數學傳播 47卷2期, pp. 77-84

對歐拉不等式與等角差線的迴響

陳盈佑

前言

本文寫作的動機, 是在數學傳播 182 期張鎮華教授的大作「愛小孩的歐拉 — 兼論 108 數學課綱」文中, 對其所提到的歐拉不等式產生好奇: 對於這個簡明的不等式, 是否存在一個簡單的解釋? 而在構思內容時, 又對於數學傳播 183 期同是張教授的大作「再談等角差線 — 兼談 108 數學課綱之圓錐曲線教學」文中所指出的「等角差線是雙曲線」這個結論, 產生同樣的好奇心。在略有心得後, 爲文分享以期能對中學生讀者有些許助益。

本文

在作者學習中學數學時, 曾注意到對於某些結果或定理, 尤其是形式簡單者, 存在一個符合直觀的簡明解釋。雖然這個解釋未必適合作爲嚴謹的證明, 卻可以幫助我們對於該結果或定理的必然性有更深刻的體會。以下舉若干例子說明之。

1. 對於實數 a, b, c, 有

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca. \tag{1}$$

證明:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\\&=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\&\geq 0, \qquad \text{證畢。}\end{aligned}$$

此外, 利用算幾不等式, 柯西不等式, 或排序不等式, 各自可得到證明。但以上方法對初學者而言, 或因代數技巧及基本知識不熟悉, 而不易想到。在此我們以直覺的方式, 來體會 (1) 式成立的必然性。

直觀上, 非負實數 p, q 的乘積 pq 可以視爲 p 加了 q 次後的取值。在此我們把 (1) 的左右式, 視爲兩個三元數組 (a, b, c) 與 (a, b, c) 兩兩配對相乘後, 再取各乘積之和: (1) 的左式三

項 a^2, b^2, c^2 依序分別爲 a 加了 a 次, b 加了 b 次, c 加了 c 次之值, 與其他的配對方式比較 [如 (1) 的右式三項 ab, bc, ca 分別代表 a 加了 b 次, b 加了 c 次, c 加了 a 次之值], (1) 的左式取值爲 (a, b, c) 中的最大數加了最多次, 次大數加了次多次, 最小數加了最少次, 則其取和後的結果, 必然不小於其他的配對方式, 如 (1) 的右式。就如同一場團體競技, 當實力愈強的選手有愈多出賽率時, 將有更好的成績。而 (1) 式等號成立的條件, 即 a, b, c 三數無大小之分 (皆相等) 時。這個直觀視角, 可幫助我們體認 (1) 式成立的理由。即使這種想法應用於 a, b, c 皆爲非負實數時較合適, 當 a, b, c 中有負數時, 與 $|a|, |b|, |c|$ 所構成的 (1) 式比較, 由於左式取值不變, 右式取值可能不變或變小, 故結論相同。另從這個觀點可以猜想到, 若反其道而行, 讓愈大的數加愈少次, 則取和的結果將是最小的。如:

若 $a \geq b \geq c$, 則

$$ab + bc + ca \geq ac + b^2 + ca.$$

證明:

$$\begin{aligned} & ab + bc + ca - (ac + b^2 + ca) \\ & = (a-b)(b-c) \\ & \geq 0, \qquad \text{證畢。} \end{aligned}$$

這個想法的一般化, 就是排序不等式 (rearrangement inequality)。

2. (畢氏定理) 直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 爲最大角, 則

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2. \tag{2}$$

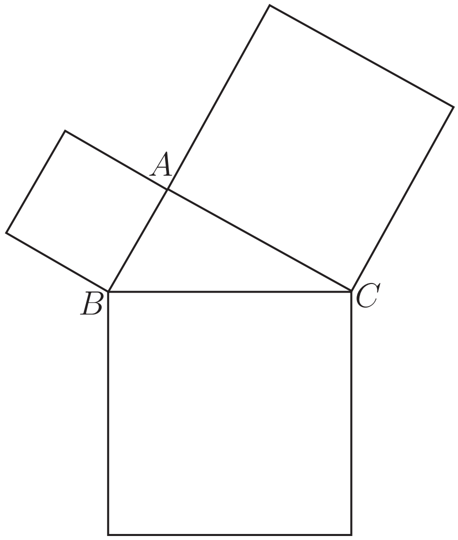

圖1

如圖1, 欲證 (2) 式, 容易想到由 $\triangle ABC$ 的三邊分別往外作正方形, 並嘗試證明以 $\overline{BC}$ 爲邊長的正方形面積爲另兩個正方形面積之和 (歐幾里得的幾何原本中, 即採用這個方法)。然而, 當我們觀察圖 1 時, 似乎不易看出上述關係的必然性。在此我們換個方式, 把圖形往內而非往外作, 作相似三角形而非正方形。

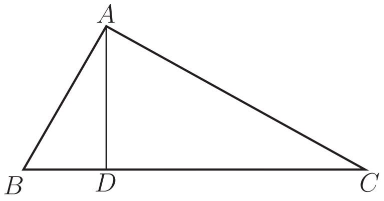

圖2

如圖 2, 在 $\overline{BC}$ 上取一點 D, 使 $\angle BAD = \angle C$, 則因 $\angle A$ 是直角, 故 $\angle CAD = \angle B$, 從而

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC.$$

因

$$a\triangle ABC = a\triangle DBA + a\triangle DAC. \tag{3}$$

($a\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面積, 餘同), 且相似形的面積比等於對應邊長之平方比, 故由 (3) 式可得

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

由此方法, 我們可以領悟: 畢氏定理之所以會成立, 是因直角三角形可以分割爲兩個與本身相似的三角形。進一步想, 若我們對於鈍角三角形與銳角三角形作類似的操作, 會得到怎樣的結果?

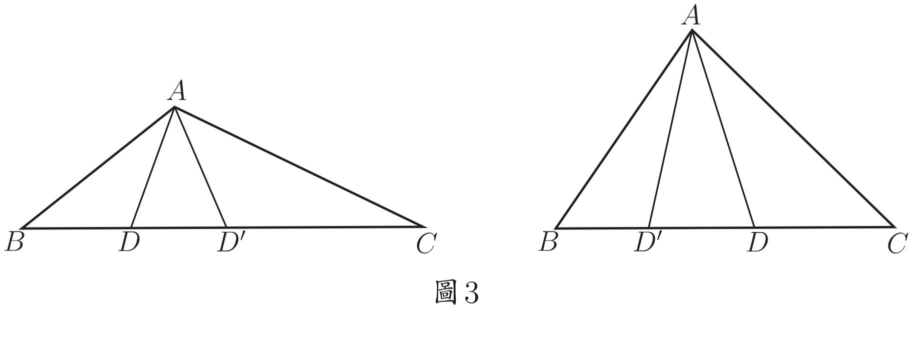

圖3

如圖 3 左, 對於最大角爲 $\angle A$ 的鈍角三角形, 我們在 $\overline{BC}$ 上取一點 D, 使 $\angle BAD = \angle C$, 另在 $\overline{BC}$ 上取一點 D', 使 $\angle CAD' = \angle B$, 則

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle D'AC.$$

因 $\angle BAD+\angle CAD'=\angle C+\angle B<\angle A$, 故 D 在 D' 的左側, 則有

$$a\triangle ABC>a\triangle DBA+a\triangle D'AC.$$

由此可得

$$\overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{AC}^2. \tag{4}$$

對於最大角爲 $\angle A$ 的銳角三角形, 進行一樣的步驟 (如圖 3 右), 則因 $\angle BAD+\angle CAD'=\angle C+\angle B>\angle A$, 故 D 在 D' 的右側, 則有

$$a\triangle ABC<a\triangle DBA+a\triangle D'AC.$$

由此可得

$$\overline{BC}^2<\overline{AB}^2+\overline{AC}^2. \tag{5}$$

(4), (5) 式分別指出鈍角與銳角三角形中, 最大邊長平方與另兩邊長平方和的大小關係, 從而可知畢氏定理的逆定理亦成立。

3. 對於正實數 n, 函數

$$f(n)=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$

爲遞增函數。

這是與自然對數的底 e 有關的題目, 常見用微分的方法證明, 另亦可用加權算幾不等式證之。若以直觀的方式思考: 隨著 n變大, 底數 (>1) 變小, 而指數變大, 似乎看不出 $f(n)$ 的變化方向。現我們考慮一個情境: 某君欲向民間放款公司借款, 借期一年。詢問了兩間公司的利率條件, 皆爲年利率 100%, 以複利計息。其中 A 公司每 6 個月計息一次, B 公司每 4 個月計息一次, 則某君應如何選擇較有利? 易知, 由於愈頻繁計息, 會有愈多的利息加入本金中孳息, 故向 A 公司借款負擔較小。考慮一年到期後需償還的本利和與當初借額的比值, 則 A 與 B 公司分別爲 $f(n)$ 在 $n=2$ 與 3 的取值, 由此可理解函數 $f(n)$ 爲遞增的合理性。

進一步地, 我們可經由此觀點, 給出 $f(n)$ 的一個上界: 因無論多頻繁地將利息加入本金中孳息 (即無論 n 如何大), 必不及一開始即把一整年的利息加在本金中孳息一年 (一年計息一次), 故 $f(n)$ 有個上界爲 $2+2=4$。

對於上述三個問題的結論, 我們從直觀的角度審視, 不但更可以體認其必然性, 甚至可以推演出進一步的結果。基於這個經驗, 我們來考慮在數學傳播 182 與 183 期中提到的兩個問題。

4. (歐拉不等式) 若一個三角形的外接圓半徑是 R, 內切圓半徑是 r, 則有不等式

$$R \geq 2r. \tag{6}$$

等號成立的充要條件是此三角形爲正三角形。

由於三角形的內切圓位於外接圓內部, 顯然外接圓半徑必大於內切圓半徑, 但爲何前者至少是後者的 2 倍? 爲了說明其必然性, 先提出一個引理。

引理 1: 若圓 O 與 $\triangle ABC$ 的三邊皆有交點, 則圓 O 的半徑不小於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

引理 1 是很符合直覺的, 因爲三角形的內切圓是一個「剛好勉強」與該三角形的三邊皆有交點的圓, 不難體會其爲與三邊皆有交點的圓中最小者。在此用圖解的方式說明之。

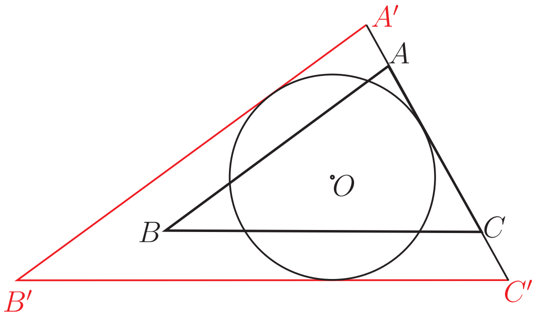

圖 4

如圖 4, 圓 O 與 $\triangle ABC$ 的三邊皆有交點。若圓 O與 $\overline{AB}$ 的交點並非切點, 則將 $\overleftrightarrow{AB}$ 以遠離 C 點的方向平行移動至與圓 O 相切爲止。當我們對 $\triangle ABC$ 三邊的所在直線都做這樣的操作後, 可以圍出一個 $\triangle A'B'C'$, 且圓 O 爲其內切圓。由於 $\triangle A'B'C'$ 是不小於 $\triangle ABC$ 的相似三角形, 其內切圓 O 的半徑必不小於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑, 此即引理 1。以下藉由引理 1 說明歐拉不等式成立的理由。

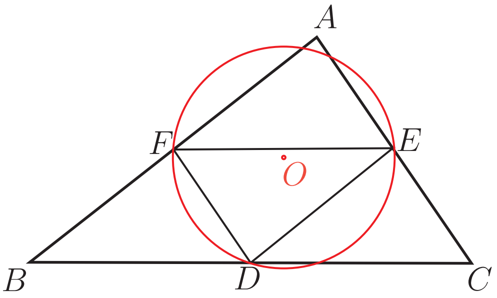

圖 5

如圖 5, 對於 $\triangle ABC$, 我們考慮以其三邊中點 D, E, F 爲頂點的中點三角形 $\triangle DEF$, 與 $\triangle DEF$ 的外接圓 O。因 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 且對應邊長比爲 2, 故 $\triangle ABC$ 的外接圓

半徑爲圓 O 半徑的 2 倍。又因圓 O 與 $\triangle ABC$ 的三邊皆有交點, 依據引理 1, 圓 O 的半徑不小於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。結合兩者, 即得到歐拉不等式 (6)。

以下考慮歐拉不等式中, 等號成立的條件: 當且僅當圖 5 中的 D, E, F 皆爲切點時 (即圓 O 爲 $\triangle ABC$ 的內切圓時), $\triangle ABC$ 即相當於圖 4 中的 $\triangle A'B'C'$, 等號成立。此時如圖 6, $\overline{AB} = 2\overline{AF} = 2\overline{AE} = \overline{AC}$; 同理 $\overline{AB} = \overline{BC}$, 即 $\triangle ABC$ 爲正三角形。

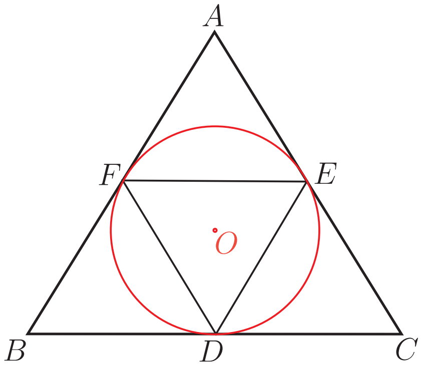

圖 6

綜上, 我們可以這樣體會歐拉不等式成立的必然性: 對於一個三角形, 由於其內切圓不大於其中點三角形的外接圓, 且中點三角形爲其邊長比 $\dfrac{1}{2}$ 的相似三角形, 故一個三角形的外接圓半徑至少是其內切圓半徑的2倍。

5. (等角差線問題) 在數學傳播 180 期中, 李永約同學提出討論一種「等角差線」: 考慮平面上一線段 $\overline{BC}$, 及在 $\overleftrightarrow{BC}$ 一側的動點 A, 使 $\angle ABC - \angle ACB$ 爲一定值 α $(0 < \alpha < \pi)$ 的動點 A 軌跡稱爲等角差線。之後在數學傳播 181 期與 183 期中, 鍾文體老師及張鎮華教授分別指出等角差線爲雙曲線, 並給出詳實而嚴謹的證明。對於這個簡明的結論, 我們也嘗試找一個簡單的解釋。

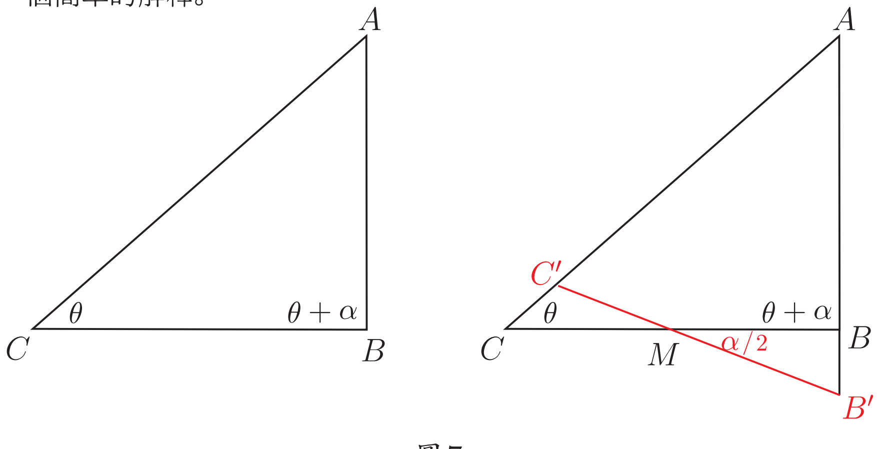

圖 7

如圖 7 左, 動點 A 滿足 $\angle ABC - \angle ACB$ 爲定值 α。由於直線段長 (包括兩點間的距

離) 並非與角度成線性關係 (與圓弧長度不同), 而是需由三角函數介導, 故「等角差」這個條件較不易直接應用。有鑑於此, 我們試圖把「等角差」轉化爲「等角」, 方法是如圖 7 右, 將 $\overleftrightarrow{BC}$ 以 $\overline{BC}$ 的中點 M 爲中心旋轉 $\alpha/2$, 從而與 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{AC}$ 圍成等腰 $\triangle AB'C'$。以下以 M 爲原點, $\overrightarrow{C'B'}$ 爲 x 軸正向建立直角坐標系。

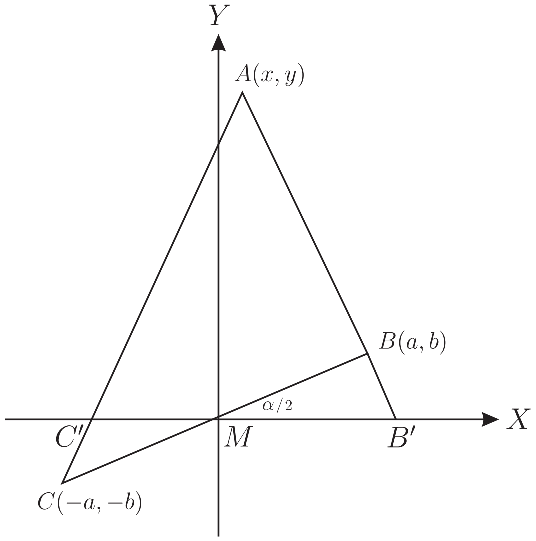

圖 8

如圖 8, 令 $B(a,b)$, $C(-a,-b)$, 則 $\overline{B'C'} = 2a$, 且 B 與 B' 之 x 坐標差 $= b \cdot \cot\angle AB'C'$, 則 A 的坐標 $(x,y) = (b\cdot\cot\angle AB'C', a\cdot\tan\angle AB'C')$, 其滿足 $xy = ab$ 爲定值。如果我們已有「平面上, 方程式 $xy = k$ $(k \neq 0)$ 的圖形是等軸雙曲線」的背景知識, 則至此可知動點 A 的軌跡爲等軸雙曲線的一部分。

以上我們用旋轉的方式把「等角差」的條件轉化爲「等角」, 並以簡化爲目的選取坐標系, 再利用既有知識可了解「等角差線爲雙曲線」這個結果的合理性。以下作爲比較, 列出關於平面上相異兩定點 P, Q 與動點 A 的一些性質。

a. 使 $\overline{AP} + \overline{AQ}$ 爲定值 a $(a > \overline{PQ})$ 的動點 A 軌跡爲橢圓。

b. 使 $|\overline{AP} - \overline{AQ}|$ 爲定值 a $(0 < a < \overline{PQ})$ 的動點 A 軌跡爲雙曲線。

c. 在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 一側, 使 $\angle APQ + \angle AQP$ 爲定值 α $(0 < \alpha < \pi)$ 的動點 A 軌跡爲圓的一部分 (在此不妨將圓視爲「等軸橢圓」)。

d. 在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 一側, 使 $\angle APQ - \angle AQP$ 爲定值 α $(0 < \alpha < \pi)$ 的動點 A 軌跡爲等軸雙曲線的一部分。

這樣的類比或有助於我們體會數學的規律與美感。

結語

以上作者提出對於若干數學問題之淺見, 其目的並非著重於這些問題本身及其解法, 而是想對中學生們分享以下的個人體驗: 我們所學習的數學知識, 不盡然如表面上所見, 是由抽象的符號, 運用不太容易想到的技巧後, 所得到的結果。有時候當我們審視結論, 會發現其中的合理性與必然性, 進而有恍然大悟的感覺。如果能在這方面多思考與體會, 當能感受數學的奧妙, 從而提升學習數學的興趣與效率。

參考文獻

1. 張鎮華。愛小孩的歐拉 — 兼論 108 數學課綱。數學傳播季刊, 46(2), 6-19, 2022。
2. 連威翔。歐拉不等式的另證。數學傳播季刊, 45(4), 43-49, 2021。
3. 張鎮華。再談等角差線 — 兼談 108 數學課綱之圓錐曲線教學。數學傳播季刊, 46(3), 38-48, 2022。
4. 李永約。等角差線 — 漸近線及其性質。數學傳播季刊, 45(4), 34-42, 2021。
5. 鍾文體。等角差線實爲雙曲線。數學傳播季刊, 46(1), 84-87, 2022。

—本文作者爲家康診所醫師—