數學傳播 47卷2期, pp. 90-100

關於“百雞問題”術文的理解及其他

程 釗

一、引言

百雞問題出自西元5世紀《張丘建算經》卷下最後一問 ([1, p.293]):

> 今有雞翁一, 直錢五; 雞母一, 直錢三; 雞雛三, 直錢一。凡百錢, 買雞百隻。問雞翁、母、雛各幾何?

在這之後的一千多年時間裡, 該題或其同類型題目不但在中算家的著作中多次出現, 而且遠播海外, 成爲世界數學史上最爲著名的不定方程問題之一 ([2, p.229])。然而, 儘管張丘建本人正確地給出了問題的全部三組正整數解, 但其原始術文卻十分簡略, 只有「雞翁每增四, 雞母每減三, 雞雛每益三」十五個字, 後人由此並不能推知張丘建的實際解法。現存唯一傳世的南宋刻本在此術後附有評論稱:「此問若依上術推算, 難以通曉。然較之諸本並同, 疑其從來脫漏闕文。」我們現在知道, 這個傳本並不完整 ([3, p.116])。如按上述說法, 它有可能在甄鸞爲其作注時就已殘缺, 而百雞問題剛好位於該傳本的最後一題, 其以下部分缺失的可能性很大。另外, 甄鸞在他爲之作注的另一本書《數術記遺》(西元 6 世紀) 中[1], 曾引兩則百雞問題 ([5, p.351]):

> 今有雞翁一隻直五文, 雞母一隻直四文, 雞兒一文得四隻。今有錢一百文, 買雞大小一百隻。問各幾何?
>
> 今有雞翁一隻直四文, 雞母一隻直三文, 雞兒三隻直一文。今有錢一百文, 還買雞大小一百隻。問各幾何?

前一題有一組解; 後一題有兩組解, 但甄鸞只給出一組, 說明他並沒有掌握百雞問題的一般解法。而按他的說法則是將其歸入「既舍數術, 宜從心計」([5, p.350]) 之類[2], 這也從另一方面佐證了我們關於甄鸞並沒有看到完整的《張丘建算經》的判斷。

事實上, 自甄鸞始直到 19 世紀, 雖然有許多著作都討論過這個問題, 但都未能找到一般解法。至1815年, 駱騰鳳撰《藝遊錄》二卷, 於「衰分補遺」章討論此題 ([6, pp.181-182]), 才第一次用大衍求一術給出該問題的一般解法([7, pp.112-114])。但這卻是一種「殺雞用牛刀」的

[1] 錢寶琮認爲此書實爲甄鸞假託徐岳所作 ([4, p.343])。

[2] 後面我們會對此給出一種解釋。

做法。駱氏還批評謝察微補充的解法「徒以臆測、不憑算理」, 並宣稱「今以大衍法求之悉合」, 似乎暗示《張丘建算經》的作者也以同樣方法獲得其解答。然而大衍求一術的出現相去百雞問題有近八個世紀[3], 從編史學的角度講, 則是一種「年代錯置」(anachronism)。其後, 丁取忠在《數學拾遺》(1851) 中採取先假設雞翁數爲0, 將一個三元一次不定方程組轉化爲二元一次方程組求定解[4], 得雞母、雞雛數, 再依《經》術增減率得三組解 ([9, p.19])。但此法顯得很不自然, 特別是需按原題術文拼湊獲解更顯本末倒置。有一種觀點認爲, 丁取忠的解法更接近於張丘建生活年代的具體條件([10, p.311])。筆者則不敢苟同, 因爲在不知道術文的前提下, 很難想像能通過猜測和拼湊獲得全部三組解。再後來, 時曰醇吸取兩者特別是後者的方法並加以改進, 著《百雞術衍》(1861) 二卷, 對百雞問題進行了系統研究([11, p.123])。雖然他的工作使百雞題意「燦然大著」([9, p.19]), 但其方法本質上仍未脫前兩者之窠臼。並且後兩者在求解過程中還會遇到「以法除實不盡」的情況而不能通過, 需另立它術([7, p.114])。那麼張丘建又是如何得到這三組解的呢? 時至今日, 學者們對此似乎仍沒有取得一致意見([12, p.255])。鑒於此, 筆者不揣冒昧, 擬在下面給出一己之見, 以就教於同仁。

二、對「百雞術」的一種解讀

由於原始文獻的闕漏, 因此除非有新的考古發現, 對於“百雞問題”術文的任何理解都只能是一種推測, 無法以真實性來要求, 只能以合理性來評判。在這方面, 筆者認爲「吳文俊原則」爲我們提供了一個重要的標準。這就是 ([13, p.1]):

原則一: 所有研究結論應該在倖存至今的原著的基礎上得出;

原則二: 所有結論應該利用古人當時的知識、輔助工具和慣用的推理方法得出。

當然, 堅持「吳文俊原則」, 並不意味著一定要排斥現代數學符號和表達式, 更可取的態度是在尊古主義 (antiquarianism) 與今釋主義 (presentism) 之間尋求一種平衡 ([14, p.43])。

就百雞問題而言, 其預設知識和求解工具應從其前存在的數學典籍中去尋找。在這方面,《九章算術》包括劉徽注中的分數運算理論和方程理論([12, pp.98-106; 151-160; 247-251]) 就提供了所需的預設知識和求解工具[5]。正如討論這一問題的學者都認可的那樣, 我們設雞翁、雞母、雞雛數分別爲 x, y, z 隻, 於是得到如下的三元一次不定方程組:

$$\begin{cases} x+y+z=100, & (1) \\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100. & (2) \end{cases}$$

[3]雖然物不知數問題出現在百雞問題之前, 但沒有任何證據能說明其求解程式中用到的乘率是由大衍求一術得出, 實際上它們不難通過試算得出([8, p.271])。

[4]此即所謂的“二色差分法”。

[5]有學者已經列表詳細指出了兩部著作之間的承繼關係([3, pp.111-112])。

以 3「遍乘」(2) 再「直除」(1), 即得

$$14x+8y=200, \tag{3}$$

這是一個標準的二元一次或線性不定方程。後來的研究者在解百雞類問題過程中無論成功還是遭遇困難, 主要面對的就是求這樣一個線性不定方程正整數解的問題。方程 (3) 還可以進一步簡化爲

$$7x+4y=100, \tag{4}$$

通過「損益」和分數運算[6]等一系列操作: $7x = 100-4y$, $\frac{7}{4}x = 25-y$, 最後可以化成 $x=\frac{4}{7}(25-y)$。根據題意, x, y, z 必須都爲正整數, 因此這裡 $25-y$ 的值只能是 7; 14; 21, 於是可得百雞問題的三組解爲: $\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases}$; $\begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases}$; $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$。我們再來看甄鸞給出的兩道百雞問題。與之相應的不定方程組分別爲:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+4y+\frac{1}{4}z=100 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x+y+z=100 \\ 4x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}。$$

對照原百雞問題不難看出, 這兩個方程組分別是將 (2) 中的 3 變更爲 4 以及 5 變更爲 4 所得。由它們導出的線性不定方程分別是 $19x+15y=300$ 和 $11x+8y=200$。如果注意到原百雞問題第一組解中 x 的值就是 (4) 中 y 的係數, 便可從這兩個不定方程直接類比得出 $x=15$ 和 $x=8$ 分別是這兩個題中的雞翁數, 從而分別得到對應的解。但這樣憑對數字的敏感[7]和類比得出的解答實在毫無道理可言, 這或許就是甄鸞所謂「既舍數術, 宜從心計」的緣由。也正因爲如此, 他沒辦法求出第二個問題的另一組解。實際上從第二個不定方程可得 $x=\frac{8}{11}(25-y)$, 依題意, 令 $25-y=11; 22$, 即得兩組解爲: $\begin{cases} x=8 \\ y=14 \\ z=78 \end{cases}$; $\begin{cases} x=16 \\ y=3 \\ z=81 \end{cases}$。在此我們甚至可以作出一個大膽推測[8] : 百雞問題的術文乃出自甄鸞之手。如果原術確實「脫漏闕文」, 那麼這就並非無稽之談。以甄鸞對於數字的敏感, 從已知的三組解看出它們之間的增減關係也並非難事。而由於沒有找到求解通法, 才有「無術可窮盡其理」([1, p.293]) 的感慨, 和將其歸入「宜從心計」之無奈。

[6]分數運算也是《張丘建算經》的一大算法特色([3, pp.121-125])。

[7]這一點從甄鸞造出這兩題的方式可窺見一斑。阮元《疇人傳》曾評價說([15, p.117]):“鸞好學精思, 富於論譔, 誠數學之大家矣。” 此處強調系筆者所加, 顯然“數學”二字並無今日之涵義。

[8]這一推測並非筆者首先提出,《四庫全書提要》已有此一說 ([3, p.113])。

楊輝在《續古摘奇算法》(1275) 卷下([16, pp.1106-1107]) 曾於「三率分身」名目下引三個百雞類問題。第一個爲百雞問題原題。後兩題分別爲:

> 出錢一百, 買溫柑、綠橘、匾橘共一百(枚)。只云溫柑一枚七文, 綠橘一枚三文, 匾橘三枚一文, 問各買幾何?

> 醇酒每㪷七貫, 行酒每㪷三貫, 醨酒三㪷值一貫。今支一十貫, 買酒十㪷, 問各幾何?

設 x, y, z 分別是溫柑、綠橘、匾橘數或醇酒、行酒、醨酒量, 由這兩題可列出方程組分別爲:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 7x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x+y+z=10 \\ 7x+3y+\dfrac{1}{3}z=10 \end{cases}。$$

我們先來看後一題。據楊輝所述, 該題來自某一寫本。楊輝記載的原始解法是先令 $y=1$, 將這個三元一次不定方程組變成一個適定的二元一次方程組, 再解得 $x=0.6$, $z=8.4$。但這裡出現了一個問題, 原本要求正整數解, 卻得出了小數 ([17, pp.352-353])。其實, 這個三元一次不定方程組根本就沒有正整數解[9], 只有一組非負整數解([18, p.616]): $x=1$, $y=0$, $z=9$。但這並非題目的原意。出現這種情況的原因在於計量單位的選擇。事實上, 如果選用升而不是㪷作爲計量單位, 所列方程組應爲:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ \dfrac{7}{10}x+\dfrac{3}{10}y+\dfrac{1}{30}z=10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=100 \\ 7x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 \end{cases}。$$

與前一題相同。不過, 該題的解法卻預示了後來丁取忠和時曰醇這方面的工作([19, p.109])。

再來看前一題。據楊輝所述, 該題摘自《辨古通源》一書。目前此書已失傳。令人印象深刻的是這裡記錄的解法:

《辯古通源》算草曰: 置錢一百, 以三因, 爲三百分, 內減共數一百枚, 餘二百分, 爲實。三因溫柑價得二十一, 內減一, 餘二十分。又三因綠橘價得九, 內減一, 餘八分。	$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 7x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$ $21x+9y+z=300$ $20x+8y=200$
並之得二十八, 爲法。除實, 得六枚, 乃溫柑、綠橘各六枚之數。實餘三十二分。	$20+8=28$ $200=28\times 6+32$
以原法二十八減去溫柑二十分, 餘八, 除實得四, 加先得綠橘共十枚之數。	$28-20=8$ $32=8\times 4$ $6+4=10$
以溫柑、綠橘共十六枚減都數一百, 餘八十四即匾橘之數。	$100-(6+10)=84$

[9] 導出的線性不定方程爲 $5x+2y=5$, 由此得 $y=\frac{5}{2}(1-x)$, 只能取 $1-x=0$ 求非負整數解。

這應該是目前所知關於如何從一個三元一次不定方程組導出一個線性不定方程的最早文字記載。解題程式的後半部分也值得關注。將其串聯起來就是:

$$200=28\times 6+32=(20+8)\times 6+8\times 4=20\times 6+8\times(6+4)=20\times \boxed{6}+8\times \boxed{10}\text{。}$$

可見, 6 和 10 兩數適合方程 $20x+8y=200$。這並非拼湊所得, 而是有著內在的算理依據。因爲該方程可以變形爲 $28x+8(y-x)=200$, 這意味著只要新方程有正整數解, 那麼原方程必然有正整數解; 而此時以 28 除 200, 嘗試置商使得餘數爲 8 的倍數, 即可按上述程序求出一組解。其實, 可以將所要求解的方程化爲最簡形式 $5x+2y=50$, 然後再施行上述程序:

$$50=7\times 6+8=(5+2)\times 6+2\times 4=5\times 6+2\times(6+4)=5\times \boxed{6}+2\times \boxed{10}\text{。}$$

而原題實際上有四組解。由 $5x+2y=50$ 得出

$$x=\frac{2}{5}(25-y),$$

依題意, 令 $25-y=5; 10; 15; 20$, 則可得四組解爲:

$$\begin{cases}x=2\\ y=20\\ z=78\end{cases};\quad \begin{cases}x=4\\ y=15\\ z=81\end{cases};\quad \begin{cases}x=6\\ y=10\\ z=84\end{cases};\quad \begin{cases}x=8\\ y=5\\ z=87\end{cases}\text{。}$$

截至目前, 我們所討論的百雞類問題涉及的線性不定方程 $ax+by=c$ (a,b,c 爲正整數), 除了都具有非負整數解外[10], 還有一個共同特點, 就是它們的常數項可以被兩個未知數的係數中至少一個整除。歷史上第一個相反方面(即常數項不能被兩個未知數係數中的任何一個整除)的例子是由吳敬在《九章算法比類大全》(1450) 中提供的。其第二卷「粟米」載有兩道百雞類問題 ([21, pp.120; 125])。前一題是以詩歌形式表述的百雞問題原題。後一題爲:

九文買個桃, 二文買個梨, 一文六個杏。百文買百枚。

列出不定方程組就是:

$$\begin{cases}x+y+z=100\\ 9x+2y+\dfrac{1}{6}z=100\end{cases}\text{。}$$

吳敬給出的解法是先令 $z=66$, 得適定方程組 $\begin{cases}x+y=34\\ 9x+2y=89\end{cases}$, 解得 $x=3$, $y=31$; 相當於沿用了楊輝《續古摘奇算法》中解「醇酒、行酒、醨酒」題的做法[11]。如果先從上述不定方程組導出線性不定方程 $53x+11y=500$, 我們會發現 53 和 11 都不能整除 500。

[10] 可以證明, 如果 a,b,c 爲正整數, $(a,b)=1$, 且 $c>ab-a-b$, 則不定方程 $ax+by=c$ 有非負整數解 ([20, pp.12-13])。這裡 $c>ab-a-b$ 是充分條件, 例如下面所述吳敬給出的題就不滿足, 但它仍有正整數解。

[11] 吳敬此題顯然是爲適合其解法所造, 然而在打破百雞類問題所列方程組的第二個方程中有兩個未知數的係數互爲倒數這一傳統上, 此題並不是第一個。在它之前, 印度和阿拉伯數學家已經造出了這樣的問題, 對此可以參看有關文獻([22, pp.361; 438; 498-500])。

因此, 我們可以區分出兩種類型的百雞問題：前面討論的都是第 I 型百雞問題; 現在的這個題目則屬於第 II 型百雞問題。對於此題我們可以給出下面的求解程式:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{53}(500-11y) = \frac{1}{53}(11\times 45 - 11y + 5) = \frac{1}{53}(11\times(31+14) - 11y + 5) \\ &= \frac{1}{53}(11\times 31 - 11y + 11\times 14 + 5) = \frac{1}{53}(11\times 31 - 11y + 159) = \frac{11}{53}(31-y) + 3. \end{aligned}$$

依題意, 要求正整數解, $31-y$ 的值只能是 0, 於是得一組解 $\begin{cases} x=3 \\ y=31 \\ z=66 \end{cases}$。這裡的求解步驟是 500 和 11 先做帶餘除法, 而求解的關鍵在於將商 45 分出一部分, 使得它與 11 的乘積加上餘數 5 是 53 的倍數。

一般地, 我們有下面的定理(爲了討論方便起見, 這裡我們將正整數解的要求放寬爲非負整數解, 並且不失一般性, 只針對 y 的係數分情況討論):

定理: 設 a, b, c 爲正整數, 如果

$$ax + by = c \tag{*}$$

有非負整數解, 並且 $c = bq + r$ $(0 \le r < b)$, 則存在非負整數 $0 \le q_0 \le q$, 使得 (*) 的非負整數解可以表示成

$$\begin{cases} x = \dfrac{bq_0 + r}{a} + bt \\ y = q - q_0 - at \end{cases}, \qquad \left(0 \le t \le \left[\frac{q-q_0}{a}\right]\right)。$$

證明: 假設 (x_0, y_0) 是 (*) 的一組非負整數解, 則有

$$ax_0 + by_0 = c = bq + r < bq + b = b(q+1)。$$

因 $ax_0 \ge 0$, 故有 $by_0 < b(q+1)$, 從而有 $y_0 < q+1$, 或 $y_0 \le q$。

另由已知條件及 (*) 得

$$x = \frac{1}{a}(c - by) = \frac{1}{a}(bq - by + r)。$$

(I) 若 $r = 0$, 取 $q_0 = 0$, 則由 $x = \frac{b}{a}(q-y)$, 令 $q - y = at$, 可得 (*) 的非負整數解爲

$$\begin{cases} x = bt \\ y = q - at \end{cases}, \qquad \left(0 \le t \le \left[\frac{q}{a}\right]\right);$$

(II) 若 $0 < r < b$, 取 $q_0 = q - y_0$, 因 $0 \le y_0 \le q$, 故有 $0 \le q_0 \le q$。在此情形, 有

$$x = \frac{1}{a}(bq - by + r) = \frac{1}{a}(b(y_0 + q_0) - by + r) = \frac{b}{a}(y_0 - y) + \frac{bq_0 + r}{a},$$

上式是由 (*) 變形而來, 因此對 $x=x_0$, $y=y_0$ 恒成立, 代入得 $\dfrac{bq_0+r}{a}=x_0$, 也爲非負整數。於是令 $y_0-y=at$, 並注意到此時 $y_0=q-q_0$, 可得 (*) 的非負整數解爲

$$\begin{cases} x=\dfrac{bq_0+r}{a}+bt \\ y=q-q_0-at \end{cases}, \qquad \left(0\le t\le\left[\frac{q-q_0}{a}\right]\right)。 \qquad \square$$

顯然, $r=0$ 相應於第 I 型百雞問題; $0<r<b$ 則相應於第 II 型百雞問題。對於第 I 型百雞問題, 證明過程 (I) 是構造性的, 即它也提供了求解第 I 型百雞問題的具體步驟[12]。對於第 II 型百雞問題, 證明過程 (II) 則是存在性的, 用此程式求解第 II 型百雞問題的關鍵是找到 q_0, 但證明本身並沒有提供尋找的方法。不過當數據不很大時, 我們可以通過試算找到, 即嘗試取 $n=1,2,\ldots$, 使得 $bq_0+r=na$ 成立, 從而求出 q_0。由於 $na=bq_0+r\le bq+r=c$, 因此只需對於滿足 $1\le n\le\left[\dfrac{c}{a}\right]$ 的 n 進行試算就可以了。例如, 對於前述吳敬給出的題目, 我們有 $1\le n\le\left[\dfrac{500}{53}\right]=9$, 通過試算到 $n=3$ 即可求出 $q_0=14$。

需要指出的是, 百雞類問題所列方程組的第二個方程中, 有兩個未知數的係數互爲倒數這一特徵並不能作爲區分第 I 型和第 II 型百雞問題的依據。例如, 據約西元 9 世紀時的《巴克沙利手稿》中的一個題目所建立的不定方程組爲 ([22, p.361]):

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ 3x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}z=20 \end{cases};$$

但導出的線性不定方程是 $5x+2y=20$, 屬於第 I 型百雞問題。於是由 $x=\dfrac{2}{5}(10-y)$, 令 $10-y=5$, 容易求得其唯一的一組正整數解爲 $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=13 \end{cases}$。

三、一個與之有關的問題

在「張邱建算經提要」([23, p.247]) 中, 錢寶琮曾斷言「百雞問題是中國數學史上最早出現的不定方程問題」。這篇提要最初發表於中華書局 1963 年出版的《算經十書》(錢寶琮校點), 然而後來的學者大都將這一冠名賦予《九章算術》(約西元前 1 世紀)「方程」章中的五家共井問題([24, pp.184-185]):

> 今有五家共井, 甲二綆不足, 如乙一綆; 乙三綆不足, 如丙一綆; 丙四綆不足, 如丁一綆; 丁五綆不足, 如戊一綆; 戊六綆不足, 如甲一綆。如各得所不足一綆, 皆逮。問井深、綆長各幾何?

[12]容易看出, 第 I 型百雞問題總有相應於 $x=0$ 的一組非負整數解。這也解釋了爲什麼丁取忠和時曰醇等人能先假設雞翁數爲 0, 將其轉化爲“二色差分”問題來求解第 I 型百雞問題; 而在求解第 II 型百雞問題時會遇到“以法除實不盡”的情況。

的確, 在他更早[13]的一篇文章「百雞術源流考」[9] 中, 錢寶琮將百雞問題溯源到了五家共井問題, 但原因是「案此題答案當爲無限」,「以此題實開張邱建百雞術及後世求一術之先河」, 即這些題目都有一個共同點 — 有無窮多解[14], 即「答數無定」([9, p.18])。由此便引出一個問題: 一個方程(組) 如果有無窮多解是否就可稱其爲不定方程(組)? 當然可以這樣來定義, 但這並不符合數學的歷史傳統和現實規範。比如, 有些線性方程組就具有無窮多解, 但在分類上並不歸屬不定方程(組)。再比如, 由百雞類型問題得到的不定方程(組) 若考慮在整數範圍內求解, 則可以有無窮多解; 但將解的範圍限制在非負整數或正整數, 則解的個數是有限的。而按照定義, 所謂不定方程(組) 是指解的範圍爲整數、正整數、有理數或代數整數等的方程或方程組, 一般來說, 其未知數的個數多於方程的個數([25, p.32])[15]。

值得注意的是, 已有學者對於將五家共井問題納入不定方程問題提出了異議。李文林和袁向東([7, p.106]) 曾指出, 嚴格地說「五家共井」題並不屬於不定分析的範圍, 因爲它不一定要求整數解。李倍始 ([26, p.277]) 則說該題實際上並不是真正的不定方程組。

在將五家共井問題歸爲不定方程問題時, 大多數作者給出的依據是由該題列出的方程組爲[16]

$$\begin{cases} 2x+y=w \\ 3y+z=w \\ 4z+u=w \\ 5u+v=w \\ 6v+x=w, \end{cases}$$

其中 x, y, z, u, v, w 分別是甲、乙、丙、丁、戊的繩長和井深, 從而有 5 個方程、6 個未知數, 即未知數的個數多於方程的個數。然而, 我們下面會看到, 即使設 5 個未知數, 列 5 個方程, 仍可以求解該題。

未知數所設如前, 據題意有[17]

$$\begin{cases} 2x+y=3y+z \\ 3y+z=4z+u \\ 4z+u=5u+v \\ 5u+v=6v+x \\ 6v+x=2x+y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ 3y-3z-u=0 \\ 4z-4u-v=0 \\ x-5u+5v=0 \\ x+y-6v=0 \end{cases}$$

[13] 發表於 1921 年。

[14] 顯然, 這裡是就其數學結構本身來理解的。

[15] 例外情況見 [27, pp.55-57], 作者這裡討論了一元不定方程。在此情形, 更通行的稱謂是“丟番圖方程”, 不過大多數情況下這兩個名稱都是互用的。

[16] 原著並沒有給出所列方程組, 術文也很簡單: 如方程。以正負術入之。

[17] 我們注意到, 西元 9 世紀時印度摩訶毗羅所著《綱要》, 以及《巴克沙利手稿》中關於寶石的題目 ([22, pp.345; 360-361]) 都和本題屬同一類型。

是爲齊次線性方程組。對係數矩陣作初等行變換, 有

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow⑤} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[①\times(-2)+⑤]{①\times(-1)+④} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[②\times(-4)+⑤]{②\times 3+④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & -32 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\leftrightarrow⑤} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & -32 \\ 0 & 0 & -3 & -16 & 33 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③\times 4+⑤]{③\times(-3)+④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 129 \\ 0 & 0 & 0 & 76 & -129 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③\times(-1)\\ ④+⑤}]{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 76 & -129 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④\times\frac{1}{76}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{129}{76} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{④\times(-5)+②\\ ④\times 5+①}]{④\times 20+③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{265}{76} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{191}{76} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{148}{76} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{129}{76} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases} x-\dfrac{265}{76}v=0 \\ y-\dfrac{191}{76}v=0 \\ z-\dfrac{148}{76}v=0 \\ u-\dfrac{129}{76}v=0. \end{cases}$$

從而有 $x:y:z:u:v=265:191:148:129:76$, 井深隨之可以確定。

根據以上討論, 筆者認爲, 與其稱五家共井問題爲中國數學史上最早出現的不定方程問題, 不如說它是世界數學史上最早出現的齊次線性方程組求解問題。而正如錢寶琮所言, 百雞問題則是中國數學史上最早出現的不定方程問題。

四、結語

百雞問題無疑是東西方數學交流史上最有影響、也最具有說服力的一個例證。回顧百雞問題自提出至清末學者利用「求一術」或「二色差分法」對「百雞術」做出解讀的歷史, 我們可以看出, 要想給出百雞類問題的完整解答, 最終都要歸結爲求一個線性不定方程 $ax+by=c$ (這裡 a,b,c 爲正整數) 的正整數 (或非負整數) 解的問題。在本文中, 筆者據此區分了兩種類型的百雞問題: I. a 和 b 中至少有一個能整除 c; II. a 和 b 都不能整除 c, 並嘗試利用歷史上百雞問題提出前已經構建起來的數學知識, 對百雞類問題給出一種統一的求解程序, 對「百雞術」做出一種新的解讀, 以期爲百雞問題的歷史研究增添一個新的視角。

致謝: 作者感謝審稿人對本文提出寶貴的修改意見。

参考文獻

1. 張丘建。張丘建算經。見任繼愈(主編), 郭書春(分主編)。中國科學技術典籍通匯·數學卷 (一)。鄭州: 河南教育出版社, 251-294, 1993。
2. David M. Burton, The History of Mathematics: An Introduction (Seventh Edition). New York: McGraw-Hill, 2011.
3. 紀志剛(主編)。孫子算經、張邱建算經、夏侯陽算經導讀。武漢: 湖北教育出版社, 1999。
4. 錢寶琮。數術記遺提要。見任繼愈(主編), 郭書春(分主編)。中國科學技術典籍通匯・數學卷(一)。鄭州: 河南教育出版社, 343-345, 1993。
5. 甄鸞。數術記遺。見任繼愈(主編), 郭書春(分主編)。中國科學技術典籍通匯・數學卷(一)。鄭州: 河南教育出版社, 347-352, 1993。
6. 駱騰鳳。藝遊錄。見任繼愈(主編), 郭書春(分主編)。中國科學技術典籍通匯・數學卷(五)。鄭州: 河南教育出版社, 143-212, 1993。
7. 李文林, 袁向東。中國古代不定分析若干問題探討。見自然科學史研究所數學史組。科技史文集(8)・數學史專輯。上海: 上海科學技術出版社, 106-122, 1982。
8. 劉鈍。大哉言數。瀋陽: 遼寧教育出版社, 1993。
9. 錢寶琮。百雞術源流考。見中國科學院自然科學史研究所。錢寶琮科學史論文選集。北京: 科學出版社, 17-21, 1983。
10. 沈康身。歷史數學名題賞析。上海: 上海教育出版社, 2002。
11. 李兆華。時曰醇《百雞術衍》研究。見李迪 (主編)。數學史研究文集 (第二輯)。呼和浩特: 內蒙古大學出版社, 臺北: 九章出版社, 123-132, 1991。

12. 郭書春 (主編)。中國科學技術史·數學卷。北京: 科學出版社, 2010。
13. 吳文俊。近年來中國數學史的研究。見吳文俊 (主編)。中國數學史論文集 (三)。濟南: 山東教育出版社, 1-9, 1987。
14. 程釗。歐拉關於七橋問題的解 — 從數學史與數學教育的角度看。數學傳播季刊, 36(4), 42-47, 2012。
15. 阮元, 等 (譔)。疇人傳彙編。揚州: 廣陵書社, 2009。
16. 楊輝。楊輝算法: 續古摘奇算法。見任繼愈 (主編), 郭書春 (分主編)。中國科學技術典籍通匯·數學卷 (一)。鄭州: 河南教育出版社, 1095-1117, 1993。
17. 郭熙漢。楊輝算法導讀。武漢: 湖北教育出版社, 1996。
18. 吳文俊 (主編), 沈康身 (分主編)。中國數學史大系·第五卷, 兩宋。北京: 北京師範大學出版社, 2000。
19. 李兆華。關於差分術的幾個問題。自然科學史研究, 8(2), 108-117, 1989。
20. 單墫, 余紅兵。不定方程。上海: 上海教育出版社, 1991。
21. 吳敬。九章算法比類大全。見任繼愈 (主編), 郭書春 (分主編)。中國科學技術典籍通匯·數學卷 (二)。鄭州: 河南教育出版社, 5-333, 1993。
22. 吳文俊 (主編), 沈康身 (分主編)。中國數學史大系 · 副卷第一卷 早期數學文獻。北京: 北京師範大學出版社, 2004。
23. 錢寶琮。張邱建算經提要。見任繼愈 (主編), 郭書春 (分主編)。中國科學技術典籍通匯·數學卷 (一)。鄭州: 河南教育出版社, 247-250, 1993。
24. 劉徽, 等 (注)。九章算術。見任繼愈 (主編), 郭書春 (分主編)。中國科學技術典籍通匯·數學卷 (一)。鄭州: 河南教育出版社, 95-214, 1993。
25. 柯召, 孫琦。不定方程。見中國大百科全書 · 數學。北京 · 上海: 中國大百科全書出版社, 32-36, 1988。
26. Ulrich Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao. Cambridge, Massachusetts, and London, England: The MIT Press, 1973.
27. 陳景潤。初等數論 I。北京: 科學出版社, 1978。

—本文作者任教中國北京化工大學數理學院—