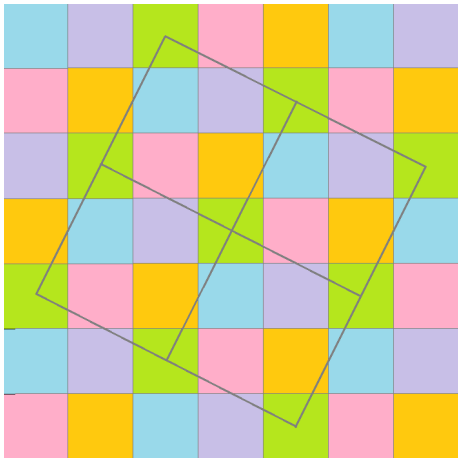
數學傳播　47卷3期, pp. 30-34

數字與方程式的對稱性
— Langlands 綱領

蔡政江

本文於2023年5月18日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及中研院訊同意本刊轉載。

在複雜的現代社會裡, 我們會在各種小地方與數字有關的小問題不期而遇。比如說, 我想要爲一款遊戲設計一個方格狀的棋盤, 裡面有五種顏色的方格:



上圖的設計有一些對稱性, 像是:

1. 讓盤面無限延伸的話, 每種顏色出現的頻率和方式都一樣。
2. 把同色的方格連起來, 也會形成一個正方格狀的結構。

讀者可以發現, 大的正方格面積是小方格的五倍。這是因爲我們有畢氏定理:

$$2^2 + 1^2 = 5$$

如果小方格的邊長與面積是 1, 那麼大方格的邊長是 $\sqrt{5}$, 面積是 5。這也說明了每種顏色佔據的比例是五分之一, 所以五種顏色正好填滿棋盤。這給了我們一個有趣的小觀察:

「同樣的設計, 對三種顏色或是六種顏色行不通, 因爲3和6不能寫成兩個整數的平方和。」

這就給了我們一個信手拈來的關於數字的小問題: 有哪些數字 (整數) 可以寫成另外兩個整數的平方之和呢? 比如說 $4 = 2^2 + 0^2$、$8 = 2^2 + 2^2$、$9 = 3^2 + 0^2$、$10 = 3^2 + 1^2$、$13 = 3^2 + 2^2$。

中間被我們跳過的 3, 6, 7, 11, 12 則不能寫成兩個整數的平方和。法國數學家吉哈 (Girard) 和費馬 (Fermat) 都曾提出過以下的觀察:

定理 A: 一個正整數 n 可以寫成兩個整數的平方和的條件如下: n 可以寫成一個平方數和一些質數的乘積, 使得這些質數都可以寫成兩個整數的平方和。

比如說, $45 = 3^2 \times 5$, 而我們也可以從 $5 = 2^2 + 1^2$ 推導出 $45 = 6^2 + 3^2$。反過來說 $12 = 2^2 \times 3$, 而 3 不能寫成兩個整數的平方和, 12 也不行。又比如 $15 = 3 \times 5$, 其中 3 不能寫成兩個整數的平方和, 於是 15 也不行 (儘管 5 可以)。一般來說, 哪些質數可以寫成兩個整數的平方和呢? 我們有:

定理 B: 一個質數 p 可以寫成兩個整數的平方和的條件是: p 除以 4 的餘數不等於 3。

好比像 $2 = 1^2 + 1^2$、$5 = 2^2 + 1^2$、$13 = 3^2 + 2^2$、$17 = 4^2 + 1^2$、$29 = 5^2 + 2^2$ 這些除以 4 的餘數都不是 3。至於 3, 7, 11, 19, 23 這些除以 4 餘 3 的質數, 就只能乾瞪眼了。

在我們看更多例子之前, 讓我們談談上面這兩個定理的原理。首先, 讓我們提煉一個在本文會一直若隱若現的哲學。

「關於整數的問題, 經常可以分解成關於每個可能的質 (因) 數的問題。」

有興趣閱讀完整定理 A, B 證明的讀者可以參考維基百科關於「費馬平方和定理」的條目 (英文條目“Fermat's theorem on sums of two squares”有比較多的內容)。通常在大學代數如果講到這個定理的話, 會從如下的引理出發 (詳見英文條目裡 Dedekind 的第二個證明):

引理 C: 對於一個質數 p, 存在整數 n 使得 $n^2 + 1$ 是 p 的倍數的條件等同於定理 B 的條件, 也就是 p 除以 4 的餘數不等於 3。

前面定理 A、B 和引理 C 都是數學家所研究的對稱性。說得哲學一些是:

「用一種方式表述的結構 (好比一個 $\star$ 符號、或是能寫成兩平方和的質數), 在另一種操作底下 (旋轉 72 度、或是除以 4 取餘數) 保持不變。」

在數論 (研究整數的數學) 中, 有一系列像前述這樣子, 相當奇特的對稱性。讓我們看看更多例子。比如說, 引理 C 的高次方變體是:

定理 D: 對於任意兩個相異質數 p 和 q。以下兩個條件等價:

I. 存在整數 n 使得 $n^{p-2} + n^{p-3} + \cdots + 1$ 是 q 的倍數。

II. q 除以 p 的餘數是 1。

接下來這個例子更神奇了。考慮無窮級數

$$\begin{aligned} h(u) &= u\prod_{n\geq 1}(1-u^n)(1-u^{23n}) \\ &= u(1-u)(1-u^2)\cdots(1-u^{22})(1-u^{23})^2(1-u^{24})\cdots(1-u^{45})(1-u^{46})^2\cdots \\ &= u-u^2-u^3+u^6+u^8-u^{13}-u^{16}+u^{23}-u^{24}+u^{25}+u^{26}+u^{27}-u^{29} \\ &\quad -u^{31}+u^{39}-u^{41}-u^{46}-u^{47}+u^{48}+u^{49}-u^{50}-u^{54}+u^{58}+2u^{59}+\cdots \end{aligned}$$

(喜歡計算的讀者, 可以享受一下把上一行乘起來得到下一行的過程。)

定理 E: 對於質數 p, 以下兩個條件等價;

I. 存在整數 n 使得 n^3-n-1 是 p 的倍數。

II. 在無窮級數 $h(u)$ 裡, u^p 的係數非正。(這時它們的係數一定是 -1。)

比如說, 在上面的級數中, 對於 $p=2,3,13,29$ 等質數, u^p 的的係數是 -1。其他係數不是 -1 的質數 (最常見的是 0, 第一個正係數的質數次方是 u^{23}, 再來是 $2u^{59}$) 像是 $p=5,7,11$ 等, 就存在整數 n 使得 n^3-n-1 是 p 的倍數, 比如 $2^3-2-1=5$ 是 5 的倍數, $5^3-5-1=119$ 是 7 的倍數等等。

讓我們再瞪著上面的級數看幾眼, 它有幾個令人想吐槽的問題。好比說, 爲什麼要有 u 的 23 次方呢? 23 這個神奇數字是 x^3-x-1 這個三次多項式的判別式。但更令人抓狂的是 $\cdots$ 好吧, 就算有 23 好了, 那爲什麼是上面這個神祕的無窮級數呢?

再看一次這個無窮級數:

$$\begin{aligned} h(u) &= u\prod_{n\geq 1}(1-u^n)(1-u^{23n}) \\ &= u-u^2-u^3+u^6+u^8-u^{13}-u^{16}+u^{23}-u^{24}+u^{25}+u^{26}+u^{27}-u^{29}\cdots \end{aligned}$$

它有一系列美妙的性質。比如說,

I. 每當 a,b 是兩個互質的正整數, 在無窮級數 $h(u)$ 裡我們都會有

$$u^{ab}\text{的係數} = u^a\text{的係數}\times u^b\text{的係數。}$$

例如

- u^2 和 u^3 的係數都是 -1, 而 u^6 的係數果然是 $-1\times -1=1$。
- u^4 的係數是 0, 對所有奇數 k, u^{4k} 的係數 (例如 u^{12},u^{20},u^{28}) 都是 0。
- u^3 的係數是 -1, u^8 的係數是 1, 而 u^{24} 的係數果然是 $-1\times 1=-1$。

順帶一提, 我們的無窮級數若是沒有乘上 $(1-u^{23n})$ 的項, 那麼 u^{24} 的係數就會不一樣, 這個特別的性質也就不會成立了。

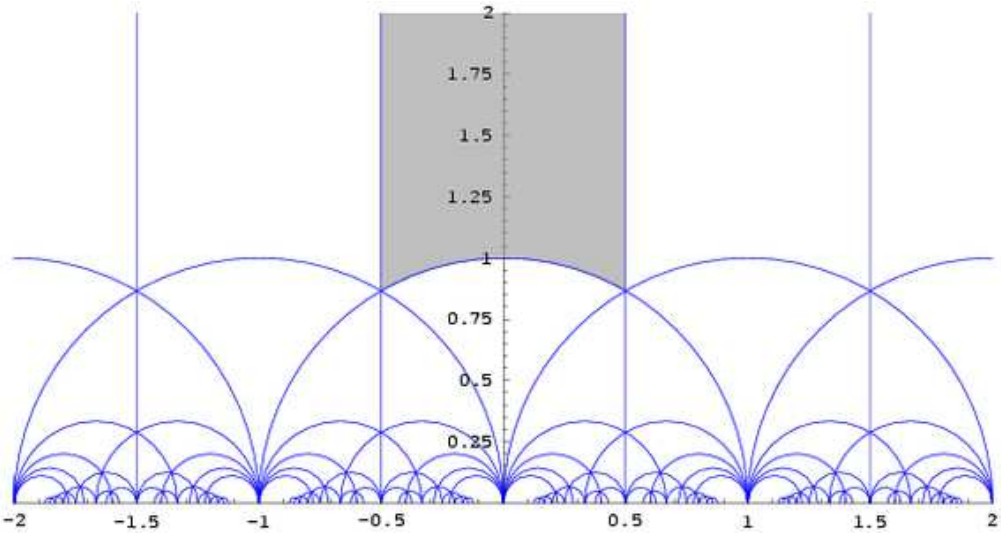
II. 上面那些係數是 -1 的質數 $(p = 2, 3, 13, 29)$ 等等都可以寫成 $2x^2 + xy + 3y^2$ 的樣子, 其中 x, y 是整數。

例如 $13 = 2\times 2^2 + 2\times(+1) + 3\times(+1)^2$。這裡 $2x^2 + xy + 3y^2$ 的判別式也是 $1^2 - 4\times 2\times 3 = -23$ (我們的 23 又出現啦!)。總之, 這個無窮級數還有幾個這樣的特性。其中最厲害也最神祕的特性, 需要考慮將 u 帶入複數的值。讓我們對無窮級數 $h(u)$ 帶入 $u = e^{2\pi iz}$, 其中 z 是任何虛部大於 0 的複數。讓我們寫做 $f(z) = h(e^{2\pi iz})$。由於複數指數函數 $e^{2\pi iz}$ 的性質, 我們有:

(a) 在 z 的虛部大於 0 時, $|u| < 1$, 從此可以證明無窮級數收斂。

(b) 由於 $e^{2\pi i(z+1)} = e^{2\pi iz}$, 我們有 $f(z+1) = f(z)$。

不只如此, 我們有:



(僅爲示意圖; 上圖是沒有考慮 23 的情況。23 這個數字有點大, 我不會畫。)

定理 F: 函數 $f(z) = h(e^{2\pi iz})$ 滿足方程式:

$$f\Big(\frac{z}{23z+1}\Big) = (23z+1)f(z).$$

定理 F 完整的描述是:

定理 G: 對於任意整數 a, b, c, d 滿足 $ad - bc = 1$, 且 23 整除 c 和 $d - 1$, 我們有:

$$f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (cz+d)f(z).$$

(定理 F 是定理 G 在 $a = d = 1$, $b = 0$, $c = 23$ 時的特例。)

滿足定理 G 的函數稱爲一個模形式 (modular form)。模形式有高度的對稱性。把關於

變數 z 的對稱性畫出來, 大概像這樣:

現在我們可以跟大家分享標題裡的 Langlands 綱領是什麼。這是數論近年來最重要的領域之一。你可以說 Langlands 綱領是一套哲學, 它表述的是:

「每個多項式整數方程式, 都對應到某個定理 G 這樣有極大對稱性的函數。」

上面這句話有很多模糊之處, 比如「對應」到底是誰對應誰, 以及怎樣算是「有極大對稱性的函數」; 這些都有具體的陳述, 但筆者沒有能力在幾千字的篇幅解釋。在比較簡單的情況, 好比定理 B 和定理 D。我們的「函數」非常直接 (除以 4 取餘數, 或是除以 p 取餘數)。定理 E 的函數$f(z) = h(e^{2\pi iz})$則相當複雜。另一方面,「多項式整數方程式」的解的概念可以做相當的推廣。這需要用到抽象代數裡面「域擴張」(field extension) 和「伽羅瓦群」(Galois group) 的概念。

在 Langlands 綱領的研究裡, 數十年來許多數學家累積起來的結果讓上面的句子不只是哲學, 而是像本文的各個定理, 是具體可以驗證的結果。好比說, 讀者可能聽說過費馬最後定理:

「對於正整數 $n \geq 3$, 方程式 $a^n + b^n = c^n$ 不存在正整數解。」

這個在 1995 年由 Wiles 以及他的合作者 Taylor 完成證明的定理, 其證明正仰賴 Langlands 綱領的一個特別的情形。雖然這個證明有數百頁艱難的過程, 我們可以用 Langlands 綱領的哲學來做個簡單的總結:

1. 首先將費馬最後定理化約到 $n = p \geq 3$ 是個質數, 並且 a, b, c 互質的情形。
2. 假設方程式有正整數解, 則我們可以考慮另一個方程式 (Frey curve):

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$$

這個方程式的性質是等號右邊的三個一次項 $x, x - a^p$ 和 $x + b^p$ 之間兩兩的差是 a^p, b^p 和 c^p, 是三個互質而且各自有高度重複質因數的數字。接下來是真正困難的部分:

3. Wiles 和 Taylor 證明了此時的 Langlands 綱領: 上述方程式對應到一個類似定理 G 的模形式。
4. 由 Ribet 在 1986 年證明的一個重要結果, 我們可以把這個模形式化約到另一類更簡單的模形式。後者這類簡單的模形式只有有限多個, 可以被一一列舉, 從而檢查沒有一個可以是步驟 3 的模形式化約的結果。因此不可能有 $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$ 這樣的方程式。

讓我們給幾句結語: 現代的數學非常困難, 往往在小地方就充滿了幾個禮拜也難以解釋的現象與細節。但數學的美妙之處之一是數學研究往往蘊含有富有解釋性的哲學 (例如 Langlands 綱領), 這些哲學可以用很精確的方式, 來解釋一些具體的問題 (例如費馬最後定理、或者設計遊戲的棋盤)。而我們數學家的工作, 正是去找到這樣的哲學/理論、並且給出具體的解釋/定理。

—本文作者任職於中央研究院數學所—