數學傳播　47卷3期, pp. 3-29

世界各地古代的數學

莫宗堅 · 黃　蘋

人類的文明史始於兩河流域, 人類的數學史也始於兩河流域。本文將討論兩河流域、埃及、印度、希臘、伊朗及中國的數學古史。在敍述各文明圈的數學史之前, 我們會介紹一下該文明圈的簡史, 給讀者大致的歷史背景, 避免在虛空中說事。

我們對各文明圈的數學之探討, 集中在數位系統和一些重要的數字如圓周率 π、2 的平方根 $\sqrt{2}$ 等, 以及重要的畢氏定理的知識與證明。希臘人畢達哥拉斯 (西元前 580 年, 早於孔子) 首先發明了畢氏定理, 他被公認爲世界上第一位重要的數學家。令直角三角形的兩矩長分別爲 a, b, 弦長爲 c, 則畢氏定理有 $a^2+b^2=c^2$。應用畢氏定理於邊長爲 1 的正方形, 我們得出其對角線的長度爲 $\sqrt{2}$。可見, $\sqrt{2}$ 是一個自然出現的數。$\sqrt{2}$ 的數值很有意義, 近代的古建築學家梁思成和林徽因認爲古代中國用 $\sqrt{2}$ 於建築。類似的, 古希臘有「黃金分割數」Golden mean。令 $a>b>0$, 如果 $a/b=(a+b)/a$, 則兩數的比 a/b 被稱爲黃金分割數, 約等於 1.618。古希臘人在建築上常用到它, 認爲此數呈現了一種數學的美。譬如窗子的高度爲 $a+b$, 寬度爲 a, 規定 $(a+b)/a$ 等於黃金分割數。除了數位系統和重要的數字以及畢氏定理, 我們還探討方程式的解法、面積與體積的公式等, 以及數學的內部問題。

一、兩河流域

人類古史始於西元前 6000 或 5000 年 (距今 8000 或 7000年) 的兩河流域 Mesopotamia。按照《聖經·舊約》和古希臘文獻及近代考古研究, 兩河流域的南端是一塊水草豐沛、百獸繁衍的福地, 但也時有洪水濤天之禍。在這福地, 人類得以聚集力量; 又因爲災難, 人類必須克服困難。人類最初的文明孕育在這福禍並存之地, 是由一群有創造力的人建立的 (這些人可能是移民與原居民混血的後人)。西元前 5500 年, 這裡的人發明了象形文字。西元前 3400 年, 兩河流域人改用音節文字 logo-syllabic 的楔形文字 Cuneiform; 人們把楔形文字寫在軟泥上, 經過日曬或火燒成爲硬版, 千年不壞。西元前 5400 年, 兩河流域人建築了 Eridu 城。西元前 4500 年, 他們又建築了 Uruk 城。從此, 在廣闊的兩河流域的下游平原上, 出現了星星點點的城郭, 如 Nippur, Lagash, Kish 以及 Ur。西元前 3200 年, 這裡的人開始了青銅時期。至此, 兩河流域的人擁有文字、城郭和青銅, 形成了人類的第一個文明。

談到文字系統, 人類至少有過七次創造: (1) 西元前 5500 年, 兩河流域的象形文字 Sumerian script (部分可讀), (2) 之後他們創造的楔形文字 Cuneiform (可讀), (3) 西元前 3200 年, 埃及的象形文字 Hierographia (意爲神語。可讀), (4) 西元前 3500 ∼ 前 2800 年, 伊朗的原始埃蘭時期的象形文字 Proto-Elamites tablets (部分可讀), (5) 西元前 3000 年, 已進入青銅時代的印度河流域, 有數千字的象形文字 Harappan script (未解), (6) 西元前 1300 年, 晚商的好幾千字的象形甲骨文 (可讀), (7) 西元前九 ∼ 前六世紀, 美洲墨西哥的印第安文明的文字系統 Maya glyphs (可讀)。而以下這些, 則不被列入人類的七次文字創造: 譬如, 有些零散的符號, 可能是裝飾符號而不是文字; 有些非原創的文字, 例如人類首次用的字母文字, 是居住在埃及附近的地中海岸的腓尼基人 Phoenician, 在西元前十一世紀用埃及的象形文字製作的; 又如日文的音節文字之片假名及平假名, 也是利用中國的象形文字製作的。據史學家張光直的見解, 兩河流域的數千年爭戰, 大部分是「閃族」的內爭, 就像中國商、周之間的爭戰一樣。所謂閃族 Semitism, 指的是《舊約·創世紀》中諾亞方舟之主角諾亞的兒子「閃」Shem 的子孫, 即兩河流域的人民。我們略過這些內爭不提。

西元前 609 年, 北部閃族的新亞速帝國 New Assyrian Empire 被伊朗族的米地帝國 Median Empire 與新巴比倫帝國所滅。新巴比倫帝國在《聖經·舊約》上被稱爲迦勒底帝國 Chaldean, 而迦勒底人原住兩河流域的南部。西元後, 亞速人改信基督教。他們在西元五世紀後, 信仰基督教之景教派 Nestorian, 於唐代初年傳景教於中國 (此事可見「大秦景教流行中國碑」的碑文)。

西元前 550 年, 居魯士大帝 Cyrus the Great 在伊朗創立了阿契亞美尼帝國 Achaemenid Empire, 信仰拜火教。在薛西斯一世 Xerxes I 時, 其帝國包括埃蘭、埃及、兩河流域 (這是兩河流域的閃族人第一次亡國)、伊朗、小亞細亞、印度河上流、中亞、希臘中部和北部及巴爾幹, 人口逾五千萬 (中國在以後的西元二世紀的東漢後期, 人口達五千萬), 是當時空前的大帝國。在西元前 331 年, 波斯帝國爲亞歷山大大帝 Alexander the Great 所滅。

亞歷山大大帝逝世於西元前 323 年, 以後塞琉古 Seleucid 王朝繼承了他的部分江山, 包括中東、伊朗及埃蘭。北面草原上的伊朗族中的安息人 Parthia (也稱 Arsacid, 故張騫譯爲「安息」) 逐步奪取伊朗與埃蘭。西元前 64 年, 塞琉古王朝在羅馬帝國和安息帝國夾擊下亡國, 之後兩帝國競逐於中東。後來伊朗的蘇珊帝國 Sasanid Empire 取代了安息帝國。西元七世紀時, 閃族的阿拉伯人的伊斯蘭教興起, 滅了蘇珊王朝, 致使中東受制於各伊斯蘭帝國。西元十三至十五世紀, 伊朗與中東的一部分, 又被蒙古人的伊兒汗國 Ilkhanate 及以後的帖木蘭 Tamerlane 汗國統治。西元十六至二十世紀, 伊朗與東羅馬帝國的繼承者奧圖曼帝國 Ottoman Empire 爭戰。西元 1918 年, 第一次世界大戰結束, 奧圖曼帝國敗亡, 遂改名土耳其。同時, 中東各國獨立。

現在我們來談兩河流域的數學史。

(1) 數字的標記法

原始人因爲計物而發現了自然數, 後來數目越來越大, 於是人們把要數的物品按照約定的數目成堆, 先計堆數, 再計堆剩的餘數。堆數多了, 又約定每若干堆放一起成爲大堆, 之後先計大堆, 再計小堆, 如此人類就發明了進位法。大約西元前 4000 年, 兩河流域的人發明了更高級的數字進位元法, 即個位數用十進位, 而十位數則用六進位, 然後每六十個又換成用十進位, 之後交替的用六進位與十進位。西元前 3000 年, 人們發明了六十進位的數位系統, 即把十進位與六進位組成六十進位, 但在六十進位之內, 仍保留十進位。直至今日, 時間的計量仍然沿用這個系統。不僅六十個單位可以合併成一個大單位, 一個單位也可劃分爲六十個小單位; 例如, 六十分鐘可算作一個小時, 而一分鐘也可分成六十秒。當我們說騎馬從 A 地到 B 地耗時 3 小時 25 分鐘 54 秒, 這裡的分鐘與秒各自是以十進位計量的。兩河流域的人在計量角度時, 把正三角形的內角稱作一個大單位角。我們知道它是 60 度, 這裡的度是一個小單位。因爲這個大單位角無甚用途, 久而久之就被人遺忘了。任取平面上的一點, 它的周圍可以緊密地排上六個正三角形的內角, 因此圓周角是 $6 \times 60 = 360$ 度。這種計算時間與計量角度的系統一直沿用到今天。另一方面, 中國古代觀察到一年爲 365 又 1/4 日, 規定圓周角爲 365 (1/4) 度。

這種數字標記法有下面的問題: 其一, 只有數位, 沒有單位的記號。例如, 古人計算羊數, 以十隻羊進位成小群, 以百隻羊進位成大群。若只寫下 1, 則不知是 1 隻, 還是 1 小群, 抑或是 1 大群。其二, 改變單位時, 同一數量會有不同的數字表示, 譬如, 六十進位法中的 1, 60, 60^2 容易混淆; 給一個數量, 用一種單位計算是 1, 用次小的單位計算是 60, 用更小的單位計算是 60^2, 就像 1 小時 = 60 分鐘 = 3600 秒。又譬如方程式 $5x = 2$ 的解, 可以是 $2/5$, 也可是 $(2/5) \times 60 = 24$, 即可以是 $2/5$ 小時, 也可是 24 分鐘。爲了解決這兩大問題, 埃及採用不同的數位來表示個位數、十位數、百位數等等, 給予它們不同的畫法。中國古代也有類似的辦法。最後, 印度創造的數位系統, 即今日世界通用的「 阿拉伯數字」, 才解決了以上的問題。

讓我們用現代的數學記號來討論古代數學, 例如用 3; 25, 54 來表達 3 小時 25 分鐘 54 秒。我們來討論一些重要的數字, 例如圓周率、2 的平方根 $\sqrt{2}$ 等。在兩河流域, 圓周率 π 的值採用 $25/8 = 3.125$。對於 2 的平方根 $\sqrt{2}$, 我們用剛才提到的記號來表達兩河流域的六十位元數目法:

$$1; 24, 51, 10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296\ldots$$

可見兩河流域使用的 2 之平方根的值, 與近代 $\sqrt{2}$ 的精確值 $1.41421356\ldots$, 僅差在小數點下第六位。

(2) 配方法

西元前 1900 年, 兩河流域的人就用配方法解一般的二次式: 把二次式 $x^2 + ax = b$ 改寫

成 $(x+a/2)^2=b+a^2/4$, 然後兩邊開平方根。三千年後在中國的宋、元時代, 數學家們還在爲「帶從開平方」(見《四元玉鑑》, 即解二次式) 而傷腦筋。

(3) 畢氏三陣列

西元前 1850 ～ 前 580 年, 兩河流域的人用楔形文字寫下了三十二個適合畢氏定理的三陣列 triads, 即 (a,b,c) 符合 $a^2+b^2=c^2$。其中有一組是數值很大的 $(12709,13500,18541)$, 不像是碰巧生成的。我們猜古人或是用下面的公式, 設 $p>q$, $(p^2-q^2)^2+(2pq)^2=(p^2+q^2)^2$ 得出三陣列 $(a,b,c)=(p^2-q^2,2pq,p^2+q^2)$。在這裡, 令 $p=125, q=54$, 即得出上面那個很大的三陣列 $(12709,13500,18541)$。令 $p=2$, $q=1$, 則得出 $(3,4,5)$。這表示兩河流域可能已經瞭解畢氏定理的真義, 並且有生成畢氏三陣列的公式。中國在西元一世紀的《周髀算經》裡也記載了畢氏定理, 特別是「故禹之所以治天下的 (3, 4, 5) 」。

二、埃及

根據岩畫, 西元前一萬年的埃及已有遊獵打魚的智人 Homo sapiens。西元前 8000 年, 由於氣候變化, 埃及大部分地區沙漠化。當地的人因此移入尼羅河流域, 開始從事農業。雖然埃及的古史可追溯到西元前 4000 年, 但其文明卻始於西元前 3150 年 (一個文明必須有城郭、文字及青銅。古史有文字即可, 故而早於文明)。其時, 埃及的第一王朝統一了上埃及和下埃及。上埃及指的是埃及南部, 即開羅之南 (尼羅河在開羅分流進入地中海), 直到阿斯旺 Aswan。埃及以農業爲主, 故各地皆有植物徽章。上埃及的植物徽章是蓮花 (世界上第一個顯花植物是蓮花, 最早的蓮花化石存於西班牙)。下埃及指的是埃及北部, 即開羅之北的尼羅河三角洲。下埃及的植物徽章是蘆葦。埃及文明是僅遲於兩河流域的人類文明。

埃及人失國在西元前六世紀, 當時波斯帝國侵佔了埃及。西元前四世紀, 亞歷山大大帝擊破波斯軍, 進入埃及並領有其地, 他過世之後成爲希臘人佔有的托勒密王朝。西元前 30 年, 羅馬帝國滅托勒密王朝, 統治埃及至西元 423 年。以後羅馬帝國分成東、西兩部分, 西元 423 ～ 641 年, 埃及屬於東羅馬帝國。到了西元 641 年, 埃及則屬於伊斯蘭帝國, 之後輾轉於不同的伊斯蘭帝國。十八世紀埃及成了英國的殖民地, 二十世紀埃及獨立。

埃及的古數學始於西元前 3000 年, 延續到西元前 300 年, 彼時亞歷山大大帝征服了埃及。埃及古數學記載在紙草紙 papyrus 上。這種紙的製作, 是用一種稱爲紙草或莎草的植物, 截取草莖並展開成片, 然後橫直黏在一起成爲平面 (傳說古埃及治健忘症之法, 就是把要記之事寫在紙草紙上, 然後沖水令患者服下)。雖然紙草紙可以保存三、四千年, 但這些寫在紙草紙上的著作, 歷經兵火及自然朽爛, 喪失很多, 存留不易。相較之下, 近世用機器生產的短纖維酸性紙, 在垃圾堆裡約五個月後即分解, 回歸自然。若善加保護, 近世的紙或許可以留存兩百年。中國古代的紙是長纖維鹼性紙, 最早的西漢的「灞橋紙」留存了二千年, 宋版書維持了一千年。若用近代

的電腦晶片作爲記憶載體, 因其格式二三十年一變, 幾代以後或不可辨識, 這個時代的文明如何傳承下去是個問題。

現在我們來談埃及的數學史。

(1) 數字的標記法

大約西元前 3000 年, 古埃及的個位數是用直槓的數目表示的, 十位元數則用牛腳軛的數目表示, 以後每進一位就換一物: 百位用繩索, 千位用蓮花, 萬位用手指, 十萬用青蛙, 百萬用舉雙手的神像, 這樣的數位系統很可能源自非洲本土。這是十進位制, 不是位值制 place-value system。

十進位的數位系統影響深遠。在時間長度的定義方面, 一小時等於六十分鐘傳自兩河流域, 而一天有二十四小時, 則源於古埃及。按照十進位制, 古埃及人規定日色大明十個小時, 加上凌晨一小時、黃昏一小時, 故白天有十二小時。同理黑夜也有十二小時。所以, 一晝夜是二十四小時。

整數的加法是自然數的合併計算。在古埃及, 十個同樣的數目就進到下一位元數目。整數的乘法用古埃及的數位系統則很複雜, 一般用加倍法來代替乘法: 例如求 41×59, 先算 41 的 1, 2, 4, 8, 16, 32 的倍數: 把 41 自數相加得兩倍數, 把兩倍數相加得四倍數, 以此類推。然後把 59 表達成 $59 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1$, 加倍法的原理其實就是近代「兩位數制」binary number system。

在以下加倍算式中, 我們勾出 32, 16, 8, 2, 1 的項:

41	59
41	1$\surd$
82	2$\surd$
164	4
328	8$\surd$
656	16$\surd$
1312	32 $\surd$

用左列對應於右列勾出項的資料相加, 即得出 $41 \times 59 = 41 \times (1 + 2 + 8 + 16 + 32) = 41 + 82 + 328 + 656 + 1312 = 2419$。

在古埃及的分數表示式裡, 人們只能擇用整數及下列分數 $\{2/3\} \cup \{1/n : n = 2, 3, \ldots\}$, 並且各項最多只能用一次。爲了操作方便, 人們先準備了 $2/n$ 的表。例如要表達 $2424/41$, 古埃及人先從上述的 41 的倍數表中獲得最接近 2424 的 1312, 記下對應之整數 32; 接著從 2424

中拿掉 1312 得到 1112, 找到最接近它的 656, 記下整數 16; $\cdots$ 如此依次操作, 最後餘 5, 於是有:

$$2424/41 = 32 + 16 + \cdots + 1 + 5/41 = 59 + (4/41 + 1/41) = 59 + (2(2/41)) + 1/41$$

然後查 $2/n$ 的表, 獲得 $2/41$ 的表示式, 最終有:

$$2424/41 = 59 + (2(1/24 + 1/246 + 1/328)) + 1/41 = 59 + 1/12 + 1/123 + 1/164 + 1/41.$$

(2) 二次方程式

柏林紙草紙 The Berlin Papyrus (西元前 1990 ∼ 前 1649 年的遺物) 記載了兩個二次式的題目, 其中一題是: 一個大正方形的面積爲 100, 是另外兩個正方形的面積之和, 其中一個正方形的邊長是另一個的邊長的 $1/2 + 1/4$, 求解。這個題目表示作者可能有一些畢氏定理的知識。我們用現代數學來解此題。令兩個正方形中的一個的邊長爲 x, 另一個的邊長爲 y, 則 $x^2 + y^2 = 100$, $x = (1/2 + 1/4)y$, 代入前式得 $(\frac{3}{4}y)^2 + y^2 = 10^2$, 解得 $y = 8$, $x = 6$。

可見埃及古數學已能夠處理一些二次方程式。

(3) 面積及體積

從 Rhind 紙草紙 (約西元前 1550 年的遺物, 由蘇格蘭古董商人 Rhind 捐贈) 的內容, 我們知道埃及人爲了工程需要, 計算了一些三維物體的表面積及體積。Rhind 紙草紙記錄了九十一道題, 其中的第 41 題給出了圓面積的近似值, 從那兒可導出圓周率 π 的值爲 $256/81 = 3.16049383$。

Berlin 紙草紙、Rhind 紙草紙、Moscow 紙草紙以及紐約的布魯克林 Brooklyn 博物館的紙草紙都是有名的遺物。

三、印度

大約九千年前, 有智人從阿富汗下行到印度河的平原地區梅赫爾格爾 Mahrgarh。約西元前 6500年, 今巴基斯坦的印度河流域及西印度平原, 有深膚色的印度人 Dravidian 聚集, 形成村落。這些人可能是兩河流域人的親戚。約西元前 4000 年, 他們建築了有高大磚牆的城市。

西元前 3000 年, 印度河流域進入了青銅時代, 此時當地已有象形文字 (未能解)。約西元前 1900 年 (略相當於中國傳說的夏代), 由於地球向東自轉, 促使了自北向南的印度河往西移動。印度河流域是農耕文明, 當印度河西移後, 農田就沒了水, 導致居民四散、印度河文明消亡。約西元前 1500 年, 或許由於中亞氣候變冷, 在裏海北岸牧馬的印歐人 (可能是以前從印度遷徙到中亞的移民的子孫) 南下通過阿富汗, 進入北印度, 帶來新的民族與文明。

西元前五世紀, 佛陀出世, 印度的古世紀開始。西元前四世紀時, 亞歷山大大帝東征到達印

度河, 與月護王 Chandragupta 率領的印度象軍對壘。大帝退兵後, 月護王回國成立孔雀王朝 (傳說月護王以前靠養孔雀爲生, 那時孔雀是家禽)。孔雀王朝在幾代之後消亡, 印度的中世紀開始了。在西元一世紀, 阿富汗的貴霜帝國 Kushan Empire 侵入印度北部。在西元三世紀, 笈多王朝 Gupta dynasty 逐漸發展並控制了印度北部, 它消亡於西元五、六世紀。到了西元七世紀, 戒日王 Harshavardhana (唐玄奘的東道主) 佔領印度北部。戒日王忽然死去而又無嗣, 北印度因此大亂。之後印度進入了它的中世紀的後期, 列國分治延續了九百年。在這期間, 中亞的伊斯蘭教徒曾在西元 1206 年入侵印度, 建立了德里蘇丹國 Delhi Sultanate。大約同時, 伊斯蘭教還入侵了孟加拉、西印度 (今巴基斯坦)、馬來亞和印尼。

印度的近代史始於西元十六世紀。當時中亞的蒙古人 Mughals 侵入, 建立莫臥兒帝國 Mughal Empire, 控制了大部分印度。其時, 印度的紡織業和造船業都是世界有名的, 它的 GDP 約佔世界的 1/4, 超過了歐洲。

西元 1511 年, 葡萄牙人佔領馬來半島的麻六甲 Malacca, 開始了歐洲人在南亞的殖民。西元 1641 年, 荷蘭人佔領了整個馬來半島。西元十七世紀, 歐洲人在南亞從事香料貿易。西元十八世紀中葉, 英國通過「東印度公司」開始經營印度。西元 1757 年, 英國用武力取得孟加拉, 將其有名的紡織業和造船業全部搬到英國。西元 1857 年, 英國取代莫臥兒帝國, 統治大部分印度。

第二次世界大戰之後, 英國國力大衰。約西元 1947 年, 印度獨立成兩國: 印度教的印度和伊斯蘭教的巴基斯坦。印度的獨立領袖聖雄甘地 Mahatma Gandhi, 因支持巴基斯坦獨立建國, 被狂熱的印度教徒刺殺。

現在我們來談印度的數學史。

(1) 零與位值制

新的印歐民族帶來了自己的數學, 傳說印度數字最早來源於波羅米 Brahmi 文字 (形成於西元前八 ～ 前七世紀)。以後在印度的寺廟的牆壁和石碑以及遺留的銅片上, 發現了大量阿育王 Ashoka (西元前三世紀) 時期的波羅米數字。波羅米數字裡的一二三與中文相同, 這或許不是偶然, 雖然其中的關聯未知。當時的印度數位、之前的埃及數位和中國甲骨文數位, 都是十進位元, 而不是位值制。

中國漢代用數字後面加空位來表示位值, 這個辦法在算籌上雖然清晰, 但書寫在紙上則會造成混淆, 因爲有多少個空位並不容易分辨。大約在西元 350 年, 北美的馬雅人 Mayans 用畫的蚌殼來表示數字位元值。現在的史學家認爲蚌殼並未參與運算 (這或許是因爲我們不知道馬雅人如何運算的), 所以它不能被當成數位零的符號。馬雅人採用二十進位制。

西元 650 年, 印度數學家 Brahmagupta 用數字下面加點來表示位值: 加一點表示十位, 加兩點表示百位, 依此類推。以後, 他把這些點移到數字的右邊, 相信當於現在的零記號。在計

算時, 先固定單位, 採取十進位, 一十寫成 1 ·, 一百寫成 1 · ·, 依此類推。唐代《開元占經》提到印度數字「每空位恒安一點」, 指的就是這種點記號。Brahmagupta 把表示零的點記號, 當作數位參與了四則運算。又因爲這個點記號也被用來表示位元值, 故而我們說 Brahmagupta 發明了有數字零的位元值制。

印度的數字零傳入中國後, 唐人並不重視。以後印度的記數法傳入阿拉伯世界。中亞有花剌子模 Khwarezmia 國, 在裏海東北岸上、鹹海 (古稱雷翥海) 之南。大約西元 773 年, 花剌子模國有一位數學家阿爾·花剌子模 Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi, 其名字的最後一段, 被英文翻譯成 algorathm, 中文繼而譯之爲「演算法」, 他也被人稱爲代數學之父。阿爾·花剌子模把印度表示零的點, 改成現在通用的 0。中國數學家在元代才接受零的記號, 用一正圓表示零。經阿爾·花剌子模修改後的印度數字, 以後傳入歐洲。可見現在通稱的阿拉伯數字, 其實是印度數字。

(2) 畢氏定理及圓周率

西元前 800 ∼ 前 740 年, 印度數學已發展到能夠瞭解圖形與數位的關係。數學家 Baudhayana 是印度闡述畢氏定理之第一人, 他知道邊長是 1 的正方形的對角線長度是 $\sqrt{2}$, 繼而要找 $\sqrt{2}$ 的值, 他得到 $\sqrt{2}=1+1/3+1/3\times 1/4-1/3\times 1/4\times 1/34=1.414216\cdots$ 精確到小數點下第五位。以後兩河流域的畢氏三陣列傳入, 印度也有了畢氏三陣列的表。

印度人計算的 π 的值爲 $339/108=3.13888889$。以後的一位印度數學家 Aryabhatta, 在西元 499 年得出 π 的值爲 3.1416。

(3) 三角函數的冪級數

在三角函數方面, 古希臘數學僅知道「弦長」(用現代數學來敘述它與 $\sin A$ 的關係是: 給一個單位圓上夾角爲 $2A$ 的弧 , 則其對應的「弦長」$=2\sin A$)。三角函數起源於相似三角形的研究, 主要用於天文學, 彼時已傳入印度。西元 499 年, Aryabhata 的書《Aryabhatiya》記載了精確的弦長表。西元八、九世紀, 伊朗數學家哈巴什 Habash 定義了三角函數 sine, cosine, tangent 及 cotangent。

西元十四世紀, 印度西南岸的 Kerala 邦有了著名的 Madvaha 數學學派, 其研究包括三角函數的冪級數 Power series, 例如 $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$ 的無窮級數展開式。Madvaha 應用 $\arctan(x)=x-x^3/3+x^5/5-\cdots+(-1)^n x^{(2n+1)}/(2n+1)+\cdots$, 令 $x=1$ 得出, $\pi/4=45$ 度角 $=\arctan(1)=1-1/3+1/5-1/7+\cdots$。所以, 圓周率 $\pi=4/1-4/3+4/5-4/7+4/9-4/11+\cdots$, 得出 π 的 9 位近似值爲 $\pi=3.141592653\cdots$。至此, Madvaha 寫出了千古奇文。後世誤以爲這是西元十七世紀的歐洲大數學家、微積分學的創造人之一的萊布尼茨 Leibniz 首先發現的, 故稱之爲萊布尼茨公式, 現已改稱爲 Madvaha-

Leibniz 公式。理論上, Madvaha 學派的方法可計算出圓周率的任意精確度的近似值。現代人使用最基本的電腦和無窮級數 arctan 公式, 可以毫不費力地算出圓周率的千位小數值; 使用超級電腦及其它無窮級數, 人類已算出圓周率的 62.8 兆 (兆=百萬×百萬) 位的小數值。

Madvaha 學派的微積分學的研究也早於歐洲 300 年。此地的數學家十分出色, 但似乎沒有把他們的數學傳播到印度的其他地方。

四、希臘

一般認爲古希臘文明大約始於西元前 3000 年的青銅時代, 是在希臘本土東南部及愛琴海諸島的基克拉澤斯文明 Cycladic civilization。但它沒有文字, 故其實並不合通常關於文明的定義。它早於西元前 2700 年的克里特島 Crete 的邁羅安文明 Minoan civilization。這個文明有「線性 A」Linear A 文字 (大部分可解讀) 及類似於埃及的象形文字 (尚未解讀), 又有城牆及諸多大理石雕像傳世。中國傳說的黃帝在西元前 2600 年、傳說的大禹在西元前 2000 年, 並且這兩個傳說的時代都沒有文字, 可見希臘文明比中國更早。之後的西元前 1750 ～ 前 1050 年, 邁錫尼文明 Mycenaean civilization 是古希臘青銅時期的最後階段, 以其富麗堂皇的城市構築及藝術作品聞世。以後, 海民 Sea people 出現 (史學家至今未能確定這些人是誰, 只知道他們在東地中海引起大亂), 持鐵器侵入希臘, 從此希臘進入了三百年的黑暗時期。西元前 750 年, 希臘復興並改用腓尼基字母作爲希臘字母, 從此開啟了它的古典時期。

西元前 420 ～ 前 146 年的這段時間是泛希臘時期 Pan-Hellenistic。亞歷山大大帝東征, 破波斯軍, 佔領埃及、中東、伊朗、中亞及印度河流域。西元前 323 年, 大帝逝世後, 其領地分爲三國。西元前 146 年, 羅馬帝國興起, 攻佔希臘, 以後又佔領埃及與小亞細亞 (今土耳其)。西元 423 年, 羅馬帝國分裂成東、西羅馬帝國, 希臘則歸屬東羅馬。東羅馬帝國又稱爲拜占庭帝國 Byzantine Empire (Byzantine 本是希臘一古國的首都, 後稱爲君士坦丁堡 Constantinople, 現稱作 Istanbul), 當時東羅馬帝國流行希臘文化。西元 1453 年, 奧特曼帝國 Ottoman Empire (今土耳其) 攻佔了東羅馬帝國的大部分國土 (包括希臘), 遂滅東羅馬帝國。英國浪漫詩人拜倫 Lord Byron 寫下「哀希臘」The Isles of Greece, 鼓動希臘獨立。拜倫唱道,「他們 (古代的英魂) 回答:『只要有一個活人登高一呼, 我們就來, 就來! 』噫! 倒只是活人不理不睬」(查良錚之譯文)。西元 1824 年, 拜倫爲希臘獨立而戰死。西元 1832 年, 希臘從奧特曼帝國獨立。

近代用鑽齒的方法研究古人的 DNA, 發現自新石器時代 (約七千年前) 以來, 62%-86% 的希臘古人是來自小亞細亞 (今土耳其) 的農人。青銅時代 (約五千年前) 之後, 9%-17% 的遺骨來自高加索山區 Caucasus mountains 或伊朗。現代希臘人是西元前 1750 ～ 前 1050 年的邁錫尼文明的後人。

現在我們來談希臘的數學史。

在古希臘, 數學 máthēma 原意是學術的意思, 非若後世專指數學。一般認爲, 希臘靠近兩河流域與埃及, 故深受其文明的濡染。古希臘用埃及的紙草紙來記錄, 然而歷經戰火及自然朽敗, 已無遺物。現代流傳的古希臘最初的數學史, 來源於西元前四世紀學者的追記及後世阿拉伯文的翻譯書籍。近代數學繼承並發展了古希臘的數學。

(1) 希臘數字

$1 = \alpha$	$10 = \iota$	$100 = \rho$
$2 = \beta$	$20 = \kappa$	$200 = \sigma$
$3 = \gamma$	$30 = \lambda$	$300 = \tau$
$4 = \delta$	$40 = \mu$	$400 = \upsilon$
$5 = \varepsilon$	$50 = \nu$	$500 = \phi$
$6 = \varsigma$ (ϝ)	$60 = \xi$	$600 = \chi$
$7 = \zeta$	$70 = o$	$700 = \psi$
$8 = \eta$	$80 = \pi$	$800 = \omega$
$9 = \theta$	$90 =$ ϙ	$900 =$ ϡ

從上圖可見, 古希臘人用字母表示數位。現代數學仍繼承著這個傳統, 例如用 π 表示圓周率、e 表示自然對數的底。至今, 希臘人與世界的科技界還是用字母來表示序數 ordinal, 例如第一是 α、第二是 β 等等。

(2) 泰勒斯

希臘最早的數學家是泰勒斯 Thales (約西元前 624 ~ 前 548 年, 早於孔子) , 他訪問過兩河流域及埃及, 提出並證明了泰勒斯定理:「取圓之直徑的兩個端點及圓上任一點構成三角形, 則圓上那個點的內角是直角」。泰勒斯也是著名的哲學家, 他的名言是:「你不能插足於同一河流兩次」(因爲水在不停地流淌, 瞬間之後這個河流已不是原先的河流)。

(3) 畢達格拉斯

世界上最重要的古代數學家當屬畢達格拉斯 Pythagoras (約西元前 580 ~ 前 500 年, 早於孔子), 他也訪問過兩河流域及埃及, 成立了一個以他爲名的社團。這個社團有很多重要的數學成果, 譬如數學的抽象化、畢氏定理的證明。我們知道在二維空間裡, 正多邊形是對稱的凸多邊形、且其各邊長相同, 平面上存在無窮多個正多邊形。相應的在三維空間裡, 正多面體是對稱的凸多面體、且其各面是相同的正多邊形、立體夾角全等。畢達格拉斯社團證明了三維空間裡有、且只有五個正多面體 (後世稱爲柏拉圖 Plato 的五個正多面體): 表面爲正三角形的四面體 tetrahedron、八面體 octahedron、二十面體 icosahedron; 表面爲正方形的六面體 cube;

以及表面爲正五邊形的十二面體 dodecahedron。歐幾里德的《幾何原本》中有約半數的定理來自這個團體, 無人知曉哪些是畢達格拉斯的成果、哪些是他學生的結果。

(4) 分數與實數

最初的數是自然數。後來有了分數, 也稱作比數 ratio-nal (中文誤譯爲「有理數」)。比數通過四則運算, 仍得比數, 用現代數學術語即是: 所有比數構成比數域 rational field。再以後有了幾何測量, 如測量長度或面積, 得出許多連續的量, 又稱作實數。實數通過四則運算, 仍得實數, 用現代數學術語即是: 所有實數構成實數域 real field。數與量的來源不同。人們起初用比數來度量, 曾錯誤地認爲所有的量都是比數。非比數 irratio-nal 的量之存在, 是畢達格拉斯的學生希巴蘇斯 Hippasus 發現的。按照畢達格拉斯定理, 邊長爲 1 的正方形的對角線, 其長度是 2 的平方根 $\sqrt{2}$。希巴蘇斯證明了這個量$\sqrt{2}$ 不是一個比數, 其證明如下: 任一比數 a/b 的分子 a 與分母 b 的輾轉相除, 在有限步驟後必會停止。換言之, a/b 的連分數表示式 (等價於分母和分子的輾轉相除) 是有限位的, 但 $\sqrt{2}$ 的連分數表示式卻是無限位的:

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

上式可用迴圈式 $\sqrt{2}-1=1/(2+(\sqrt{2}-1))$ 導出。這是希臘人按他們的趣味, 運用連分數所得的證明。後世的亞里斯多德 Aristotle 則用「反證法」求證: 設 $\sqrt{2}$ 是比數, 即令 $\sqrt{2}=a/b$, 規定整數 a,b 沒有公因數, 故而 a,b 最多只有一個偶數。上式等同於 $\sqrt{2}b=a$, 得出 $2b^2=a^2$, 因此 a 必然是偶數, 把它寫成 $2c$。代入前等式, 則得 $b^2=2c^2$, 顯見 b 也是偶數, 這與「a,b 最多只有一個偶數」不合, 所以 $\sqrt{2}$ 不是比數。

傳說畢達格拉斯在知曉其學生希巴蘇斯證明了「存在有非比數的實數」後, 勃然大怒, 因他自己正在宣傳「萬物皆數」(由於當時的認知是所有的量都是比數, 所以他的宣傳即是「萬物皆比數」)。畢達格拉斯認爲希巴蘇斯洩漏了天機, 故沉希巴蘇斯於海。這只是傳說, 或許並無此事。約一千八百年後的十三世紀, 中國數學家秦九韶也主張「夫物莫不有數」, 見其著作《數書九章·序》。

希臘人受困於由自然數導出的比數與由測量導出的非比數之間的異同。這在現代數學中, 用戴德金切割 Dedekind cut 或柯西數列 Cauchy sequence 才得以解決。

(5) 柏拉圖與亞理斯多德

柏拉圖 (西元前 427 ~ 前 347 年, 早於孟子) 成立了有校園、老師及學生的雅典學院 Athen academy。該學院一直延續到西元 592 年 (相當於中國隋朝開皇十二年), 在維持了約

九百年之後被教皇關閉。柏拉圖提倡數學的抽象化。純數學千年不壞、萬古長青。

亞理斯多德 (西元前 384 ~ 前 322 年, 早於孟子) 曾受敎於柏拉圖, 其百科全書式的著作遍及所有學科。他發揚光大了邏輯學與數學的演繹法證明。亞理斯多德後來成爲亞歷山大大帝的老師。大帝戰敗伊朗軍, 被阿拉伯人視爲民族解放者, 暱稱爲「雙角人」Dhul-Qarnayn。中世紀的阿拉伯人尊崇亞理斯多德的學問, 尊稱他爲「邏輯學的作者」。更有逸聞傳頌亞歷山大大帝在東征途中, 曾派人回希臘向他求敎如何處理佔領地的難題。

亞理斯多德是一個偉大的博學家。當然博學家難免言多必失, 他也有許多謬論。其中最有名的是他認爲地面上的物質與天體上的不同, 天體是乙太 Ether 構成的。其實, 地面上的我們看星球在天上, 相對而言, 從星球上看地面則認爲我們在天上。天上地下的物質都是由所知的原子構成的。亞理斯多德還說過男人的牙齒比女人的多。中國古語有「聖人之失, 有如日月之蝕, 人皆見之」, 故而我們知道了這位偉人的一些瑕不掩瑜的言論。

(6) 亞歷山大城時代

(i) 歐幾里德

當馬其頓王國 Macedonia 興起 (現代有一個北馬其頓國 North Macedonia, 它是後世的斯拉夫人之國, 非古代希臘人的馬其頓國), 它征服了希臘各城邦, 導致希臘文明進入轉捩點。緊接著, 馬其頓王國的亞歷山大大帝東征波斯帝國大勝, 在埃及建立亞歷山大城爲希臘帝國中心。亞歷山大大帝要求異民族通婚, 實行民族融合政策。亞歷山大城空前繁榮, 興建繆斯神廟 Museum (中文譯爲博物館) 及圖書館。古希臘數學也從此移入亞歷山大城。

當時希臘最重要的數學家是歐幾里德 Euclid, 他生活在埃及的亞歷山大城。時約西元前 300 年 (秦朝始於西元前 221 年), 正值希臘統治埃及的托勒密一世時代。歐幾里德的生命史是後人傳說的, 不知是否可靠。在希臘時, 他是柏拉圖學院派的一員。他繼承並發展了古希臘人爲數學建立的公理演繹法, 留下深遠的影響。後來順著亞歷山大大帝帶來的泛希臘主義 Alexander's Pan-Hellenic Campaign 潮流, 歐幾里德移民埃及。他的著作豐富, 傳遍世界; 其《幾何原本》Elements 十三冊在明末傳入中國。《四庫全書》的「提要」中寫:「歐邏巴 Europa 之學, 其先有歐幾里德者, 按三角方圓, 推明各數之理, 作書十三卷, 名曰《幾何原本》。按: 後利瑪竇 Matteo Ricci 之師丁氏 (即, 克拉維斯 Christopher Clavius, 其姓的拉丁文意爲釘) 續爲二卷, 共十五卷。自是之後凡學算者, 必先熟習其書」。據說《幾何原本》在西方是僅次於《聖經》的版本最多的書籍。中文版的前六卷由利瑪竇與徐光啓 (明末重要的政治家、思想家和科學家, 天主敎徒, 官至內閣大學士。西元 2011 年, 羅馬敎會封他爲聖徒) 翻譯, 後九卷由晚淸的數學家李善蘭 (西元 1811~1882年) 翻譯。歐幾里德的《幾何原本》以公理、公設開篇, 有嚴謹的證明, 包括畢氏定理的證明 (這可能是畢達格拉斯社團的結果), 也有關於自然數分解爲素數乘積的定理。直到十九世紀, 才有非歐幾何 non-Euclidean Geometry 的興起。歐幾里德的數學

理論在世界上通行了二千年, 近世數學宗於他所授。可謂「匹夫爲百代師, 一言爲天下法」, 真是千古豪傑。

(ii) 艾拉托斯特尼

與歐幾里德同時代的 Eratosthenes (約西元前 276 ~ 前 195 或 194 年, 略早於秦始皇) 是第一個計算地球半徑的人。兩河流域的天文學家早已知道: 人居日、月之間, 才見全月, 而月蝕發生在全月之夜。通過觀察月蝕之地影, 兩河流域人發現了地面是球形的。以後的希臘人觀察到: 遠航的船隻會漸漸沒入海平面之下, 因此推導出海平面是彎曲的、大地是球形的。所以測量地球半徑是一個有意義的事情。

艾拉托斯特尼被有些人稱爲古代最有學問的人, 他是亞歷山大城圖書館的館長。他晚年因失明而自殺身亡。他測量到夏至日的正午, 在亞歷山大城的日影爲 7.2 度。同時他知道在夏至日正午, 太陽在南方的 Seyne (今阿斯旺 Aswan) 照入深井。假定日光平行 (即日球與地球的距離無限大), 兩城之距離是 800 公里, 日影差爲 7.2 度 (即圓周角 360 度的 1/50), 則 800 公里的 50 倍 (即四萬公里) 就是地球的周長。艾拉托斯特尼然後用圓周率計算得出地球的半徑。在西元 1798 年的法國大革命後, 法國政府規定: 子午線從北極通過巴黎到赤道, 這個距離是一萬公里 (顯見, 整條子午線的長度是四萬公里), 由此來規定一公里的長度。現代物理學家用光線定義公里的長度, 與此大致相同。

西元一世紀的《周髀算經》也利用兩地的日影差來作計算: 中國古人假定地面是平的 (即地球半徑無限大。人們之所以看不到遠處, 不是因爲地面彎曲, 而是被山與樹木遮住了, 恰如南宋詞人辛棄疾在《菩薩蠻 · 書江西造口壁》裡寫的「西北望長安, 可憐無數山」), 得出「日高 (即日、地距離) 八萬里」(即四萬公里)。這與日和地的實際距離是三億里差得太多了。

西元九世紀的伊朗數學家哈巴什 Habash 受命於哈里發 el-Mamun, 用與艾拉托斯特尼同樣的方法測量地球半徑, 得到相似的結果。西元十世紀的馬蘇第 Masudi 的《黃金草原》第八章裡, 用北極星光測量, 假設北極星光平行 (北極星比太陽遠, 故而北極星光比日光更接近平行線), 得出地球之半徑與艾拉托斯特尼的值相近。

(iii) 阿波羅尼

亞歷山大城的另一位希臘數學家是阿波羅尼 Apollonius of Perga (約西元前二世紀), 屬於歐幾里德學派, 是一位達到古希臘數學高峰的幾何學家。他著有《圓錐曲線》Conic sections 共八冊, 可惜只有前四冊得以完整保存, 五、六、七冊的希臘文本已佚, 流傳下來的是它們的阿拉伯譯文, 而第八冊則無從知曉。傳說他還做過關於正十二面體 dodecahedron 及正二十面體 icosahedron 的討論。

古希臘數學把圓錐曲線劃分成 parabola (西元十六世紀, 伽利略 Galileo 建構古典物理學時, 通過實驗, 發現拋射物體的軌跡是 parabola。中文因此把 parabola 譯成拋物線。但討論西

元十六世紀以前的古希臘數學時, 則不能作此翻譯。應該用拉丁文原意, 作「比較曲線」)、橢圓 ellipse 及雙曲線 hyperbola。阿波羅尼對它們作了精細的討論, 給後世物理學家牛頓 Newton 的萬有引力定律的應用, 開了方便之門。牛頓得以用橢圓表示行星或回歸彗星在萬有引力定律下的運動軌跡, 用雙曲線表示某些靈光一現永不回歸的彗星的軌跡。另一方面, 給定一個圓錐曲線後, 阿波羅尼用其對稱軸及一條與該軸垂直的直線作爲坐標系, 再用文字表達的二次方程來定義這個曲線, 開啓了笛卡兒的解析幾何。

古典物理學家應用一千八百年前的古希臘數學, 經天緯地, 如魚得水, 真是奇妙! 物理學家用數學來幫助他們的研究, 這優秀的傳統在愛因斯坦 Einstein 創造廣義相對論 General Relativity 時得以再現, 其理論物理構建於半世紀前的黎曼幾何 Riemannian Geometry 之天地中。

(7) 阿基米德

阿基米德 Archimedes (約西元前 287 ～ 前 212 年, 略早於秦始皇) 是居住在南義大利西西里島的 Syracuse 的希臘移民, 他在亞歷山大城學習數學, 之後回到 Syracuse。阿基米德博學多能, 以發明物體的浮力定律而著名, 當時他激動得光著身子從浴缸跑到街上大喊:「我找到它了 Eureka」!

阿基米德用圓的內接正多邊形及外切正多邊形的面積, 求得圓周率π 的近似值:

$$3(10/71) < \pi < 3(1/7) = 3.142\cdots$$

他又用趨近法求得多種面積與體積的公式。例如設 r 是球半徑, 則球面積是 $4\pi r^2$, 球體積是 $(4/3)\pi r^3$。中國的祖沖之父子在西元五世紀時, 也得出同樣的公式。

在第二次羅馬與伽太基的百年戰爭中, 西西里島的 Syracuse 與伽太基結盟。阿基米德在羅馬兵攻佔 Syracuse 時遇害。

(8) 希臘的落日餘暉

西元前三世紀, 羅馬帝國崛起。羅馬人重視應用科技, 對純數學及純科學少有貢獻。羅馬靠軍力征服四方: 西元前 146 年, 羅馬兵團征服希臘。西元前 48 ～ 前 47 年, 凱撒 Caesar 率軍進攻埃及的亞歷山大城, 放火燒港內的埃及戰艦。大火延及亞歷山大城內, 燒著了著名的大圖書館。許多珍品遭毀, 幸而以前溢出的圖書存在寺廟裡。大火之後, 圖書館取回溢書。當時亞歷山大城出產紙草紙, 因而它是書籍的集散地。圖書館依靠逐漸搜尋、收購書籍而得以恢復。西元前 30 年, 羅馬征服埃及, 滅了托勒密王朝。

西元 395 年, 東西羅馬分裂, 埃及歸屬東羅馬。西元 476 年 (時值中國的南北朝; 北朝是北魏, 南朝是劉宋), 西羅馬帝國毀於日爾曼人。國家瓦解, 歐洲進入黑暗時期。西元 641 年 (唐太宗貞觀十五年), 伊斯蘭教的軍隊佔領了亞歷山大城。哈里發奧瑪 Caliph Omar 下令焚燒大

圖書館, 他說:「如果這些藏書與《可蘭經》一致, 那麼讀《可蘭經》就夠了。如果與《可蘭經》不同, 那麼讀它無用」。但百年之後的西元 754 年 (相當於中國唐代天寶年間), 回教徒的阿拔斯王朝 Abbasid dynasty (即黑衣大食, 他們穿黑衣、打黑旗) 在巴格達成立了「智慧宮」House of Wisdom, 也稱「巴格達大圖書館」。它收藏阿拉伯文書籍, 也聚集希臘典籍的阿拉伯文譯注本, 例如歐幾里得的《幾何原本》、亞里斯多德的典籍、托勒密的大天文書 Almagest 等等。它還收集了很多印度的數學及科學書籍。圖書館收藏的是用紙草紙、羊皮紙 parchment、犢皮紙 vellum 爲載體的書籍。

雖然歐洲進入了黑暗時期, 但天不滅斯文。除了阿拉伯人在其統治區成立圖書館褒揚文化, 羅馬天主教會也應運而生, 他們讀聖經、各處傳教、建修道院。這樣過了六百年, 到西元 1088 年 (即北宋元祐三年), 義大利北部的教會仿照修道院的方式, 成立了以研究神學爲主的博洛尼亞大學 the University of Bologna。它以後也開始研究數學、哲學與科學。「一鳥高飛, 衆鳥隨之」, 巴黎大學、牛津大學等也陸續成立了。牛津大學的最早紀錄是西元 1167 年 (即南宋孝宗乾道三年)。這些大學的興起, 徹底改變了歐洲的面貌。

雖然最早的大學是西元 859 年摩洛哥的宗教性的卡魯因大學 University of Al-Qarawiyyin, 但它其實是個修道院。西元 1963 年, 它併入摩洛哥國立大學。當然, 希臘有維持了九百年的柏拉圖的「雅典學院」, 中國漢代有「國子監學」, 唐、宋代也有「國子監」, 並設有「算學科」。但元祐元年時, 政府認爲「建學之後, 養士設科, 徒有煩費, 實於國事無補」。通常維持「算學科」幾個月或幾年, 就廢棄了。南宋以後, 全部廢除「算學科」。「國子監學」則是政府的一部分, 主要傳授孔孟之道。每次改朝換代, 就從頭再來。它與自由思考、自由創造、與政治獨立的近代世界大學很不同。

在西元十三世紀以後, 基督教與伊斯蘭教之間, 發生激烈的鬥爭。西元 1224 年, 基督教軍滅了南義大利的西西里島的回教國。西元 1453 年, 東羅馬帝國被伊斯蘭教的奧特曼帝國 (今土耳其) 所滅。西元 1492 年, 基督徒攻陷了西班牙的回教國的首都格那納達 Granada。在這兩次滅掉回教國的事件裡, 歐洲人都取得了阿拉伯文的希臘典籍。在東羅馬帝國被滅後, 許多學者帶著希臘文的書籍逃到義大利, 觸發了義大利的文藝復興運動。希臘數學傳佈全世界並得到巨大發展, 從此數學史進入了現代史。

五、伊朗

考古學家發現伊朗的中心地區在十萬年前已有人類痕跡。古伊朗西南部的箚格羅山區 Zagros, 是人類最早的種植牧畜區之一。東南沿海的原始埃蘭 Elam, 地處如今伊朗的 Khuzestan 及 Ilam 省, 位於波斯灣沿岸。那兒的蘇薩 Susa 是古代大城, 後爲埃蘭的首都。根據放射性定年, 蘇薩建立於西元前 4395 年。原始埃蘭在西元前 3500 ~ 前 2800 年 (早於傳說中黃帝的西元前 2600 年), 略晚於蘇美爾城邦。當時它已有象形文字 Proto-Elamite script, 考古學家

部分解讀。西元前 3000 ~ 前 400 年, 埃蘭人改用楔形文字, 這些文字現在已可解讀。在西元前 2900 ~ 前 2000 年, 埃蘭進入青銅時代。具備了文字、城郭及青銅, 埃蘭進入了文明世界。西元前 600 年, 波斯帝國兼併了埃蘭國, 從此埃蘭的楔形文字被用作波斯帝國的官方文字。

建立波斯帝國的是印歐族白種人, 他們原居於中亞的裏海北岸, 牧畜牛羊及馴養馬匹。西元前 2200 年, 他們發明了勢如奔雷的馬戰車。西元前 2000 年 (相當於中國傳說的大禹時代), 印歐族人開始四處擴展。

西元前十七世紀, 中東的希克索斯人 Hyksos 駕馬戰車突入埃及的尼羅河三角洲區, 建立了他們的王朝。西元前 1595 ~ 前 1155 年, 使用馬戰車的兩河流域的軍事民族加塞特人 Kassite, 接管了巴比侖帝國, 成立中期的巴比侖帝國。西元前十六世紀, 馬戰車傳入中國成爲商代王室的神兵利器, 號令中原, 莫敢不服。古希臘人也駕馬戰車。因爲馬車可以行遠途, 從而打破了各文明圈的孤立自持, 聯絡舊大陸的各地逐漸形成一體。

印歐人分成三大族。第一大族通過阿富汗, 進入印度, 成爲白種印度人, 這族也進入中國南疆。

第二大族移居到帕米爾高原 Pamir 及附近, 後來被稱爲伊朗人。現今佔據帕米爾高原的塔吉克斯坦 Tajikistan 即是伊朗遺民建立的。這大族又分成四族: 有三族人進入伊朗高原, 他們是米地 Media、波斯 Persis、安息 Parthia (或作 Arsacid), 這三族建立了各自族名的帝國; 第四族是留在中亞的粟特 Sogdia (或稱東伊朗族)。在唐代, 粟特人從事絲路貿易, 其中不少人移入中國。

第三大族移入歐洲, 成爲德、法、意、英人 (也有少數成了希臘人)。以上各民族在語言上有互通的淵源, 例如父親一詞, 英文是 father, 拉丁文是 pater, 伊朗文是 pedar, 梵文 (古印度文) 是 pita, 德文是 vater, 法文是 le père, 這些都是相近的。

伊朗曾是世界上最大的帝國, 也曾是最富庶的地區, 但後來歷經突厥族和蒙古族的侵入。雖然許多民族佔領過伊朗, 可是根據遺骨檢查, 過去六千年來伊朗人的 DNA 相當穩定, 所以應該沒有發生大滅族之類的事件。當然他們的文化變得面目全非, 現在的伊朗是一個神權國家。

遠古的伊朗文明應該是輝煌的, 可惜僅遺殘篇, 難窺全貌。數學及科學的歷史, 大部分未傳, 現代很少人研究。例如我們僅知在阿拉伯入侵之前, 有 Borzuya (西元五世紀人) 等幾位數學家, 他翻譯了印度數學家 Brahmagupta 的著作。或許受了宗教的影響, 後世信徒認爲是先知穆罕默德 Muhammad 給世界帶來的光明。他們用伊斯蘭教 Islam 紀元 (西元 622 年) 劃線, 堅信在此之前的世界是黑暗的, 故不可能有值得傳頌的文明。當然也就沒有流傳下來數學史。以下我們根據現有的記載來探討, 可以觀察到留存的事件都發生在西元 622 年之後。

現在我們來談伊朗的數學史。

(1) 哈巴什

哈巴什 Ahmad ibn ‘Abdallah Habash Hasib Marwazi (西元 766 ∼ 869 年) 來自中亞的木鹿 Merv, 因此他的名字裡有木鹿人 Marwazi。古希臘數學在三角函數方面只定義了「弦長」, 哈巴什是定義 sine 的第一人。用現代數學來敘述: 給定單位圓上一個夾角爲 $2a$ 的弧 , 則其對應的「弦長」$= 2\sin(a)$, 因此 $\sin(a) = 1/2$「弦長」。哈巴什也定義了 cosine, tangent 及 cotangent。繼希臘數學家艾拉托斯特尼之後, 哈巴什也測量過地球的半徑。

(2) 阿爾-花剌子模

阿爾-花剌子模 Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (西元 780 ∼ 847 年) 來自花剌子模國 (Khwarezmia), 故有其名。此國在裏海之東北岸、鹹海 (中國古代稱其爲雷翥海) 之南, 曾爲伊朗北疆, 隋唐稱其爲火尋國。這位數學家的名字的最後一部分 al-Khowarizmi, 英文翻譯成 algorathm, 中文再譯爲「演算法」。阿爾-花剌子模曾是巴格達大圖書館 (即智慧宮) 的館長。

阿爾-花剌子模寫了很多書, 其中有《代數學》「algebra」, 他在書裡詳細討論了二次方程式的解法。康熙帝說:「西洋人名此書名爲『阿爾熱八達』, 譯『東來法』也」。其實這是康熙帝的誤解, algebra 的意思是移項與平衡; 把負號的項移到等號的另一側, 使之成爲正號的項。自有此書之後,「代數學」成爲數學中獨立的科目, 故而有人尊稱他爲「代數學之父」。

阿爾-花剌子模的另一個大貢獻是傳播了數字「零」。當時印度的記數法已傳入阿拉伯世界, 約西元 773 年, 阿爾-花剌子模把印度表示零的「點」改成通用的 0。這種來自於印度的數位系統, 以後傳入歐洲, 被稱爲阿拉伯數字。中國的數學家在元代才接受零的記號, 用一正圓表示算籌的零。

(3) 海亞姆

奧馬·海亞姆 Omar Khayyam (西元 1048 ∼ 1131 年, 時當中國北宋) 生活在塞爾柱人 Seljuk (突厥化的中亞人) 統治下的伊朗。西元十一世紀, 塞爾柱人征服了伊朗。類似中國的滿族征服漢族後很快漢化, 塞爾柱人征服伊朗後, 也很快伊朗化。海亞姆是著名的詩人和天文學家, 他觀察日月升降和天空旋轉, 是第一個發現這些現象源於地球自轉的人。

奧馬·海亞姆對數學的貢獻之一, 是把三次方程式分類、然後用圓錐曲線的交點求解。由於他用幾何方法處理代數問題, 海亞姆被認爲是笛卡兒的解析幾何的先驅者之一。他的另一個貢獻, 是其對「平行公理」的研究推動了非歐幾何的發展; 他把二維空間分爲銳角類、直角類及鈍角類, 這有助於後世對二維空間之分類 (橢圓幾何、歐氏幾何、雙曲幾何) 的理解。

(4) 阿爾-凱西

阿爾-凱西 Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Masūd al-Kāshī (約西元 1380 ～ 1429 年, 明朝成祖時) 生活在帖木蘭 Tamerlane (蒙古人) 的統治期。據記載, 在西元 1424 年, 他得到圓周率 π 的小數點以下十六位精確值: 3.1415926535897923。

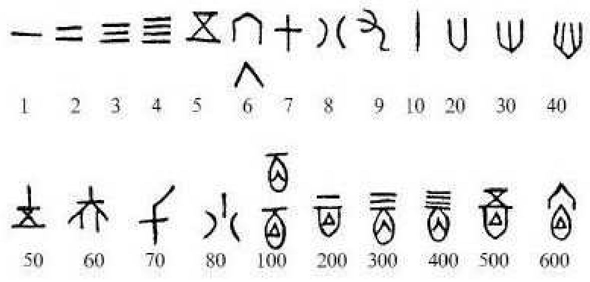
六、中國

西元前 2600 年是傳說中的黃帝時代, 但從司馬遷的《史記-五帝本紀》來看, 這在漢代已不可考。太史公曰:「學者多稱五帝 (注: 第一帝是黃帝), 尚矣。然《尚書》獨載堯以來; 而百家言黃帝, 其文不雅馴, 薦紳先生難言之。」故而黃帝不像是一位歷史人物。我們再來看夏代的人物。在商代之前關於諸神的故事有下面這些例子: 鯀 (禹的父親) 竊了上帝的息壤到人間築隄防 (息壤是一種能生長的土壤, 見《山海經-海內經》:「洪水滔天。鯀竊帝之息壤以堙洪水, 不待帝命」); 關於禹治水的故事, 除了一句老話: 三過家門而不入 (見《史記夏本紀》或《孟子滕文公上》), 其餘就是用應龍之尾畫地形成江河 (見《廣雅》, 應龍是有翼的龍。又見《楚辭・天問》:「河海應龍, 何畫何曆?」); 還有后羿射下九個太陽; 以及嫦娥奔月等等。這些應該都是神話, 但經過春秋、戰國衆學者的逐步人格化, 諸神演變成古人。現代考古雖覓得陶器、石器, 卻未曾找到任何文字記錄。除非找到「夏墟」及夏代的文字, 或從已有的晚商的甲骨文 (西元前十三世紀) 查到夏代的記錄, 否則很難證明夏代真實存在過。事實上, 商代的甲骨文沒有一個字提到夏代。因此, 夏代及其前代, 應該是傳說的神話時代。

另一方面, 考古學家首次在西部甘肅發現了西元前二十八世紀的青銅器遺物 (一柄青銅小刀), 令人遙想到更西的兩河流域。河南偃師商城則是西元前十五、十六世紀的遺址。以目前的考古學知識, 一個文明應該擁有文字、青銅及城郭。因此, 中國的文明大概始於西元前十六世紀的商代早期, 至今約三千六百年。

現在我們來談中國的數學史。

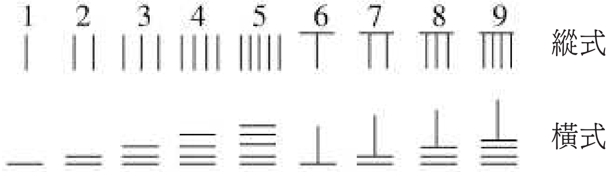
(1) 記數法



古學家在商代晚期的甲骨文裡發現了中國最初的記數法, 故中國的古數學遲於兩河流域及

埃及的數學。這是西元前 1200 年甲骨文裡的記數法: 甲骨文記數雖是十進位, 但不是位值制; 十、百、千、萬都有專門的單位詞。甲骨文記數由 1-9 九個數字和若干十進位的位置符號組成, 與古埃及的記數法類似。這種記數方式僅適用於文字記載、不方便計算。

春秋時, 人們用一種叫算籌的算器來作實際上的計算。算籌是一些竹製、木製、骨製或金屬製的小棍, 被用來表示數字。人們移動這些算籌, 以資運算。例如《史記·留侯世家》裡有留侯張良「運籌帷幄之中, 決勝千里之外」, 說的就是漢初三傑之一的張良用數學來決定策略。算籌計數法在漢代開始用空位表示現代的零記號, 它是沒有零記號的位元值制。在算籌記數法中, 以縱橫兩種排列方式來表示數目:



中國古代的算籌數碼

其中 1-5 均以縱 (或橫) 方式排列相應數目的算籌來表示, 6-9 則以 1-4 的算籌之上方加一根垂直方向的算籌 (作爲 5 的標記) 來表示。對於多位數, 規定個位用縱式, 十位用橫式, 百位用縱式, 千位用橫式, 以此類推, 遇零則置空。《孫子算經》(西元四、五世紀) 記載的算籌記數法是:「凡算之法, 先識其位, 一縱十横, 百立千僵, 千十相望, 萬百相當」。從元末明初開始, 中國用算盤代替了算籌。

在紙上進行算籌數字的演算, 是明代時從西域傳入中國的, 稱爲「鋪地錦」(見程大位的《算法統宗》)。後來傳教士利瑪竇和數學家李之藻翻譯西方的著作, 寫成了《同文算指》。但譯文裡用的是中文算籌數字, 並畫一正圓表示零。以後清代改用阿拉伯數字, 始與世界通行的筆算相同。中國古代通用「算學」而少見「數學」。相較於希臘古數學, 中國古數學缺乏數論 (因爲中國古代沒有質數的概念)、幾何學、邏輯學及三角學, 較著重於應用, 未涉及抽象數學。近代中國數學多半借用日文翻譯的名辭, 即便「數學」一詞也來自日文。

(2) 矩陣與線性代數

西漢時期《九章算術》之「方程章」裡的方程, 相當於取現代的線性方程組的係數而成的矩陣。然後用「直除法」(即現代的高斯 Gauss 消元法) 求解。這種方程傳到日本後,「和算家」(注: 日本古典數學的專家) 關孝和 Seki Kowa (西元 1642 ～ 1708 年) 發明了「行列式」(比歐洲的萊布尼茨早十年), 完成了初期的線性代數的基本理論。但近代的線性代數學更有許多古人未曾想到的精彩理論, 譬如方形矩陣的特徵值 eigenvalue, 約當標準式 Jordan Canonical form 等等。

西元四世紀《孫子算經》卷下的第三十一題, 可謂是後世「雞兎同籠」題的始祖。書中這樣敘述:「今有雉兎同籠, 上有三十五頭, 下有九十四足, 問雉兎各幾何」? 此題後來傳到日本, 變成了他們的「鶴龜算」。

(3) 畢氏定理

《周髀算經》出現在西元一世紀的東漢末年, 其中有「析矩以爲勾廣三, 股修四, 徑隅五。既方其外, 半之一矩, 得成三四五。兩矩共長二十有五, 是謂積矩。故禹之所以治天下者, 此數之所生也」。這顯示了當時的人已知畢氏三陣列 (3, 4, 5) 滿足 $3^2+4^2=5^2$。可是, 在更早的西元前 1850 $\sim$ 前 580 年時期的兩河流域人, 已用楔形文字寫下了三十二個適合畢氏定理的畢氏三陣列。雖然趙爽在西元三、四世紀, 用「弦圖」(原圖已佚) 證明了畢氏定理, 但歐幾里德則在更早的西元前三世紀發表了畢氏定理的證明。

(4) 中國剩餘定理

《孫子算經》卷下的第二十六題是:「今有物不知其數, 三三數之剩二, 五五數之剩三, 七七數之剩二, 問物幾何? 答曰:『二十三』」。《孫子算經》還給出了這個問題的解法。經過歷代研究, 這個問題被推廣成下列定理: 令$\{m_1,\ldots,m_t\}$ 是 t 個兩兩互質的大於 1 的正整數, 任給 $\{r_1,\ldots,r_t\}$, 必存在唯一的正整數 $n<m_1\times\ldots\times m_t$, 使得對所有的 $i=1,\ldots,t$ 都有 m_i 整除 $n-r_i$。

到了唐代, 數學家一行 (他是一位僧人) 給出了解決這個問題的通法。西元 1801 年, 德國大數學家高斯 Gauss (西元 1777 $\sim$ 1855 年) 在他的《算術探究》Disquisitiones Arithmeticae 裡敘述了這個定理。事後他才知曉中國早已有此定理, 於是稱之爲「中國剩餘定理」Chinese Remainder Theorem。中國也有人稱它爲「孫子定理」或「韓信點兵問題」。

現代數學發現, 拉格朗日插值定理 Lagrange Interpolation Theorem 可被當作中國剩餘定理在一元多項式環上的應用。

(5) 開方法與高次多項式的解

從兩河流域的古文明開始, 人類就用線性方程式來套牢未知數, 然後通過解方程式來求它們的解。《九章算術》的雞兎同籠問題帶來的一次方程組及其求解過程, 足以說明這個妙法。我們知道一次方程組若有非連續的解, 則這個解是唯一的。

兩河流域的人還研究了二次方程式 $ax^2+bx+c=0$。他們發明了配方法, 並得到判別式 b^2-4ac: 如果它是負值, 則原方程式無實數解; 如果它非負, 則有實數解, 且可用開方法解得。中國古人似乎不知道配方法, 一直在求解個別的二次數值方程式。唐、宋、元有諸多數學書討論某些二次數值方程式的解。秦九韶的《數書九章》求解了二十六個問題, 其中二十個是二次數值

方程式。

這些數值方程式源於工程問題, 當時的中國數學家把最大的正實數解當作原問題的答案。到了淸代, 數學家汪萊 (1768～1813 年) 注意到, 當存在好幾個解時, 任意取最大正實數解來作問題的答案, 是不合理的。於是, 他把只有一個正實數根的方程式稱作「可知」的, 這個根就是問題的解 (在西元 250 年, 亞歷山大城的希臘數學家丟番圖已把只有一實根的多項式稱之爲「定多項式」, 這與汪萊的想法很類似)。而其他方程式, 皆稱爲「不可知」的。這樣看來, 王孝通的《緝古算經》的方程式, 有很多是「不可知」的。

數學家們一直被實數多項式的解之存在與否而困擾。西元十六世紀 (明代中期) , 義大利數學家卡爾達諾 Gerolamo Cardano 發明了複數 (後世的笛卡兒 Descartes 則助力完成了複數的構建), 使得三次方程式的所有解之存在性得以證明。以後, 卡爾達諾發表了費魯 Ferro 和達達利亞 Tartaglia 解三次及四次方程式的公式, 證明了可用開方法獲得三次及四次實數多項式的所有複數解。西方數學傳入中國後, 淸代數學家李銳 (西元 1773 ～ 1817 年) 把複數譯作「無數」, 他也瞭解到實數多項式的複解是成對出現的。西元十八世紀, 德國數學家高斯 Gauss 完美地證明了 n 次方程式存在 n 個 (可重複) 複數解。西元十九世紀, 法國數學家伽羅華 Galois 證明了對一般的五次或更高次的實數多項式, 不能用開方法求解。

日本的東洋數學史專家, 三上義夫 Yoshio Mikami (西元 1875 ～ 1950 年) 率先提出中國在唐、宋代已有高次數值方程式的數值解法, 與西方的霍納-牛頓 Horner-Newton (Horner 1786 ～ 1837, Newton 1643 ～ 1727) 法類似。之後的中文數學史書, 廣泛地傳播這個有誤的觀點。實際上, 中國古代的高次數值方程式的數值解法, 是利用多項式在許多點的值去猜測多項式的根, 與實際求根的霍納-牛頓法大不相同。因爲所需的文字太長, 只能另作一文「中國古代高次數值多項式的解」來闡釋。

(6) 天元術

第三世紀的亞歷山大城的希臘數學家丟番圖 Diophantus 研究方程式的標記法, 他用非數字的希臘字母表示變元, 用作爲數字的希臘字母表示係數, 這樣寫出整係數的多項式 (名人軼事: 費馬把他的最後定理記在丟番圖書頁的邊緣)。數學史專家通常認爲, 最初用 x 作爲未知數的數學家是笛卡兒 R. Descartes (以哲學家著名, 其名言是:「我思故我在」)。笛卡兒最重要的數學貢獻是發明了「笛卡兒座標系」, 創造了解析幾何 Analytic Geometry, 使幾何問題代數化、代數問題幾何化。在西元 1637 年 (明代崇禎十年) 笛卡兒的著作《幾何學》裡, 他用字母表之首的 a, b, c 表示常數, 字母表之尾的 x, y, z 表示變數。近代數學用變數 x 加上低指數, 例如用 $x_1, x_2, \ldots$ 來表示無窮多的變數。同理也可用 $a_1, a_2, \ldots$ 來表示無窮多的常數。

在西元十二世紀的宋、元時代, 中國人發明了「天元術」。初始只是研究一元變數 y 的多項式 (中文的數學書稱變數爲元, 就是來自天元術), 以後增加了元數, 最多能討論到某些四元的

多項式問題。天元術在宋、元代極盛, 達到中國古數學的頂峰。

(i) 多元多項式的標記法

我們先討論天元術如何表示一元多項式, 然後再談多元多項式。古人把圍棋盤中央的那點稱作「太極」(簡稱「太」), 用座標 $(0,0)$ 標記它。繼而畫一個垂直座標, 把棋盤分成四大正方塊。然後把多項式 $f(y)$ 的常數項放在「太」點; 設 y 變數爲「天元一」, 把 y 的係數放在 $(0,-1)$ 點, 把 y^n 的係數放在 $(0,-n)$ 點。這樣古人用一串係數, 寫出了一元多項式 $f(y)$ 或一元多項方程式 $f(y)=0$。這種用一列係數來表示多項式的方法, 也是現代電腦學所用的。顯然, 這種標記法適合電腦, 而丟番圖-笛卡兒的寫法比較適合人腦。

如果有第二個變數, 古人稱之爲「地元一」(即變數 x), 把 x 的係數放在 $(-1,0)$, 把二元多項式 $f(x,y)$ 的 x^my^n 的係數放在 $(-m,-n)$ 點。如果 x 的次數 m 和 y 的次數 n 都小於十, 則 $f(x,y)$ 最多只有一百項, 故而圍棋盤的左下角可容納所有的係數。

另一方面, 元代的朱世傑在《四元玉鑒》裡把元數推廣到四元 (即四變數), 令其爲天元 y、地元 x、人元 z 及物元 t。他增加的人元一 (即變數 z) 的位置在 $(1,0)$, 物元一 (即變數 t) 的位置在 $(0,1)$。但他無法把 xyz 的係數放在圖形的點上 (因爲點上放的是相鄰兩個變元之乘項的係數), 於是他只能把它放在空白處。由於點數及空白數的限制, 他只能寫出項數較少的四元多項式。假設四元多項式 $f(x,y,z,t)$ 的各元的次數都小於 10, 則它最多會有一萬項。如果用 $19\times 19=361$ 點的圍棋盤, 那麼僅有 $361/10^4=3.61\%$ 的係數可被標記出來。即使再加上 324 個空白方塊, 也只能容納 6.85% 的係數。

(ii) 消元法

處理多元多項方程式組的重要方法是「消元法」。朱世傑的《四元玉鑒》提出的消元法大致分爲「剔而消之」、「互隱通分相消」及「內外行相乘相消」等諸法。

現代數學認爲多元多項方程組的公解集合存在於高維空間, 所謂消元法就是把這個公解集合投影到低維空間。假定該集合是由有限個點組成的, 通過逐次向低維投影, 最後成爲一維空間的有限個點的集合, 遂可通過解一元方程式獲得。有了這個變元的值後, 將其代入原方程式組, 使變元數目得以減少, 如此問題逐步可解。這是當今代數幾何必教的題材, 整個過程的標準方法是十九世紀的英國數學家西爾維斯特 Sylvester 的析配消元法 Dialytic method of elimination。

近代的古數學史學者錢寶琮在《中國算學史》(臺灣九章出版社) 第十九章的 [四元消法] 小節中, 稱讚朱世傑的方法「與西爾維斯特用析配消元法用意相仿。惟朱世傑之消元法無行列式之應用, 不如析配法之簡捷耳」。這應該是謬贊。見錢氏書中 (第 151-152 頁) 列式 (1) 和 (2) 的二次式的例子。用朱世傑的方法, 錢氏得出一個消元式。若更進一步, 用原來 (1) 和 (2) 的係數代入錢氏所得的消元式, 則得出原來係數的五次式。而用西爾維斯特的消元法, 會得到一個

4×4 的行列式爲消元式; 這個行列式的每一項是原列式 (1) 和 (2) 的係數或 0, 故而是原來係數的四次式。五次式與四次式顯然是不同的, 朱氏消元法有「增根」的現象, 所以與西爾維斯特的消元法並不「相仿」。

現代學者李兆華在《四元玉鑒校正》(見互聯網) 的「四元消法的增根與減根問題」中, 指出朱氏消元法可能出現增根與減根, 並驗證了增減根的情況。在《四元玉鑒校正》的例子裡, 湊巧的是這種增根與減根, 都不是消元後所得的一元多項式的最大正實數根 (朱世傑用「開方除之即得」的是最大正實數根), 但這改變了多項式組的公解集合在一維的投影, 是數學不能容忍的。根據近世的代數幾何學裡的完備的 complete 射影幾何學, 最大正實數根在變化下沒有穩定性, 因此並無幾何意義。

近世的代數幾何學證明了西爾維斯特的「析配消元法」是正確的, 而朱世傑的消元法並不正確。但朱氏在十三世紀就提出消元法, 值得我們敬佩。

近代的古數學史學者李儼在《中國古代數學簡史》第六章中感歎道:「至於李冶的《鏡海測圓》和《益古演段》等著作中的問題, 大多數都是預先知道答案的一些人爲『編造』的題目」, 並未提供方法去解那些問題。中國古人是識貨的, 故而並不關心這些著作中的問題。中國宋、元時代的「增乘開方術」和「天元術」大部分失傳, 原因亦在此。

(7) 招差術與高階等差級數

我們用現代數值分析的觀念來解釋中國古代的「招差術」: 設 $f(n)$ 是次數小於 m 的多項式, 給定 $f(n)$ 在 $n = 1, 2, \ldots, m$ 這些等距點的值, 求函數 $f(n)$。

爲了方便討論, 我們定義 (i) $\{a, a, \ldots\}$ 是一個零階等差級數; (ii) $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ 是一階等差級數, 若 $a_n - a_{n-1} = a$ 是非零常數; (iii) 假設已定義有 $(m-1)$ 階等差級數, 且 $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}\}$ 是一個 $(m-1)$ 階等差級數, 則 $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ 是 m 階等差級數。

不難證明: 對任何零次一元多項式 $f(n)$, 則 $\{f(1), f(2), \ldots\}$ 是一個零階等差級數。對任何一次一元多項式 $f(n)$, 則 $\{f(1), f(2), \ldots\}$ 是一個一階等差級數。對任何 m 次一元多項式 $f(n)$, 則 $\{f(1), f(2), \ldots\}$ 是一個 m 階等差級數。

反之, 對任何零階等差級數 $\{f(1), f(2), \ldots\}$, 因爲 $f(1) = f(2) = \cdots$, 顯見 $f(n)$ 是零次多項式。對任何一階等差級數 $\{f(1), f(2), \ldots\}$, 令 $f(n) - f(n-1) = \cdots = f(2) - f(1) = a$, 則 $f(n) = f(n-1) + a = \cdots = f(1) + (n-1)a = an + f(1) + a$, 即 $f(n)$ 是 n 的一次多項式。

現在我們用元代天文學家郭守敬的《授時曆》中計算太陽速度的例子, 來說明二階等差級數對應一個二次多項式。

爲何要計算太陽速度? 按理說日蝕應該發生在陰曆初一, 但或許天文資料的小誤差會積累

成大誤差, 也或許別的原因, 造成曆法失修, 日蝕就有可能發生在陰曆初二或上個月的卅日。月蝕也有類似的差誤。到了北齊時, 天文學家知道了日月的速度是會變的, 因此把日月的速度考慮進來解決日蝕和月蝕的時間問題。故而定下朔日那天爲陰曆初一, 這種方法被稱爲「定朔法」。

衆所周知, 春分定在日夜等長的那天。中國原有的廿四節氣, 是把回歸年 (即陽曆年) 的一個冬至到下一個冬至所經過的時間, 等分爲廿四份而得的。這種被稱作「平氣法」的操作簡單方便, 中國人起初一直沿用它。漢武帝時的天文學家落下閎依據「平氣法」制定了「太初曆」, 用「無氣置閏」來規定閏月。由平氣法得到的春分日, 通常稱爲「平春分」, 比春分遲兩日。

以下討論的表, 取自郭守敬的《授時曆》: 第一排是觀測的時間, 把冬至到春分的天數 (88.91日) 分爲六段 (相應於六節氣。這裡因篇幅有限, 只列了前四段), 每一位元整數代表 14.82 日; 第二排是太陽的速度, 這個資料是一段時間觀察所得的平均值; 第三排是從左到右, 將第二排資料的後數值減前數值, 謂之一差; 第四排是後一差減前一差, 謂之二差。可見, 二差皆相同。根據這個表, 我們可以假定太陽速度對時間 n 而言, 是一個二階等差級數 $f(n)$。

時間	1	2	3	4
太陽速度	476.25	437.80	397.97	356.76
一差		-38.45	-39.83	-41.21
二差			-1.38	-1.38

讓我們建立一個如下的二次多項式 $g(n)$:

$$\begin{aligned} g(n) &= 476.25 - 38.45(n-1) - 1.38(n-1)(n-2)/2 \\ &= 513.32 - 37.07n - 1.38n(n-1)/2 \end{aligned}$$

不難看出 $f(1)=g(1)=76.25$, 類似地有 $f(2)=g(2)$, $f(3)=g(3)$, $f(4)=g(4)$. 令 $h(n)=f(n)-g(n)$, 可以證明 $h(0)=0$, 所以 $f(n)=g(n)$, 即得 (n) 是一個二次多項式。進一步說, 太陽的速度從冬至到春分, 是按照時間的二次多項式下降的。

一般來說, 如果 $\{f(1),f(2),\ldots\}$ 是 m 階等差級數, 則 $f(n)$ 是 m 次一元多項式。從宋代沈括的《夢溪筆談》首次提出隙積術, 到元代的朱世傑的《四元玉鑒》廣泛討論招差術, 中國古代數學家發現一元多項式的基元集 basis, $\left\{1, n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \ldots, \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\right\}$, 可以取代 $\{1, n, n^2, \ldots, n^m\}$, 使得寫出以 n 爲變元的 m 階等差級數 (即 m 次一元多項式) 變得非常容易。

讓我們回到節氣的問題。據現代數學家黃武雄編著的《中西數學簡史》, 明末淸初時, 「當傳教士東來 (西元1851年), 也正是曆法亟待修改的時候。明朝頒佈的『大統曆』其實就是郭守敬的授時曆的翻版, 沿用三百多年已不堪使用。明崇禎十六年, 明令採用西法。淸初編制曆法亦由傳教士掌管」。德國傳教士湯若望 Johann Adam Schall von Bell (西元 1591∼1666 年)

著力改造明代的曆法成爲「時憲曆」, 又名《西洋新法曆書》。之後受順治帝之命, 任欽天監的監正。這是中國歷史上最後一次修改曆法, 其成果一直流傳至今。

天文模型一直是古中國的天文學的弱項。西方的天文模型, 始於西元二世紀亞歷山大城的托勒密 Claudius Ptolemy 的地心論的九層天球模型。到了西元十六世紀, 哥白尼 Nicolaus Copernicus (西元 1473~1543 年) 提出日心論, 把托勒密天球模型的第四層的太陽與中心的地球交換, 又把第一層的月亮, 從行星降格爲衛星、移到地球附近, 形成了哥白尼的日心模型。第谷 Tycho Brahe (西元 1546 ~ 1601 年) 嘗試調合地心論與日心論。在第谷模型裡, 日、月繞地, 行星及恒星則繞日。

近代人李約瑟 Joseph Needham 在《中國科學技術史-天學》(第 670 頁) 贊湯若望的《西洋新法曆書》爲「一部包括當時所有科學知識的不朽巨著」。湯若望在順治年間 (西元 1644 ~ 1661 年) 用的是依據開普勒定律 Kepler laws 的西洋日心論。開普勒定律 (西元 1609~1619 年) 共有三條定律, 第一定律講述了地球繞太陽的軌道呈橢圓形, 而太陽處於這軌道的兩焦點之一; 由第二定律則導出地球最接近太陽時的速度最大 (即太陽的「視象速度」最快)。所以, 北半球的冬至, 日較近且較快; 夏至時, 則日較遠且較慢。

中國古代的曆法皆始於冬至, 並規定圓周角爲 $365\ \frac{1}{4}$ 度, 即規定太陽一天移一度 (相信太陽在作勻速運動)。到了西元六世紀的北齊, 天文學家張子信才發現太陽速度不等, 即所謂的「日躔」。實際上, 約西元前二世紀, 古希臘人 Hipparchus 已發現日、月的速度不等。湯若望改造了中國古曆法, 使之始於春分 (西方曆法皆始於春分), 規定那天太陽的位置是 0 度, 並採用了兩河流域的 360 度的圓周角。在太陽的視像軌道上, 按照中國通用的名稱, 每15 度賦以一節氣, 這個方法被稱爲「定氣法」。所以節氣的曆法實際上是陽曆, 因爲只與太陽有關。每個節氣的陽曆日期近乎固定, 而其陰曆日期則每年不同。從180 度 (秋分) 到 0 度 (春分), 日行較快, 故而節氣之間的歷時較短。綜上所述, 中國民間用的農曆 (即陰曆, 也稱「時憲曆」, 又名「西洋新法曆書」) 的節氣部分是湯若望把依據開普勒定律的西洋曆法, 配以中國的節氣名而成的; 其月份部分, 則是採用了中國古代的「定朔法」(以月之盈虧爲準) 而得的。

順治帝辭世後, 八歲的康熙帝繼位。湯若望遭仇外人士陷害, 去職、判淩遲。之後因爲北京發生了地震等自然災害, 淸政府以爲是天譴, 故孝莊太皇太后下令釋放湯若望、未執行死刑。湯若望老年潦倒而死, 一個科學家如此殞落。康熙帝親政後, 湯若望始得昭雪。

(8) 求圓周率的近似值

西元一世紀的《周髀算經》用圓周率 $\pi = 3$ (《聖經-舊約》中關於「銅海」的直徑與圓周長的討論, 可導出「智慧王」所羅門 King Solomon 用 $\pi = 3$); 西元二世紀的張衡用 $\pi = \sqrt{10} = 3.16\cdots$; 西元三世紀的劉徽用 $\pi = 157/50 = 3.14$; 西元五世紀的祖沖之用 π 的「密率」爲 $22/7 = 3.1426\cdots$ (即在他八百年前阿基米德的圓周率) , 這種「密率」的命名在

唐代李淳風對劉徽的《周髀算經注》的討論裡有敘述, 以後歷代也都定義「密率」爲 $22/7$。例如, 唐代的《劉孝孫細草》裡討論《張丘建算經》時, 凡提到「密率」皆爲 $22/7$。之後的王孝通在《緝古算經》中稱 $22/7$ 爲「圓率」。宋、元數學家用的圓周率, 或是 $\pi = 3$ (見著名天文學家郭守敬的《授時曆》), 或是「張衡率」$\sqrt{10}$, 或是「徽率」$157/50$, 或是「密率」$22/7$。到了明代, 朱載堉的《樂律全書》(1595 年) 用 $\pi = \sqrt{2}/.45 = 3.1427\cdots$。之後的邢雲路用 $\pi = 3.1213203$, 程大位用「智率」$= 3\frac{1}{8} = 3.125$ (「智率」恰好等於兩河流域用的 $25/8$), 方以智用 $\pi = 52/17 = 3.06\cdots$。在淸代的康熙朝, 袁士龍、顧長發用「智率」$= 3.125$。綜上所述, 並無古人提到 $355/113$ 是圓周率的近似值, 更無人稱其爲「祖沖之密率」。

淸代乾隆朝設立四庫全書館, 整理古籍。古人云「四庫全書出, 而古書亡」, 皆因朝廷控制印書; 可刪去朝廷不喜的文字, 也可添增臣工偏愛的段落, 故而原有的古書不見了。四庫全書館出了兩本與圓周率有關的書:《隋書》與元末趙友欽的《革象新書》。《隋書》裡提到祖沖之發現了 $3.1415926 <$ 圓周率 < 3.1415927, 提及「密率: 圓徑一百一十三, 圓週三百五十五 (即 $355/113$)。約率: 圓徑七, 圓週二十二 (即 $22/7$))。《革象新書》裡提到圓周率爲 3.141592。

中國古代出版了不少僞書 (各國都出過許多僞書和假古董)。例如《管子》號稱是春秋時管仲寫的, 可書裡卻有管仲身後西施的事, 顯然《管子》是僞書, 它被認爲是漢朝劉向編輯戰國材料而成的書。又例如《周髀算經》, 書中寫到周公、商高、陳子、榮方等人, 舊題周公著。但《漢書·藝文志》並沒有提過此書, 各東漢以前的古書亦未提及此書。《周髀算經》只能算是西元一世紀東漢的書, 也可能更遲。趙爽的《周髀算經-注》出現在西元三、四世紀。《周髀算經》第一次出現在正史中, 是唐朝的《隋書-經籍志-天文類》。

當年從事《四庫全書》編輯的館臣戴震 (即戴東原), 主張「西學是中學流傳出去的」; 同時代的阮元主編的《疇人傳》(中國古代科學家的傳記) 裡就寫有:「西法實竊取於中國」。這兩人的觀點是沒有根據的。當時經過雍正、乾隆的閉關鎖國, 中國文人妄自尊大的事例很多, 他們大多是「乾嘉學派」的人。我們發現《隋書》中關於祖沖之的圓周率的上、下限及「祖沖之密率」, 不合常理地未被任何古代中國數學家引用。況且,《四庫全書》開舘時, 這兩個資料已從歐洲流入中國, 因此有館臣們把它們竄入古書的可能。而比《四庫全書》版更古的《隋書》舊版已不復存在。假定舊版《隋書》裡確實有祖沖之的 $3.1415926 <$ 圓周率 < 3.1415927, 則元末趙友欽的《革象新書》裡的圓周率 3.141592 就不合邏輯: 因爲這資料還不如千年之前的結果。再者, 經過明、淸兩代, 趙友欽的這個資料並無任何人引用, 也是怪哉。

總結

數學是全人類的學問。無論是誰的發明, 都值得普天之下的人歡喜讚頌。地球上有黑、白、黃、棕色的人, 世界上有不同的民族, 這是基於地理與文化的分類, 不是生物學的分類。事實上, 各人種可以混血生殖, 故從生物學的角度來看, 所有民族都屬於同一種人。中國古代有這樣一個

故事: 春秋時, 楚王到雲夢大澤打獵, 不愼遺失了他的寶弓, 其隨從要沿原路回去找, 楚王說:「楚人失弓, 楚人得之。又何求之」。孔子聽到這個故事後說:「人失弓, 人得之, 何必曰楚」(見《孔子家語》)。我們看古代史, 要有這樣一個「何必曰楚」的胸襟。中國傳統精神提倡「天下一家, 民胞物與」, 即全天下人都是同胞, 萬物皆爲朋友。我們應不著眼於古今中外的分歧, 做各民族創造發明的繼承者, 同心協力開拓人類的新文明。如果一個民族不能承認別人的優點, 那將會自取孤立而走向衰亡。

—本文作者莫宗堅、黃蘋任教美國 Purdue 大學—