數學傳播 47卷2期, pp. 65-76

等角差線定義修正與 n 倍等角差線 (nE.D.L.)猜想

李永約

壹、前言

等角差線是我從高中時開始研究的主題, 大一將一些研究整理成第一篇研究發表於《數學傳播》第 45 卷第 4 期 (2021)[1], 爾後鍾文體先生引用此篇研究, 提供一些想法於《數學傳播》第 46 卷第 1 期 (2022) [2]。

鍾文體先生的文章讓我瞭解我對等角差線的定義不夠完備, 因此想用這篇研究解釋一些可能造成誤會的定義並給出更完善的定義。藉此篇研究, 我要引進新的名詞「n 倍等角差線」(n-multiple Equiangular Difference Line, nE.D.L.)。沿用〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 中找漸近線的方式找到「n 倍等角差線組」之漸近線, 並且對對偶 (Dual) 與輻射點 (Radiation Point) 的概念進行說明。最後提出「n 倍等角差線猜想」, 給予對這個主題有興趣的人一個研究方向。

貳、等角差線–定義修正

在〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 中, 我給出的定義如下:

定義 1. $\triangle ABC$, $\overline{BC}=l$, $\angle B=\angle C+\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, 我們稱動點 A 之軌跡爲 $\overline{BC}=l$ 時之 α 等角差線 Γ_α^l, 如果 $l=1$ 可以簡寫成 Γ_α, 其中 $0<\alpha<\pi$。

在此, 我把 $\angle B$, $\angle C$ 設爲廣義角, 並修正定義如下:

定義 2. B 在直角坐標中的原點 $(0,0)$, C在直角坐標中的原點 $(l,0)$, 分別做過 B 和 C 的兩條直線 L_1 和 L_2, 並設兩直線交點 A。初始狀態 Ω 爲 $L_1: y=\tan\alpha x$。L_1 和 L_2 分別以逆時針與順時針方向等速轉動 (i.e. 當L_1旋轉角度 θ, 則 L_2 也旋轉角度 θ, $\theta>0$), 直到兩條直線回到原初始狀態 Ω, 則兩直線交點 A 點的移動軌跡爲等角差線 Γ_α^l, 如果 $l=1$ 可以簡寫成 Γ_α, 其中 $0<\alpha<\pi$。

其中初始狀態的定義爲

定義 3. 初始狀態爲當 L_2 爲 $y=0$ 時 L_1 的直線表示。

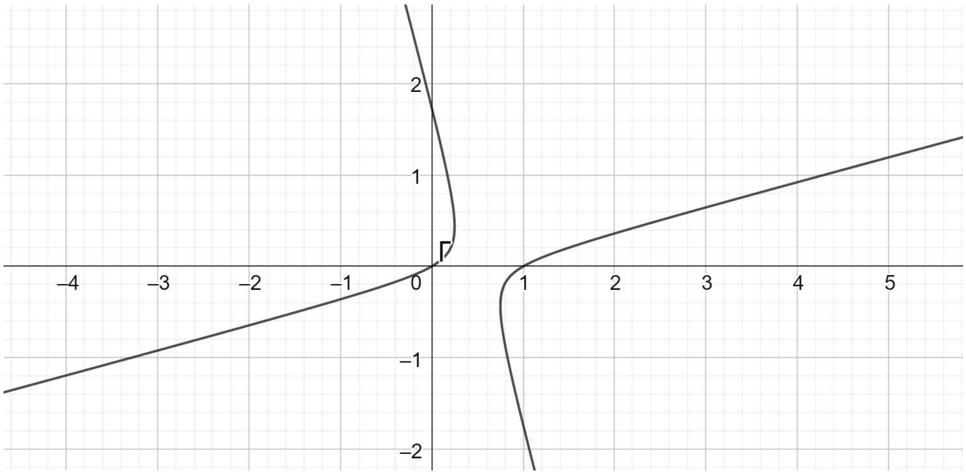

圖 1: $\Gamma_{\pi/6}$

容易知道 L_1 旋轉角度 π 後, 會回到初始狀態 Ω。經過簡單驗證, 此定義仍符合〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 的結果, 並且可用文中所引之參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}, \\ y = \dfrac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}. \end{cases}$$

依 定義 **2.**, 當 $l=1$, $\alpha=\pi/6$ 圖形如圖 1 所示, 與鍾文體先生於〈等角差線實爲雙曲線〉[2] 所繪之圖 3 不同, 以下簡單討論原因。

鍾文體先生於文 [2] 中說 :「根據本文第一段等角差線之定義, 還應考慮 $\angle B=\angle C-\alpha$ 的情況。」這句話根本沒有確實根據我在原文中的定義 ($\angle B=\angle C+\alpha$), 而且就算 $\angle B=\angle C-\alpha$ 爲 $\angle B=\angle C+\alpha$ 之推廣, 也沒有詳盡的說明並推論。而後鍾文體先生用這句話獲得 $\Gamma_{-\pi/6}$, 再將 $\Gamma_{\pi/6}$ 與 $\Gamma_{-\pi/6}$ 部分線段合併並依對稱性繪製後得到圖 3, 宣稱圖 3 爲等角差線, 可是我們並不能稱之等角差線: 首先, $\Gamma_{-\pi/6}$ 本就不符合我在原文所述 Γ_α 中 α 應當在 $(0,\pi)$ 之定義, 因此無法直接使用原文中奇函數的性質 — 對稱性; 即便直觀來看 $\Gamma_{5\pi/6}$ 與 $\Gamma_{-\pi/6}$相同, 但仍需進行證明後才能使用對稱性, 不可過度解釋與推廣。綜上, 其與$\Gamma_{\pi/6}$不相同, 不可一併而論。再者, 我已於〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 根據定義畫出當 $l=1,\alpha=\pi/6$ 時的等角差線於圖 2, 也載明其爲 $\Gamma_{\pi/6}$, 並不如鍾文體先生宣稱 [2] 文中所繪之圖 3 爲當 $l=1,\alpha=\pi/6$ 時的等角差線, 此圖也不符合我在文 [1] 中所獲得等角差線漸近線之結果。

雖然引用了我的文章, 使用同樣的名詞「等角差線」, 但鍾文體先生經過不詳盡的推論, 過度推廣並錯用定理, 所畫出的圖和我原文定義、定理和圖皆有非常多出入。上述情況讓我知道可能是我定義的不足以致鍾文體先生產生誤會。因此, 在此篇重新嚴謹修正等角差線的定義。希望往後研究此主題之朋友能夠沿用我在此篇中所有的定義與符號。

如此新定義下圖一所示圖形是否仍為雙曲線, 留待有興趣的人探討。

參、n倍等角差線與n倍等角差線組(The Group of nE.D.L.)

定義 4. B在直角坐標中的原點 $(0,0)$, C 在直角坐標中的原點 $(l,0)$, 分別做過 B 和 C 的兩條直線 L_1 和 L_2, 並設兩直線交點 A。初始狀態 Ω 為 $L_1 : y = \tan\alpha x$ 以及 $L_2 : y = 0$。L_2 以順時針旋轉, L_1 逆時針方向以 L_2 旋轉速度的 n ($n \in \mathbb{R}^+$) 倍轉動 (i.e., 當 L_1旋轉角度 θ, 則 L_2 也旋轉角度 $n\theta$, $\theta > 0$), 直到兩條直線到下一個初始狀態 Ω', 則兩直線交點 A 點的移動軌跡為等角差線 $\Gamma^l_{\alpha,n}$, 如果 $l = 1$ 可以簡寫成 $\Gamma_{\alpha,n}$, 如果 $n = 1$ 可以簡寫成 Γ^l_α 即為等角差線, 其中 $0 < \alpha < \pi$。

我們可以把如此定義視覺化, 例如等角差線即為模數相等且節圓直徑相同的兩齒輪嚙合後, 兩個齒輪中心各發出一直線光束後交會點的軌跡, 在 n 倍等角差線就變成模數相等且節圓直徑比為 $1 : n$ 的兩齒輪嚙合後, 兩個齒輪中心各發出一直線光束後交會點的軌跡。

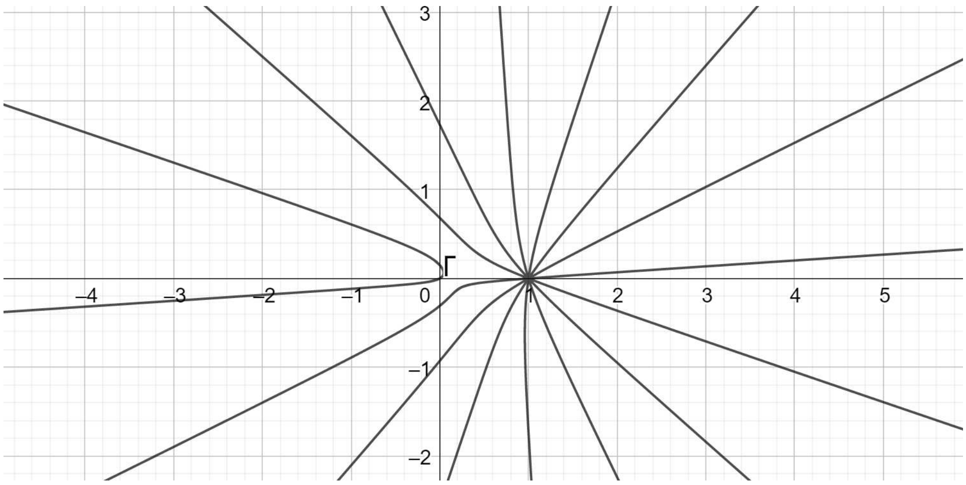

圖 2: $\Gamma_{\pi/6,7}$

經過計算, 我們可以得到 $\Gamma^l_{\alpha,n}$ 的參數式

$$\begin{cases} x = \dfrac{l\tan\theta}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}, \\ y = \dfrac{l\tan\theta\tan(n\theta+\alpha)}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}. \end{cases}$$

按照前述定義, 當 $l=1$, $\alpha=\pi/6$, $n=7$ 圖形如圖 2 所示, θ 從 0 到 2π 後, 圖形會回到初始狀態 Ω。當 $n\in\mathbb{N}$, 原本的定義即可描述圖形。然而, $n\notin\mathbb{N}$ 時定義會出現問題, 以 $l=1$, $\alpha=\pi/6$, $n=1/7$ 爲例, 如圖 3, L_1會經過六次不同的初始狀態後才回到原本的初始狀態 Ω, 因此單定義 **4**. 不敷描述整個圖形, 故我們定義 n 倍等角差線組於定義 **5.**。

定義 5. n 倍等角差線組 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 爲 $\Gamma^l_{\alpha,n}$ 回到原初始狀態 Ω 前 (可能回不去) 所經過所有初始狀態所產生 n 倍等角差線之集合。

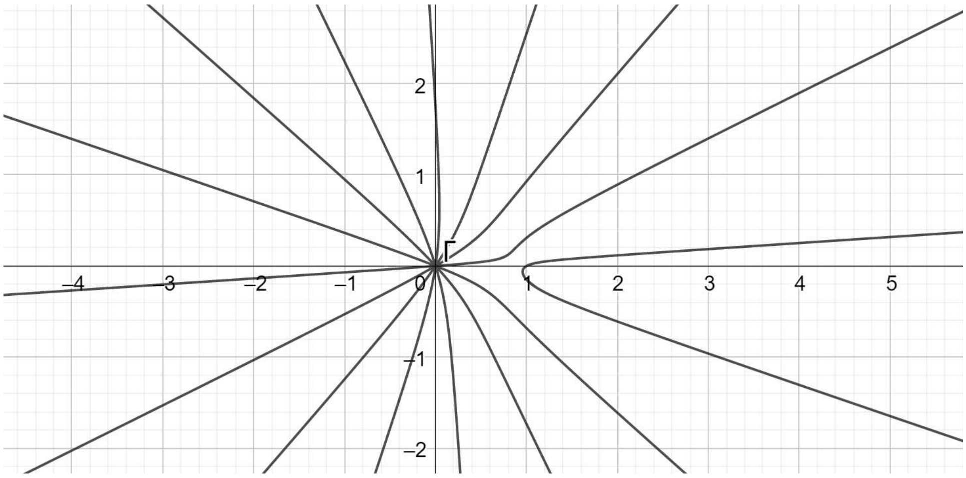

圖 3: $\{\Gamma_{\pi/6,1/7}\}$

肆、n 倍等角差線的漸近線

接著, 我們推廣 〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 中 β 的定義

$$\beta = \frac{\pi-\alpha}{n+1}.$$

定理 1. $\forall n\in\mathbb{R}^+$, 在區間 $0<\theta<\beta$, $\Gamma^l_{\alpha,n}$有漸近線

$$y = -\tan\beta x + \frac{nl}{n+1}\tan\beta.$$

證明: 如 〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 中求漸近線的方式, 設等角差線 原 x, y 分量分別表示成 x', y', 而旋轉變換後 x, y 分量分別表示成 x'', y'' 將原等角差線用旋轉矩陣旋轉 β 角

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{l\tan\theta}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}\\ \dfrac{l\tan\theta\tan(n\theta+\alpha)}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\left(\dfrac{l\tan\theta}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}\right)(\cos\beta-\sin\beta\tan(n\theta+\alpha))\\ \left(\dfrac{l\tan\theta}{\tan(n\theta+\alpha)+\tan\theta}\right)(\sin\beta+\cos\beta\tan(n\theta+\alpha))\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

接著, 我們觀察 $\theta\to\beta$ 的情況:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to\beta} x'' &= \lim_{\theta\to 0^-}\left[\frac{l\tan(\theta-\beta)(\cos\beta-\sin\beta\tan(n(\theta-\beta)+\alpha))}{\tan(\theta-\beta)+\tan(n(\theta-\beta)+\alpha)}\right] = -\infty,\\
\lim_{\theta\to\beta} y'' &= \lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\tan\theta(\sin\beta+\cos\beta\tan(n\theta+\alpha))}{\tan\theta+\tan(n\theta+\alpha)}\right]\\
&= \lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\sec^2\theta(\sin\beta+\cos\beta\tan(n\theta+\alpha))+nl\cos\beta\tan\theta\sec^2(n\theta+\alpha)}{sec^2\theta+\sec^2(n\theta+\alpha)}\right]\\
&= \frac{nl\sin\beta}{n+1}.
\end{aligned}$$

上式於第二個等號利用羅必達定理 $(\frac{0}{0})$ 因此此 n 倍等角差線 (nE.D.L.) 變換後有一漸近線

$$y = \frac{nl\sin\beta}{n+1}.$$

將此漸近線反變換回去即可得我們所要的原等角差線漸近線, 現證此漸近線爲

$$y = -\tan\beta x + \frac{nl}{n+1}\tan\beta.$$

設漸近線原 x, y 分量分別表示成 X, Y, 而變換後之漸近線 x, y 分量分別表示成 X', Y',

$$\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'\\ Y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ \dfrac{nl\sin\beta}{n+1}\end{bmatrix}\ (t\text{ 爲參數}),$$

$$X=\begin{vmatrix}t & -\sin\beta\\ \dfrac{nl\sin\beta}{n+1} & \cos\beta\end{vmatrix}=\cos\beta\cdot t+\frac{nl\sin^2\beta}{n+1},$$

$$Y=\begin{vmatrix}\cos\beta & t\\ \sin\beta & \dfrac{nl\sin\beta}{n+1}\end{vmatrix}=-\sin\beta\cdot t+\frac{nl\sin\beta\cos\beta}{n+1},$$

消除參數t, 可得X, Y關係爲:

$$\begin{aligned}Y&=-\tan\beta+\frac{nl}{n+1}(\frac{\sin^3\beta}{\cos\beta}+\sin\beta\cos\beta)\\ &=-\tan\beta X+\frac{nl}{n+1}(\frac{\sin^3\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos^2\beta}{\cos\beta})=-\tan\beta X+\frac{nl}{n+1}\tan\beta,\end{aligned}$$

所以 $\Gamma_{\alpha,n}$ 有漸近線

$$y=-\tan\beta x+\frac{nl}{n+1}\tan\beta. \qquad \square$$

當我們取 $n=1$ 時, 用此上述定理 **1**. 加平移即可得到 ⟨等角差線 — 漸近線及其性質⟩[1] 中等角差線之漸近線。

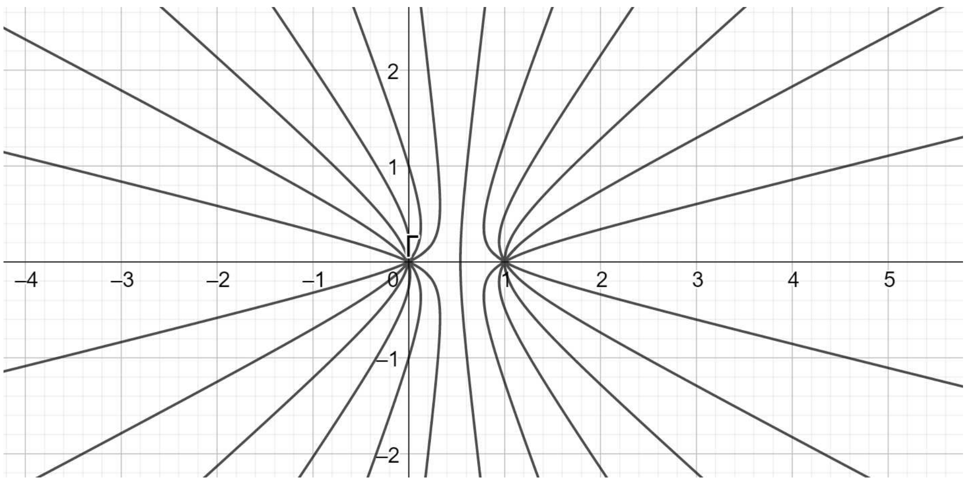

圖 4: $\{\Gamma_{5\pi/7,6/7}\}$

伍、特殊n倍等角差線(Singular nE.D.L.)

此前我們的討論都在 $\alpha > 0$ 上討論, 因爲等角差線只有在初始角爲 0 時會有問題不需特別討論, 但是 n 倍等角差線非常容易出現初始角爲 0 的情況, 如圖 4 所示, 因此我們把 α 的範圍擴增到 $[0, \pi)$ 進行探討。我們可以看到有一條線很特別, 我們稱之爲特殊 n 倍等角差線 (Singular nE.D.L.)。

定義 6. 一 n 倍等角差線 $\theta \to 0$ 時趨近 x 軸於非 $(0,0)$ 之點, 則此 n 倍等角差線爲特殊 n 倍等角差線。

定理 2. 特殊 n 倍等角差線初始角 $\alpha = 0$, 其於 $\theta \to 0$ 時趨近 x 軸於點 $\left(\dfrac{l}{n+1}, 0\right)$。

證明:

$$\lim_{\theta\to 0} x = \lim_{\theta\to 0} \frac{l\tan\theta}{\tan(n\theta)+\tan\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{l\sec^2\theta}{n\sec^2(n\theta)+\sec^2\theta} = \frac{l}{n+1},$$

$$\lim_{\theta\to 0} y = \lim_{\theta\to 0} \frac{l\tan\theta\tan(n\theta)}{\tan(n\theta)+\tan\theta} = \frac{l}{n+1}\cdot 0 = 0. \qquad \square$$

引理 3. $\forall n = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}^+$ (p, q 互質), 對於 $\theta \in [0, p\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$

$$x = \frac{\tan\theta}{\tan\theta + \tan\left(\dfrac{q\theta}{p}+\alpha\right)} = \frac{\tan p\phi}{\tan p\phi + \tan(q\phi+\alpha)},$$

$$y = \frac{\tan\theta\tan\left(\dfrac{q\theta}{p}+\alpha\right)}{\tan\theta + \tan\left(\dfrac{q\theta}{p}+\alpha\right)} = \frac{\tan p\phi\tan(q\phi+\alpha)}{\tan p\phi + \tan(q\phi+\alpha)},$$

在 $\theta = p\phi$ 的時候。故兩參數式對應相同的n倍等角差線組。

定理 4. $\forall n = \dfrac{q}{p} \in \mathbb{Q}^+$ (p, q互質), $\forall r < p$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha = \dfrac{r\pi}{p}$, $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$有特殊 n 倍等角差線。

證明: 根據前面的引理 **1.**, 參數式可表示成

$$x = \frac{l\tan p\theta}{\tan p\theta + \tan(q\theta+\alpha)}, \qquad y = \frac{l\tan p\theta\tan(q\theta+\alpha)}{\tan p\theta + \tan(q\theta+\alpha)}.$$

將參數式回推到定義, 可以看成原初始狀態 Ω 為 $L_1: y=\tan\alpha x$ 以及 $L_2: y=0$。L_1 以逆時針旋轉角度 $q\theta$, 同時 L_2 以順時針方向旋轉角度 $p\theta$。每到一個新初始狀態 L_1 旋轉角度 $\dfrac{q\pi}{p}$, 此新初始狀態所產生之 n 倍等角差線為 $\Gamma^l_{\gamma_m,n}$, 其中 $\gamma_m=\dfrac{r_m q\pi}{p}$, 設 $p>r_m\geq 0$, $m+r\equiv r_m(\operatorname{mod} p)$, m 為最一開始的原初始狀態到此新狀態前經過其他狀態次數加一。

r_m 之值都不同直到 $m\geq p$, 所以我們可知 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}=\{\Gamma^l_{\gamma_m,n}\}_{m=0}^{p-1}$, 故必定存在 $0\leq m<p$ 使得 $\gamma_m=0$, 於此, 滿足定理敘述的 n 倍等角差線組有特殊 n 倍等角差線。 $\square$

陸、n倍等角差線組的對偶 (The Dual of nE.D.L.) 與輻射點 (Radiation Point)

觀察 $\{\Gamma_{\pi/6,1/7}\}$ 和 $\{\Gamma_{\pi/6,7}\}$, 兩個等差線組所形成的圖形。兩圖形擺在一起看似有點對稱的關係, 其實 $\{\Gamma_{\pi/6,7}\}$ 確實經過 $(\frac{1}{2},0)$ 點對稱後會變成 $\{\Gamma_{\pi/6,7}\}$, 我們稱此情形為對偶。

定義 7. 任意 n 倍等角差線組所產生的圖形經過 $(\frac{l}{2},0)$ 點對稱映射後所成圖形可為另一 n' 倍等角差線組產生, 則此 n' 倍等角差線組為 n 倍等角差線組的對偶 (Dual)。

定理 5. $\forall n=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$ (p, q互質), $\exists\ \alpha$, $\alpha'=\dfrac{\alpha}{n}-\lambda\pi$ ($\lambda\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得 $0\leq\alpha'<\pi$) 使得 $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$ 為 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的對偶。

證明: 根據引理 **1**., $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的參數式可寫為

$$x=\frac{l\tan p\theta}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)},\qquad y=\frac{l\tan p\theta\tan(q\theta+\alpha)}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)},$$

其中 $\theta\in[0,\pi]$, $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$ 的參數式可寫為

$$x=\frac{l\tan q\phi}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')},\qquad y=\frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')},$$

其中 $\phi\in[0,\pi]$, 在 θ 和 ϕ 的取值範圍內, 取等式 $\phi+\dfrac{\alpha}{q}=(1+\delta)\pi-\theta$, 其中 $\delta=0$ 或 1

使得在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 等式仍成立。取等式中的 θ 和 ϕ, 我們可得

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{2}\left(\frac{\tan p\theta}{\tan p\theta + \tan(q\theta+\alpha)} + \frac{\tan q\phi}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')}\right) \\
=&\frac{l}{2}\left(\frac{\tan\left(p\phi+\dfrac{p\alpha}{q}\right)}{\tan\left(p\phi+\dfrac{p\alpha}{q}\right)+\tan q\phi} + \frac{\tan q\phi}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')}\right) \\
=&\frac{l}{2}\left(\frac{\tan(p\phi+\alpha')}{\tan(p\phi+\alpha')+\tan q\phi} + \frac{\tan q\phi}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')}\right) = \frac{l}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{l\tan p\theta\tan(q\theta+\alpha)}{\tan p\theta + \tan(q\theta+\alpha)} + \frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')} \\
=&\frac{-l\tan\left(p\phi+\dfrac{p\alpha}{q}\right)\tan q\phi}{\tan\left(p\phi+\dfrac{p\alpha}{q}\right)+\tan q\phi} + \frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')} \\
=&\frac{-l\tan(p\phi+\alpha')\tan q\phi}{\tan(p\phi+\alpha')+\tan q\phi} + \frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi + \tan(p\phi+\alpha')} = 0.
\end{aligned}$$

故我們得證 $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$ 爲 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的對偶。 □

當我們取 $n=1$ 時, 用此上述定理 **4**. 加平移即可得到 〈等角差線 — 漸近線及其性質〉[1] 中等角差線是奇函數的結果。

定義 8. 任意 n 倍等角差線組所產生的圖形經過 $x=\dfrac{l}{2}$ 線對稱映射後所成圖形可爲另一 n' 倍等角差線組產生, 則此 n' 倍等角差線組爲 n 倍等角差線組的類對偶 (Quasi-Dual)。

定理 6. $\forall n=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$ (p, q互質), $\exists\ \alpha$, $\alpha'=\lambda\pi-\dfrac{\alpha}{n}$ ($\lambda\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得 $0\leq\alpha'<\pi$) 使得 $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$爲$\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的類對偶。

證明: 根據引理 **1**., $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的參數式可寫爲

$$x=\frac{l\tan p\theta}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)},\qquad y=\frac{l\tan p\theta\tan(q\theta+\alpha)}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)},$$

其中 $\theta\in[0,\pi]$, $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$ 的參數式可寫爲

$$x=\frac{l\tan q\phi}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')},\qquad y=\frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')},$$

其中 $\phi\in[0,\pi]$, 在 θ 和 ϕ 的取值範圍內, 取等式 $\phi+\dfrac{\alpha}{q}=\delta\pi+\theta$, 其中 $\delta=0$ 或 1 使得在 $0\le\theta\le\pi$ 等式仍成立。取等式中的 θ 和 ϕ, 我們可得

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{2}\left(\frac{\tan p\theta}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)}+\frac{\tan q\phi}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}\right)\\
&=\frac{l}{2}\left(\frac{\tan\left(p\phi-\dfrac{p\alpha}{q}\right)}{\tan\left(p\phi-\dfrac{p\alpha}{q}\right)+\tan q\phi}+\frac{\tan q\phi}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}\right)\\
&=\frac{l}{2}\left(\frac{\tan(p\phi+\alpha')}{\tan(p\phi+\alpha')+\tan q\phi}+\frac{\tan q\phi}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}\right)=\frac{l}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{l\tan p\theta\tan(q\theta+\alpha)}{\tan p\theta+\tan(q\theta+\alpha)}-\frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}\\
&=\frac{l\tan\left(p\phi-\dfrac{p\alpha}{q}\right)\tan q\phi}{\tan\left(p\phi-\dfrac{p\alpha}{q}\right)+\tan q\phi}-\frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}\\
&=\frac{l\tan(p\phi+\alpha')\tan q\phi}{\tan(p\phi+\alpha')+\tan q\phi}-\frac{l\tan q\phi\tan(p\phi+\alpha')}{\tan q\phi+\tan(p\phi+\alpha')}=0.
\end{aligned}$$

故我們得證 $\{\Gamma^l_{\alpha',1/n}\}$ 爲 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 的類對偶。 $\square$

依定理 **4**.與定理 **5**., 我們也許可以推論特殊 n 倍等角差線對 x 軸做對稱依然在同一等角差線組中 (更甚, 可能一等角差線組有特殊 n 倍等角差線若且爲若此等角差線組對 x 軸對稱)。

接下來我們定義輻射點, 如圖 5 兩條黑直線, 爲 $\{\Gamma_{5\pi/7,6/7}\}$ 中的兩條漸近線, 其相交之點爲 $\left(\dfrac{6}{13},0\right)$, 我們稱之 $\{\Gamma_{5\pi/7,6/7}\}$ 的輻射點 (Radiation Point)。

定義 9. 輻射點是等角差線組中至少有兩漸近線相交之點。

定理 7. $\forall n\in\mathbb{Q}^+$, $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 有唯一輻射點 $\left(\dfrac{nl}{n+1},0\right)$。

證明: 設 β' 爲 π 與一等角差線 $\Gamma^l_{\alpha',n'}$ 之 α' 之差除以 $n'+1$ 之值。

$\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 與其對偶之類對偶 $\{\Gamma^l_{\alpha_1,n}\}$ 中所有 n 倍等角差線依定理 **1**.可知在 $0<\theta<\beta'$ 有漸近線

$$y=-\tan\beta' x+\frac{nl}{n+1}\tan\beta'.$$

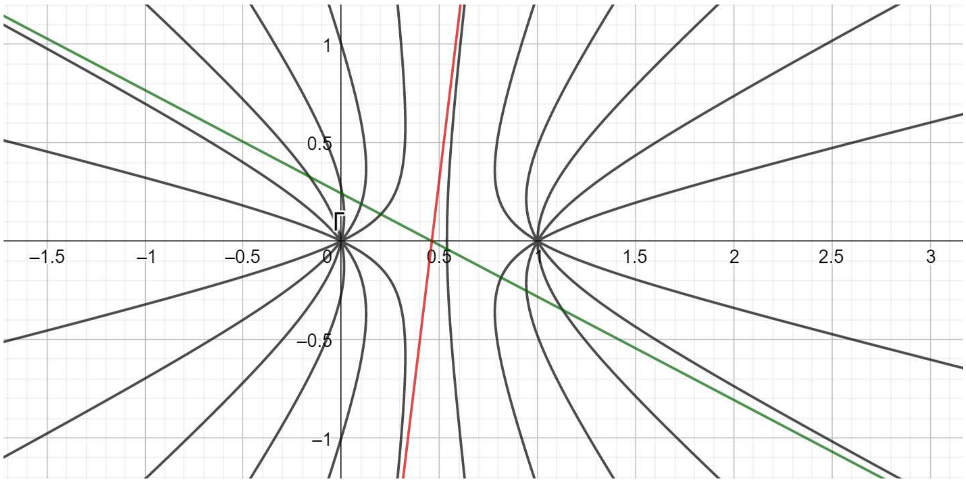

圖 5: $\{\Gamma_{5\pi/7,6/7}\}$與其中兩條漸近線

可以得到所有利用定理 **1**.所得之漸近線皆交於點 $\left(\dfrac{nl}{n+1},0\right)$。

依定理 **4**.與定理 **5**.的對偶與類對偶性質我們知道 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 有一對偶 $\{\Gamma^l_{\alpha_2,1/n}\}$ 與類對偶 $\{\Gamma^l_{\alpha_3,1/n}\}$, 依定理 **1**. 可知任意在 $\{\Gamma^l_{\alpha_2,1/n}\}$ 與 $\{\Gamma^l_{\alpha_3,1/n}\}$ 之 n 倍等角差線在 $0<\theta<\beta'$ 皆有漸近線

$$y=-\tan\beta' x+\frac{l}{n+1}\tan\beta'.$$

可以得到所有利用定理 **1**.所得之漸近線皆交於點 $\left(\dfrac{l}{n+1},0\right)$, 將此點分別對偶與類對偶回去皆可得 $\left(\dfrac{nl}{n+1},0\right)$, 因此 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 有唯一輻射點 $\left(\dfrac{nl}{n+1},0\right)$。 □

柒、n倍等角差線猜想

討論完 n 爲正有理數之情況, 後面還有無理數等著我們挑戰, 在此我想提出兩個猜想。從前面的證明我可以提出第一個猜想

猜想 1. 對於所有正實數 n, 所有 $\alpha\in[0,\pi)$, n 倍等角差線 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 必定存在唯一輻射點。

其實這件事情不難理解的, 與前述的證明手法類似, 不過對偶與類對偶的概念可能無法用於 n 爲無理數時。接著, 觀察 n 爲正無理數時的等角差線組, 不難看出圖形滿布於 $\mathbb{R}^2$ 平面, 於是我想提出第二個猜想:

猜想 2. 存在 n 爲正實數, $\alpha\in[0,\pi)$, n 倍等角差線 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 中所有點的集合在 $\mathbb{R}^2$ 平面上稠密 (The set of all points in $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ is dense in the plane $\mathbb{R}^2$)。

我對這個猜想有一個想法:

「任意在 $\mathbb{R}^2$ 上的一點, 先證明是否存在一 n 倍等角差線 $\Gamma^l_{\omega,n}$ 通過此點, 而後取任意小的 $\epsilon > 0$, 證明在 $\{\Gamma^l_{\alpha,n}\}$ 中是否存在一 n 倍等角差線 $\Gamma^l_{\omega\pm\delta,n}$ $(\delta > 0)$ 與此點距離小於 ϵ。」

以上猜想, 期能給各位一個研究 n 倍等角差線的方向。

捌、結語

發表第一篇等角差線的研究時, 我還不夠成熟, 也找不到相關資料, 於是當時本著前導研究的態度研究這個主題。在定義與研究過程中, 難免會有模糊或錯誤, 因此要仰賴各位先進給予修正與意見。於我而言, 所有的建議都是促使我進步的墊腳石, 所以歡迎各位前輩不吝賜教。

這段時間在臺大數學系學習幫助我更嚴謹地看待這篇研究, 也因爲有鍾文體先生的指教, 讓我更認真地重新思考等角差線的定義, 也讓我延宕已久的 n 倍等角差線研究能夠藉由這篇文章發表出來, 希望大家能夠一同領略 n 倍等角差線的有趣之處。

參考資料

1. 李永約。等角差線 — 漸近線及其性質。數學傳播季刊, 45(4), 34-42, 2021。
2. 鍾文體。等角差線實爲雙曲線。數學傳播季刊, 46(1), 84-87, 2022。

—本文作者投稿時爲臺灣大學財務金融學系大二學生—