(i) 藉由 (3.1) 這個表現式, 遠比原來的 Fresnel 積分容易判斷這個瑕積分的收斂性。所謂瑕積分基本上不是《太胖 $(x \to \infty)$》就是《太高$(f(x) \to \infty)$》, 因此必須分開兩個區域;

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = I_1 + I_2\,. \tag{3.8}$$

先看 I_1, 因爲

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \sqrt{t}\, \frac{\sin t}{t} = 0,$$

$t=0$ 不會產生問題 (沒有太高的問題!) 所以 I_1 的收斂沒有問題。I_2 這個瑕積分我們可以視爲無窮級數

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \approx \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}. \tag{3.9}$$

而根據 Leibniz 的交錯級數 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, 所以這個積分收斂。同理如果考慮絕對值

$$I_3 = \int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| dt \approx \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}; \tag{3.10}$$

這是一個 p-級數, $p=\frac{1}{2}<1$ 所以發散。事實上與 Dirichlet 積分相同的處理方法可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| dt &= \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} dt \\ &\ge \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}} = \infty.\end{aligned}$$

除了 Dirichlet 積分之外, Fresnel 積分提供了另一個是 Riemann 可積卻不是 Lebesgue 可積 (絕對可積) 的例子。

(ii) 另外也可以利用量綱分析 (Dimensional Analysis) 來判斷這個瑕積分的收斂性。首先考慮《太高》的情形, $[t] \to 0$: 因爲 $\frac{\sin t}{t} \approx 1$, I_1之量綱爲

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t}} \frac{\sin t}{t} dt \approx [t]^{\frac{3}{2}} \to 0, \qquad [t] \to 0\,.$$

或者也可以這麼看, 當 t 很小的時候 $\sin t$ 並不是無量綱 (dimensionless) 而是 $\sin t \approx t, 0 < t \ll 1$

$$I_1 \approx \frac{[t]}{[t]^{\frac{1}{2}}}[t] = [t]^{\frac{3}{2}} \to 0, \qquad [t] \to 0\,.$$

其次考慮《太胖》的情形, $[t] \to \infty$: 此時 $\sin t$ 也不是無量綱, 類比無窮級數我們是把它視為交錯級數的 $(-1)^n$, 一正一負彼此抵消。實際上當 $t \to \infty$ 時應該將 $\sin t dt$ 視為無量綱 $[\sin t dt] = 1$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \approx \frac{1}{[t]^{\frac{1}{2}}} \to 0, \qquad [t] \to \infty\,.$$

(iii) (3.7) 乘 $e^{-\epsilon t}$ 這個動作是有意義的。這是著名的 Abel 定理, 是處理積分極限的方法之一。有興趣的讀者可參考 [8]。 □

(3.3) 或 (3.7) 告訴我們利用雙重積分計算這個積分的內在本質是 Laplace 變換。定義

$$\begin{cases} F(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos(x^2)dx, & F_0 = F(0) = \displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx, \\ G(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}\sin(x^2)dx, & G_0 = G(0) = \displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx, \end{cases} \tag{3.11}$$

或者做個變數變換比較清楚 ($\xi = x^2$)

$$\begin{cases} F(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-t\xi}\frac{\cos\xi}{\sqrt{\xi}}d\xi, \\ G(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty e^{-t\xi}\frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi}}d\xi. \end{cases} \tag{3.12}$$

首先我們證明 G_0 是一個非負的交錯級數。根據 $\sin(x^2)$ 的特色將積分範圍分解為

$$n\pi \le x^2 \le (n+1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{n\pi} \le x \le \sqrt{(n+1)\pi}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

所以 G_0 是一個無窮交錯級數

$$G_0 = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx.$$

其次考慮 $p=t^2+\pi, \frac{dp}{dt}<1$ 則

$$\begin{aligned}
-\int_{\sqrt{(2n+1)\pi}}^{\sqrt{(2n+2)\pi}} \sin(x^2)dx &= -\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin(t^2+\pi)\frac{dp}{dt}dt \\
&= \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin(t^2)\frac{dp}{dt}dt \\
&< \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin(t^2)dt,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

如此就證明了 $G_0>0$。與高斯積分相同的技巧將兩個積分相乘並轉換爲重積分, 而後利用極座標與分部積分可以證明 $F(t), G(t)$ 滿足底下兩個函數方程

$$\begin{aligned}
F(t)^2-G(t)^2 &= \Big(\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos(x^2)dx\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-ty^2}\cos(y^2)dy\Big) \\
&\quad -\Big(\int_0^\infty e^{-tx^2}\sin(x^2)dx\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-ty^2}\sin(y^2)dy\Big) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}\Big(\cos(x^2)\cos(y^2)-\sin(x^2)\sin(y^2)\Big)dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty re^{-tr^2}\cos(r^2)dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-t\xi}\cos\xi d\xi = \frac{\pi}{4}\frac{t}{1+t^2},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
2F(t)G(t) &= 2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2)\sin(y^2)dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}\Big(\sin(x^2)\cos(y^2)+\cos(x^2)\sin(y^2)\Big)dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty re^{-tr^2}\sin r^2\,dr = \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

由 (3.14)–(3.15) 可推得 $F(t), G(t)$ 滿足二次方程式, 所以可以表示爲

$$F(t)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{1+t^2}}, \qquad G(t)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}}. \tag{3.16}$$

再令 $t \to 0$ 得 Fresnel 積分

$$F_0 = \lim_{t\to 0} F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \qquad G_0 = \lim_{t\to 0} G(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \qquad \square$$

註解:

(i) 就算得不到 $F(t), G(t)$ 的精確解 (3.16), 也可以令 $t \to 0$由 (3.14)–(3.15) 得 Fresnel 積分

$$F_0^2 - G_0^2 = 0, \quad 2F_0G_0 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad F_0 = G_0 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(ii) 讀者有興趣也可以重複 (3.4) 透過 Laplace 變換的計算得 (3.16)

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{(u^2+t)}{1+(u^2+t)^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{1+t^2}}, \\ G(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+(u^2+t)^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

(iii) 除了雙重積分 (函數方程或 Laplace 變換) 的看法之外, 我們也可以由微分方程的角度看 Fresnel 積分: 定義

$$\mathcal{C}(x) = \int_0^\infty \frac{\cos[x^2(1+y^2)]}{1+y^2}dy, \qquad \mathcal{S}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin[x^2(1+y^2)]}{1+y^2}dy. \tag{3.18}$$

利用正弦與餘弦函數的Taylor 展開式容易得

$$\mathcal{C}(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathcal{S}(0) = 0, \qquad \mathcal{C}(\infty) = \mathcal{S}(\infty) = 0. \tag{3.19}$$

(3.18) 對 x 微分得

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{C}}{dx} = -2\sin(x^2)I_c - 2\cos(x^2)I_s, \\ \dfrac{d\mathcal{S}}{dx} = 2\cos(x^2)I_c - 2\sin(x^2)I_s. \end{cases} \tag{3.20}$$

微分方程組 (3.20) 在 $(0,\infty)$ 上積分並利用條件 (3.19) 得到與 (3.14)–(3.15) 類似的函數方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\infty) - \mathcal{C}(0) &= -2I_c\int_0^\infty \sin(x^2)dx - 2I_s\int_0^\infty \cos(x^2)dx = -4I_cI_s = -\frac{\pi}{2}, \\ \mathcal{S}(\infty) - \mathcal{S}(0) &= 2I_c\int_0^\infty \cos(x^2)dx - 2I_s\int_0^\infty \sin(x^2)dx = I_c^2 - I_s^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

因此

$$I_cI_s = \frac{\pi}{8}, \quad I_c = I_s \quad \Longrightarrow \quad I_c = I_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(iv) 關於這節有興趣的讀者可參考 [4, 6, 9] 或者查詢 American Mathematical Monthly 上面的文章。

4. Γ 函數之觀點

Laplace 變換的內在本質是 Γ 函數, 所以第三節的討論可以完全移植到 Γ 函數。首先將 (3.3) 改寫爲

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu}u^{-\frac{1}{2}}du=\int_0^\infty \frac{e^{-tu}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}du, \qquad t>0. \tag{4.1}$$

可以將 Fresnel 積分轉換爲雙重積分之後, 再根據 Fubini 定理變換積分順序, 並藉由分部積分兩次得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos te^{-tu}u^{-\frac{1}{2}}dudt\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \cos te^{-tu}dt\right)du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du,\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin te^{-tu}u^{-\frac{1}{2}}dudt\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \sin te^{-tu}dt\right)du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}du.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由 (4.2)–(4.3) 最後的積分自然聯想到歐拉反射公式(Euler reflection formula) 或餘元公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, \qquad 0<\alpha<1. \tag{4.4}$$

令 $u^2=v$ 並利用 (4.4) 由 (4.2)–(4.3) 得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{v^{\frac{3}{4}-1}}{1+v}dv=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{4}-1}}{1+v}dv=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

由此可以再次得 Fresnel 積分 (3.6)。Γ-函數離不開 Beta 函數, 令 $u=\tan\theta$ 則

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi},\\ \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}du&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi},\end{aligned} \tag{4.6}$$

由此可以再次得證 (3.6)。

註解:

(i) 由 Γ 函數的定義容易判斷歐拉反射公式 (4.4) 中 α 的範圍

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) \quad &\Longrightarrow \quad \alpha > 0,\\ \Gamma(1-\alpha) \quad &\Longrightarrow \quad \alpha < 1.\end{aligned}$$

但這是事後孔明的看法, 更自然且合理是根據 (4.4) 的瑕積分來判斷。一如既往將瑕積分拆解爲兩部分

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx + \int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2,$$

仍然藉由量綱分析

$$\begin{aligned}&[I_1] = [x]^{\alpha-1}[dx] = [x]^\alpha, \qquad [x] \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha > 0,\\ &[I_2] = \frac{[x]^{\alpha-1}}{[x]}[dx] = [x]^{\alpha-1}, \quad [x] \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha - 1 < 0.\end{aligned}$$

(ii) 歐拉反射公式 (4.4) 內在深刻的意義是與正弦函數之聯繫。兩個 Γ 函數其變數分別是 x 與 $1-x$, 正好是反射關係彼此相乘是正弦函數之倒數。令

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x, \tag{4.7}$$

首先證明 $\varphi(x)$ 是一個週期函數之後推論 $\varphi(x)$ 是一個常數, 從而得出 (4.4)。有興趣的讀者可以詳細研讀 Artin 的名著 [1] 或林義雄與林紹雄; 理論分析(下) [10]。 □

Fresnel 積分中的 x^2 可以推廣爲 $x^k, k > 1$。

定理4.1: (**廣義** Fresnel **積分**) 已知 $k > 1$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(x^k)dx &= \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{k}}}dy = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\sin\frac{\pi}{2k},\\ \int_0^\infty \cos(x^k)dx &= \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{\cos y}{y^{1-\frac{1}{k}}}dy = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\cos\frac{\pi}{2k}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

由 (4.8) 的表現式可知廣義 Fresnel 積分實際上就是廣義 Dirichlet 積分。關於廣義 Dirichlet 積分及其量綱分析討論 k 的範圍讀者有興趣可參考 [14, 15]。

5. 複變積分 — 如何化虛為實

大部分複變函數的教科書都是將 Fresnel 積分當成一個習題來對待, 我個人認爲這對於 Fresnel 積分有失公平。有學生學複變時問老師爲何區域取的是 $\frac{1}{8}$ 的圓? 任課老師的回答是《經驗》! 這個回答等於沒有回答, 但至少還是誠實沒有胡說八道故意裝神弄鬼繞圈子。後來學生特別來問我這個問題, 解惑之後我個人體會到其本質是《化虛爲實》, 這正是我寫這篇文章的主要動機。

Fresnel 積分的出發點是高斯積分, 因此自然是考慮高斯函數 e^{-x^2} 及其在複數 $\mathbb{C}$ 的推廣

$$f(z)=e^{-z^2},\qquad z=x+iy. \tag{5.1}$$

現在沿著 $\frac{1}{8}$ 的披薩 (pizza)

$$\Omega=\left\{z=re^{i\theta};\quad 0\le r\le R,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\} \tag{5.2}$$

之邊界 $\partial\Omega=\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$;

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\{z=x:0\le x\le R\},\\ \gamma_2&=\{z=Re^{i\theta}:0\le\theta\le\pi/4\},\\ \gamma_3&=\{z=re^{i\frac{\pi}{4}}:0\le r\le R\},\end{aligned} \tag{5.3}$$

做複變積分(線積分), 因爲 $f(z)$ 是 Ω 上的一解析函數根據 Cauchy 定理

$$0=\oint_\gamma e^{-z^2}dz=\int_{\gamma_1}e^{-z^2}dz+\int_{\gamma_2}e^{-z^2}dz+\int_{\gamma_3}e^{-z^2}dz, \tag{5.4}$$

三個邊界分別討論。γ_1 的線積分是高斯積分

$$\int_{\gamma_1}e^{-z^2}dz=\int_0^R e^{-x^2}dx\to\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad R\to\infty, \tag{5.5}$$

利用 Jordan Lemma (或直接計算) γ_2 的線積分會趨近於 0

$$\int_{\gamma_2}e^{-z^2}dz=\int_0^{\pi/4}e^{-(Re^{i\theta})^2}Re^{i\theta}id\theta\approx e^{-R^2}R\to 0,\qquad R\to\infty, \tag{5.6}$$

利用參數式 $(z=re^{i\frac{\pi}{4}}=r(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))$ 直接計算 γ_3 的線積分

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3}e^{-z^2}dz&=\int_R^0 e^{-r^2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}e^{i\pi/4}dr\\ &=-e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-ir^2}dr\\ &\to -e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-ir^2}dr,\qquad R\to\infty.\end{aligned} \tag{5.7}$$

在 (5.7) 這個步驟我們看出來爲何取 $\frac{1}{8}$ 披薩的緣由, 將 z^2 視爲一變換除了將 r 變換爲 r^2 之外, 最重要是將角度 θ 變換爲 2θ。所以它把 γ_3 這個 45 度的邊, 轉換到 90 度的 y-軸, 如此就得到單純的 e^{-ir^2} (化實爲虛!)

$$e^{-z^2} = e^{-r^2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})} = e^{-ir^2}.$$

將 (5.5)–(5.7) 合併得

$$\int_0^\infty e^{-ir^2}dr = e^{-i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.8}$$

(5.8) 分別取實部與虛部

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

這就是藉由複變函數的 Cauchy 定理給予 Fresnel 積分的嚴格證明。 □

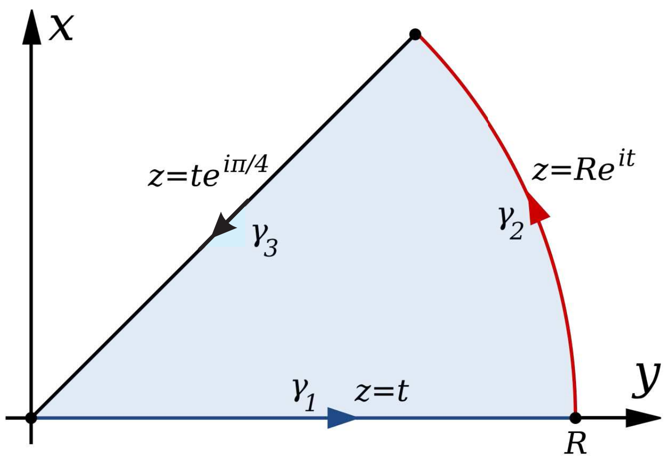

圖 2: Contour of Fresnel integral.

註解:

(i) (5.1) 的解析函數 $f(z)$ 之選取並沒有唯一。可以考慮

$$f(z) = e^{iz^2},$$

則重複原來的計算也可以得 Fresnel 積分, 本質上沒有變化差別的是將兩個邊界 γ_1 與 γ_3 的角色互換, 本來是《化虛爲實》, 現在則是《化實爲虛》而已。

(ii) Cauchy 定理以及留數定理除了計算積分之外, 真正的數學本質是告訴我們複數的變數變換是合理的, 此時不僅僅是直線, 甚至平面上任意的連續單純曲線都是可以的。

(iii) 無論是雙重積分或複變積分 Fresnel 積分都是二維的產物, 如此我們才能對它有本質上的理解。

6. Schrödinger 方程的基本解

高斯積分與熱傳導方程有關, 同樣 Fresnel 積分則與 Schrödinger 方程有關聯

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad u_t = i u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ &\text{(I.C.)} \quad u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

處理全空間的問題最好的方法是 Fourier 變換

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\xi) &= \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx, \\ \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) &= f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{6.2}$$

此時可以將 Fourier 變換作用到 Schrödinger 方程 (6.1) 得常微分方程 (ODE)

$$\partial_t \widehat{u} = -i\xi^2 \widehat{u}, \qquad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi), \tag{6.3}$$

其中

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ix\xi} dx. \tag{6.4}$$

一階常微分方程 (6.3) 的解最好是表示爲算子的形式

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-it\xi^2} \widehat{f}(\xi) = e^{-it\xi^2} \mathcal{F}[f], \tag{6.5}$$

再取 Fourier 反變換得

$$u(x,t) = e^{it\partial_{xx}} f(x) = \mathcal{F}^{-1} e^{-it\xi^2} \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1} e^{-it\xi^2} \mathcal{F}[f]. \tag{6.6}$$

由 (6.6) 我們可以藉由 Fourier 變換定義 Schrödinger 半群 (Schrödinger semigroup)

$$e^{it\partial_{xx}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1} e^{-it\xi^2} \mathcal{F}. \tag{6.7}$$

根據類比法, Schrödinger 方程 (6.1) 的解可以藉由熱傳導方程來理解:

$$\begin{aligned} &\text{(D.E.)} \quad u_t = u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ &\text{(I.C.)} \quad u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$u(x,t)=e^{t\partial_{xx}}f(x)=(f*G_t)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)f(y)dy, \tag{6.9}$$

其中 $G_t(x)=G(x,t)$ 是熱核 (heat kernel) 或 Gauss-Weierstrass 核

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big),\qquad x\in\mathbb{R},\quad t\geq 0. \tag{6.10}$$

如果引進 Heaviside 函數

$$H(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0,\end{cases} \tag{6.11}$$

可以得全時空 (whole space-time) 的熱核

$$G(x,t)=\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{6.12}$$

根據卷積 (convolution) 的定義, 若取初始條件爲 Dirac-delta 函數, $f(x)=\delta(x)$, 則由 (6.9) 與 $\delta(x)$ 是卷積的單位元素的性質得

$$u(x,t)=e^{t\partial_{xx}}\delta(x)=(G_t*\delta)(x)=G_t(x)=G(x,t). \tag{6.13}$$

(6.13) 除了說明熱核是熱傳導方程的基本解 (fundamental solution)

$$\partial_t G(x,t)=\partial_{xx}G(x,t),\qquad G(x,0)=\delta(x) \tag{6.14}$$

之外, 也告訴我們當 $t=0$ 時在空間某一點 x 放置一單位熱能 $\delta(x)$ 時, 熱核 $G(x,t)$ 表示此後溫度的變化過程, 所以全空間上的熱核是隨時間變化的高斯函數。

一般熟悉的熱傳導方程基本解的定義是

$$\partial_t G(x,t)-\partial_{xx}G(x,t)=\delta(x,t)=\delta(x)\delta(t). \tag{6.15}$$

(6.14), (6.15) 這兩個基本解的定義是等價的, 差別是非齊次項 $\delta(x,t)$ 轉換爲初始值 $\delta(x)$, 這就是 Duhamel 原理 (Duhamel principle)。將 Fourier 變換作用到 (6.15), 於是熱傳導方程基本解的問題就轉換爲常微分方程基本解的問題

$$\partial_t\widehat{G}+|\xi|^2\widehat{G}=\delta(t). \tag{6.16}$$

一階微分方程只有一件事就是積分因子 (integrating factor): $\mu(t)=e^{t|\xi|^2}$,

$$\partial_t\big(e^{t|\xi|^2}\widehat{G}\big)=e^{t|\xi|^2}\delta(t)=\delta(t)\quad\Longrightarrow\quad \widehat{G}(\xi,t)=e^{-t|\xi|^2}H(t). \tag{6.17}$$

這裡我們需要廣義函數的微分: $H'(t)=\delta(t)$。取 Fourier 反變換可再次得 (6.12)。

我們回到 Schödinger 方程 (6.1), 但心裡想的是熱核, 第一步是將 it 變換爲 $\epsilon+it, \epsilon>0$, 所以 (6.9) 延拓到複數成爲

$$e^{(\epsilon+it)\partial_{xx}}f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,\epsilon+it)f(y)dy. \tag{6.18}$$

而 (6.12) 則成爲

$$G(x,\epsilon+it)=\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi(\epsilon+it)}}\exp\bigg(-\frac{x^2}{4(\epsilon+it)}\bigg). \tag{6.19}$$

如果初始值 f 滿足適當條件 (平方可積分, $f\in L^2(\mathbb{R})$), 利用熱半群 (heat semigroup) 的有界性可以證明

$$\begin{aligned}e^{it\partial_{xx}}f(x)&=\lim_{\epsilon\to 0}e^{(\epsilon+it)\partial_{xx}}f(x)\\&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)G(y,\epsilon+it)dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)K(y,t)dy,\end{aligned} \tag{6.20}$$

其中

$$K(x,t)=G(x,it)=G_{it}(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}e^{-\frac{x^2}{4it}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(0+it)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4it}}. \tag{6.21}$$

可以模仿第二節的討論利用 deMoivre 公式得

$$(0+it)^{-\frac{1}{2}}=\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon+it)^{-\frac{1}{2}}=\begin{cases}e^{-\frac{\pi i}{4}}|t|^{-\frac{1}{2}}, & t>0,\\ e^{\frac{\pi i}{4}}|t|^{-\frac{1}{2}}, & t<0.\end{cases}$$

所以 Schrödinger 方程的基本解爲

$$K(x,t)=G(x,it)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{\pi i}{4}}e^{-\frac{x^2}{4it}}, \qquad t>0. \tag{6.22}$$

透過將實的時間 (real time) 轉換爲虛的時間 (imaginary time) 可以由熱核得 Schrödinger 方程的基本解。

例題6.1: (**方形波**) 試解 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned}&(\text{D.E.})\quad u_t=iu_{xx}, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty),\\&(\text{I.C.})\quad u(x,0)=\chi_{(a,b)}(x), \qquad x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

這裡 $\chi_{(a,b)}(x)$ 是定義在 (a,b) 上的特徵函數

$$\chi_{(a,b)}(x)=\begin{cases}1, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b).\end{cases}$$

解: 根據 (6.20), (6.22) Schrödinger 方程的解爲

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\int_{x-b}^{x-a}e^{-\frac{y^2}{4it}}dy\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\int_{\frac{x-b}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4t}}}e^{i\xi^2}d\xi \qquad \left(\xi=\frac{y}{\sqrt{4t}}\right) \\ &=\mathrm{Fr}\Big(\frac{x-a}{\sqrt{4t}}\Big)-\mathrm{Fr}\Big(\frac{x-b}{\sqrt{4t}}\Big),\end{aligned}\tag{6.24}$$

其中 $\mathrm{Fr}(x)$ 是另一形式的 Fresnel 積分:

$$\mathrm{Fr}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\int_0^x e^{iy^2}dy.\tag{6.25}$$

□

註解:

(i) 這個結果最好與熱傳導方程做比較, 考慮相同的初始值問題

$$\begin{aligned}&\text{(D.E.)}\quad u_t=u_{xx}, && (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty),\\ &\text{(I.C.)}\quad u(x,0)=\chi_{(a,b)}(x), && x\in\mathbb{R}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

則由 (6.9)–(6.10) 得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{x-b}^{x-a}e^{-\frac{y^2}{4t}}dy\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-b}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4t}}}e^{-\xi^2}d\xi\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{erf}\Big(\frac{x-a}{\sqrt{4t}}\Big)-\frac{1}{2}\mathrm{erf}\Big(\frac{x-b}{\sqrt{4t}}\Big),\end{aligned}\tag{6.27}$$

其中 $\mathrm{erf}(x)$ 是誤差函數 (error function)

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy.\tag{6.28}$$

所以從高斯積分的角度而言 Fresnel 積分 $\mathrm{Fr}(x)$ 是複數形式的誤差函數。 □

誌謝:

謝謝陳宜良教授幫忙釐清沈美昌教授 (1931∼2013) 返台訪問中研院數學所的時間。我個人曾經聽過沈教授的演講, 但沒有宜良兄運氣那麼好可以聆聽沈美昌教授一整個學期《應用數學》這門課。另外也謝謝李志豪教授幫忙找到 [4, 6, 9] 這幾篇文章, 由於他的幫忙使得寫作變得輕省多了。

參考文獻

1. E. Artin, *The Gamma Function*, Dover Publications; Reprint edition (Jan. 28, 2015).
2. John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2nd Edition, GTM Vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978.
3. Richard Courant and Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, II, Springer-Verlag, New York, 1989.
4. H. Flanders, On the Fresnel integrals, *American Mathematical Monthly*, 89 (1982), 264-266.
5. O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2007.
6. I. E. Leonard, More on Fresnel integrals, *American Mathematical Monthly*, 95 (1988), 431-433.
7. C. C. Lin and L. A. Segel, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1988.
   中譯本: 自然科學中確定性問題的應用數學, 趙國英等譯, 科學出版社(中國), 2010。

   本書作者是著名華裔美籍應用數學家林家翹 (C. C. Lin) 及其 (MIT) 學生 L. A. Segel 的經典之著。任何一位號稱是應用數學家卻不知道這本書, 基本上他 (她) 的應用數學是不可信的。林家翹 (1916∼2013) 在加州理工學院師從流體力學大師 Theodore von Kármán(匈牙利裔美籍, 1881∼1963), 是國際著名的流體力學、應用數學權威及天文物理學家。我們可以說他是第一位華裔真正意義上的應用數學家、坦白而言到目前爲止還沒有任何一位華裔應用數學家的學術地位超過他。

   這本書是大四 (1983) 修研究所的應用數學概論時李育嘉老師所列的參考書, 他特別摘錄第一章所列著名數學家關於應用數學的一些見解, 來告訴學生《*甚麼是應用數學*》, 這對於建立一個健康的數學觀是非常重要的。後來與陳宜良教授聊天時他告訴我更早之前 (1977) 沈美昌教授應國科會之邀返台講學研究 (時任教美國 University of Wisconsin 數學系) 在中研院講課就是用這本書, 此時離本書初版 1974 僅僅三年! 所以按事實而言沈美昌教授是將這本重要應用數學的書引進台灣的第一人。

   真正的大師一定有極高的人文素養, 如果有人想知道應用數學是甚麼? 我個人會強烈建議看看這本書的第一章, 這會是豐盛的知識之饗宴。這本書的參考書也寫得很精采, 大部分的書都有簡短的介紹, 這幫助讀者更有效率且精確地查閱相關材料。另外作者強調應用數學的目的在於運用數學來闡明科學概念和描述科學現象, 並以此推動新數學的發展與利用數學來加深對科學的理解。作者還特別將應用數學分解爲三個過程:

   (i) 用數學語言表述科學問題;

(ii) 求解這些數學問題;
(iii) 用科學語言解釋上述求解的結果及其經驗驗證。

最後作者更鼓勵一個有抱負的應用數學家, 甚至應該比培養運算技巧更加刻苦地
『培養正確的判斷力!』

8. M. Taylor, *Introduction to Complex Analysis*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 202, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2019.
9. J. van Yzeren, Moivre's and Fresnel's integrals by simple integration, *American Mathematical Monthly*, 86 (1979), 691-693.
10. 林義雄與林紹雄。理論分析 (上、下), 正中書局, 1982.

 Γ-函數與 Beta 函數 (也稱爲 Euler 第二類與第一類積分) 是數學分析非常重要的成員, 但是在我們的教學中卻被忽略了, 這是非常可惜。這套書自從研究所開始就是我獲取分析知識最重要的養分來源, 理論分析 (下) 關於這兩個函數有非常完整的討論。要更深刻理解 Γ-函數那麼複變函數的知識是需要的, 有興趣的讀者可以好好讀一讀 John B. Conway [2] 或 M. Taylor [8] 的複變。

11. 惠更斯。光論 (*Treatise on Light*)。科學元典叢書, Vol. 7, 北京大學出版社 (中國), 2007。
12. 沈美昌。漫談應用數學 (附另篇演講錄)。數學傳播季刊, 2(1), 2-5, 1977。
13. 劉太平, 劉豐哲, 陳宜良。專訪劉太平院士。數學傳播季刊, 24(3), 57-62, 2000。
14. 林琦焜。歷史轉折點的函數。數學傳播季刊, 45(3), 33-54, 2021。
15. 林琦焜。Wallis 積分與無窮乘積。數學傳播季刊, 47(1), 20-41, 2023。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—