數學傳播 47卷2期, pp. 101-106

仿射幾何觀點下四等分三角形面積的尋美之旅

李織蘭 · 蔣曉雲* · 王凱成

把一個三角形剖分成四個面積相等的三角形的方法很多, 圖1就是一種具有和諧之美的四等分三角形面積的剖分方法: 令人驚奇三組 (B, D, E 三點; C, E, F 三點; A, F, D 三點)「三點共線」和諧共存現象, 滿足 $S_{\triangle ADB}=S_{\triangle BEC}=S_{\triangle CFA}=S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$ 完美融洽的平衡條件。爲了表述方便, 我們把圖 1 稱爲四等分三角形面積的「黃金剖分」。

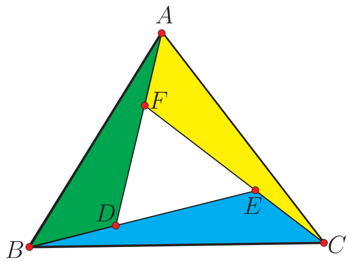

圖1

經查資料, 沒有找到用傳統的平面幾何尺規作圖畫出這個圖形的相關文獻和方法。對任意的三角形而言, 用初等幾何的方法畫出這個美麗的構圖卻是一個難題。

我們從仿射幾何的角度, 根據仿射變換的不變性質 (量), 將有關四等分任意三角形面積的「黃金剖分」問題轉化爲特殊等腰直角三角形的命題, 巧妙地將一般問題特殊化。用黃金分割比和尺規作圖的方法畫出了這個「和諧美麗」剖分構圖, 體現理性探索精神, 展示和諧之美和邏輯之美。

1. 仿射變換化歸問題

仿射幾何學是高等幾何的重要組成部分, 仿射變換是仿射幾何學的核心內容, 也是應用高等幾何知識解決初等幾何問題的重要通道。我們從仿射幾何的角度, 開啟了四等分三角形面積的“黃金剖分”的尋美之旅。

平面上的仿射變換在坐標系下可表示式爲:

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{cases}, \quad 其中 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0。$$

*通訊作者。

顯然, 它由平面上不共線的三對對應點唯一確定可逆的仿射變換, 且逆變換也是仿射變換。

仿射變換具有保持同素性和結合性不變 (如它將共點線變為共點線, 將共線點變為共線點)、保持兩直線的平行性不變、保持共線三點的簡比不變、保持兩個封閉圖形 (如三角形、多邊形等) 的面積比不變等等仿射性質。

任意三角形的「黃金剖分」問題的條件和結論都滿足圖形的仿射性質, 那麼只要證明「黃金剖分」的命題對一個特殊的三角形成立, 便可斷言「黃金剖分」的命題對任意三角形也成立, 從而使解題的難度大大降低, 問題就能輕而易舉地得到解決。

對於任意三角形 ABC 的「黃金剖分」, 作一個仿射變換 $\sigma: R^2 \to R^2$, 使得 $\sigma(A) = A'(0,4)$, $\sigma(B) = B'(0,0)$, $\sigma(C) = C'(4,0)$。A, B, C 為三角形的三個頂點, 它們是平面上 3 個不共線的點, A', B', C' 也為平面上 3 個不共線的點, 三對對應點唯一確定可逆的仿射變換。仿射變換 σ 將三角形 ABC 經過一個仿射變換使之變換成等腰直角三角形 $A'B'C'$, 如圖 2。

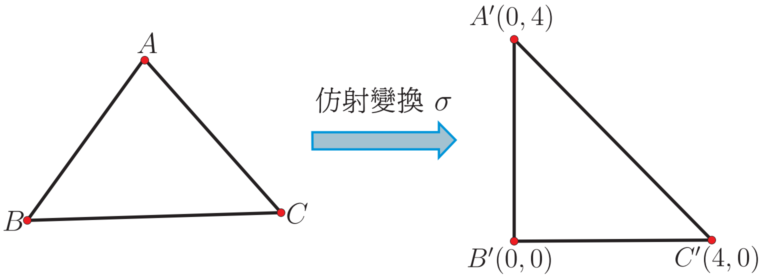

圖 2

為了找到規律, 首先我們對等腰直角三角形 $A'B'C'$ 進行「黃金剖分」。

2. 探究特例尋找特徵

在圖 3 中, $A'B' = 4$, $B'C' = 4$, $\angle A'B'C' = 90°$, 直角三角形 $A'B'C'$ 面積為 8, A'、B'、C' 的座標依次為: $A'(0,4)$, $B'(0,0)$, $C'(4,0)$。

將直角三角形 $A'B'C'$ 三邊四等分, G', H' 是 $A'B'$ 邊上的兩個四等分點; K', L' 是 A', C' 邊上的兩個四等分點; S', T' 是 $B'C'$ 邊上的兩個四等分點。連接 $K'S'$, $G'L'$, $H'T'$。兩兩相交於 M', N', P'。因為 $S_{\triangle A'D'B'} = S_{\triangle B'E'C'} = S_{\triangle C'F'A'} = S_{\triangle D'E'F'} = \frac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}$ 所以, 點 D' 必須線上段 $K'S'$ 上, 點 E' 必須線上段 $G'L'$ 上, 點 F' 必須線上段 $H'T'$ 上。不妨設 D', E', F' 三點座標為 $D'(1, y_{D'})$, $E'(x_{E'}, 1)$, $F'(x_{F'}, y_{F'})$。

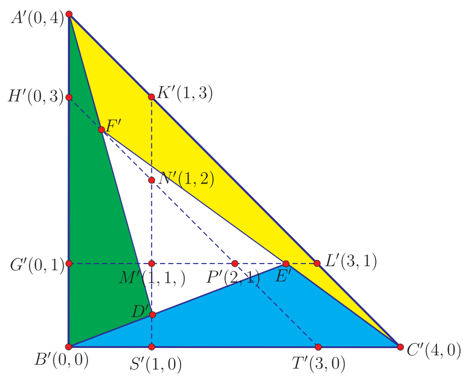

圖 3

由於 B', D', E' 共線, 則有斜率 $k_{B'D'}=k_{B'E'}$, $\dfrac{y_{D'}-0}{1-0}=\dfrac{1-0}{x_{E'}-0}$, 即

$$x_{E'}\cdot y_{D'}=1; \tag{1}$$

由於 A', F', D' 共線, 則有斜率 $k_{A'F'}=k_{A'D'}$, $\dfrac{y_{F'}-4}{x_{F'}-0}=\dfrac{y_{D'}-4}{1-0}$, 即

$$y_{F'}-4=x_{F'}(y_{D'}-4); \tag{2}$$

由於 C', E', F' 共線, 則有斜率 $k_{C'E'}=k_{C'F'}$, $\dfrac{1-0}{x_{E'}-4}=\dfrac{y_{F'}-0}{x_{F'}-4}$, 即

$$x_{F'}-4=(x_{E'}-4)\cdot y_{F'}; \tag{3}$$

直線 $H'T'$ 的方程爲: $x+y=3$, 點 F' 線上段 $H'T'$ 上, 所以

$$x_{F'}+y_{F'}=3. \tag{4}$$

由 (2), (4) 式, 得 $y_{F'}=\dfrac{3y_{D'}-8}{y_{D'}-3}$, 由 (3), (4) 式, 得 $y_{F'}=\dfrac{-1}{x_{E'}-3}$。

消去 $y_{F'}$ 得: $8x_{E'}+8y_{D'}-3x_{E'}y_{D'}=21$, 聯立 (1), (2), (3), (4) 式, 消去 $x_{F'}$, $y_{F'}$ 得:

$$\begin{cases} x_{E'}+y_{D'}=3, \\ x_{E'}y_{D'}=1. \end{cases} \tag{5}$$

求解方程組 (5) 得到兩組解:

第一組解: $x_{E'}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y_{D'}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。進一步可求出 $x_{F'}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_{F'}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 。

在圖 3 中, M', D', S' 座標爲: $M'(1,1)$, $D'\Big(1,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)$, $S'(1,0)$, 我們驚奇地看到了黃金分割比: $\dfrac{M'D'}{M'S'}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此, D' 點爲線段 $M'S'$ 的黃金分割點。

P', E', L' 座標爲: $P'(2,1)$, $E'\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},1\Big)$, $L'(3,1)$。計算 $\dfrac{P'E'}{P'L'}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此, E' 點爲線段 $P'L'$ 的黃金分割點。

點 N', F', H' 座標爲: $N'(1,2)$, $F'\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)$, $H'(0,3)$, 計算 $\dfrac{N'F'}{N'H'}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此, F' 點爲線段 $N'H'$的黃金分割點。

圖 3 中有三組三點共線: B', D', E' 三點共線; C', E', F' 三點共線; A', F', D' 也三點共線, 且 $S_{\triangle A'D'B'}=S_{\triangle B'E'C'}=S_{\triangle C'F'A'}=S_{\triangle D'E'F'}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}$。因此, 圖3是等腰直角三角形 $A'B'C'$ 進行「黃金剖分」的構圖。

第二組解: $x_{E'}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_{D'}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$。可以求出 D' 點座標: $D'\Big(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)$, E' 點座標: $E'\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1\Big)$, F' 點座標: $F'\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)$。

在圖 4 中, 經計算可判斷點 D',E',F' 分別為線段 $N'K'$、$M'G'$ 和 $P'T'$ 的黃金分割點, 三組三點共線: B',D',E' 共線; C',E',F' 共線; A',F',D' 也共線, 且 $S_{\triangle A'D'B'}=S_{\triangle B'E'C'}=S_{\triangle C'F'A'}=S_{\triangle D'E'F'}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}$。因此, 圖 4 也是等腰直角三角形 $A'B'C'$ 進行「黃金剖分」的構圖。

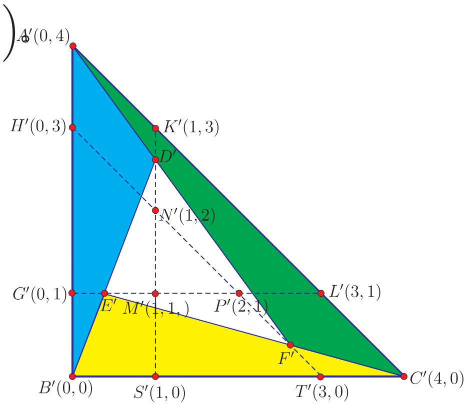

圖 4

3. 特殊一般仿射等價

三角形具有仿射等價性: 我們要證明一個有關三角形的命題, 如果這個命題的條件和結論都是圖形的仿射不變性質, 那麼只要證明命題對特殊三角形成立, 便可斷言命題對任意三角形也成立。

三角形的「黃金剖分」問題的條件和結論都滿足圖形的仿射性質, 上述證明了「黃金剖分」的命題對特殊的三角形 $A'B'C'$ 成立, 可以斷言「黃金剖分」的命題對任意三角形也成立, 從而使解題的難度大大降低, 輕而易舉地解決了問題。

仿射變換的逆變換 σ^{-1} 將等腰直角三角形 $A'B'C'$ 的「黃金剖分」構圖變換成任意三角形 ABC 的構圖, 如圖 5 和圖 6。

仿射變換將共點線變為共點線; 將共線點變為共線點; 將兩條平行直線 (線段) 變為兩條平行直線 (線段); 兩條相交直線 (線段) 變為兩條相交直線 (線段); 兩條平行直線段之比是仿射不變量; 兩個三角形面積之比是仿射不變量, 甚至兩個封閉圖形面積之比是仿射不變量。

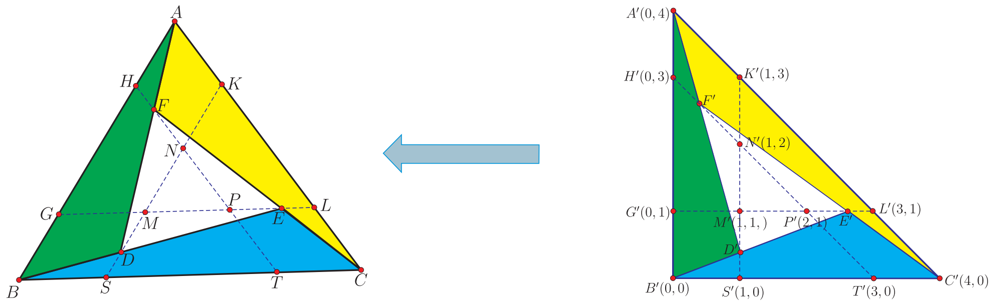

圖 5

如圖 5 (左), 在三角形 ABC 的構圖中, 由仿射性質可以得到:

(1) G, H 爲 AB 邊上的四等分點, K, L 爲 AC 邊上四等分點, S, T 爲 BC 邊上四等分點;

(2) D, E, F 分別爲線段 MS、線段 PL 和線段 NH 的黃金分割點;

(3) 三組「三點共線」: B, D, E 三點共線; C, E, F 三點共線; A, F, D 也三點共線;

(4) $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle BEC} = S_{\triangle CFA} = S_{\triangle DEF} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle ABC}$。

於是得到的是任意三角形 ABC「黃金剖分」的一種構圖。

等腰直角三角形 $A'B'C'$ 的“黃金剖分”構圖有兩種。因此, 任意三角形 ABC 的「黃金剖分」構圖也有兩種, 如圖 6。

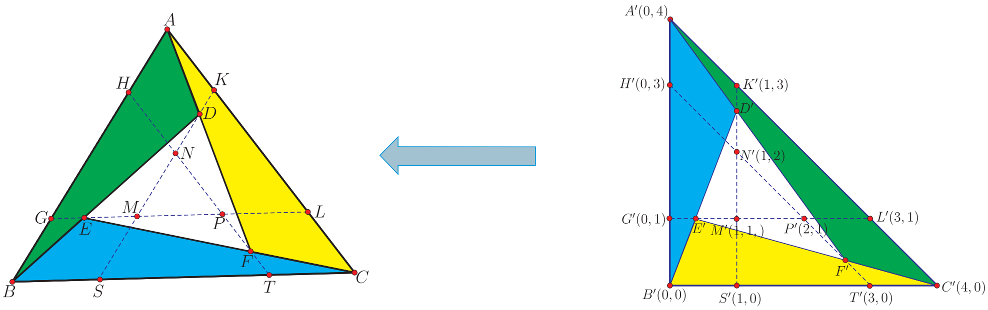

圖 6

4. 黃金比例構建和諧

將三角形 ABC 的三邊四等分, G, H 爲 AB 邊上的四等分點, K, L 爲 AC 邊上四等分點, S, T 爲 BC 邊上四等分點, 連接 KS, GL, HT, 分別作線段 MS、線段 PL 和線段 NH 的黃金分割點 D, E, F, 連接 AD, BE, CF, 得到四等分三角形 ABC 面積的「最具和諧美」的「黃金剖分」的完美構圖。

我們還可以作線段 MG, PT, NK 的黃金分割點 D, E, F, 可以得到另一種四等分三角形面積的「黃金剖分」的構圖。

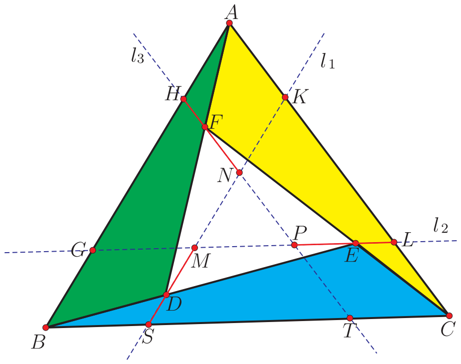

圖 7

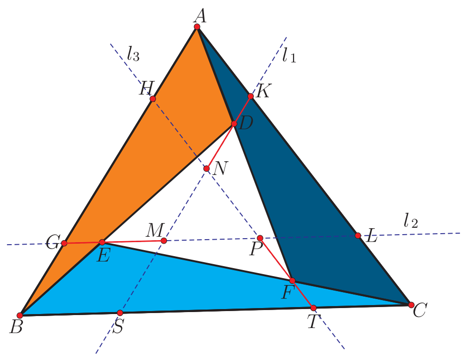

圖 8

黃金分割比例關係構成了豐富、和諧、美麗的世界。圖形中有了黃金分割比率, 可以達到一種完美融洽與平衡的效果。令人驚奇三組「三點共線」和諧共存現象, 居然是由黃金分割比確定, 從而, 產生了令人愉悅的完美構圖效果。利用仿射幾何的方法探究三角形面積四等分「黃金剖分」問題, 從而體會從特殊到一般的研究問題的方法。

參考文獻

1. 王凱成。四等分三角形面積問題再探[J]。中學數學教學參考, 2019(17), 56-57。

—本文作者任教中國桂林師範高等專科學校—