數學傳播 47卷2期, pp. 27-31

利用微積分得到 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的求和公式

張海潮

一、求和函數的定義

從高中數學, 大家熟知下列公式:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}, \tag{1}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}, \tag{2}$$

以及比較少見的

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}. \tag{3}$$

本文想要利用微積分以遞迴的方法來得到一般的求和公式:

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=(n \text{ 的 } k+1 \text{ 次多項式}). \qquad \text{(註一)}$$

首先如果一個函數 F_k 可以代表求和公式, F_k 應該滿足

$$F_k(0)=0^k=0, \quad F_k(1)=1^k=1, \quad F_k(2)=1^k+2^k,\ldots,F_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k.$$

因此, 一個等價的條件是

$$F_k(0)=0, \text{ 並且 } F_k(n)-F_k(n-1)=n^k, \quad n\ge 1.$$

進一步, 我們擴充函數 F_k 的定義域, 使 F_k 不只是非負整數的函數, 同時也是實變數 x 的函數, 同樣要求

$$F_k(0)=0, \qquad F_k(x)-F_k(x-1)=x^k.$$

更進一步, 我們要求, 正如公式 (1), (2), (3), F_k 必須是一個多項式。

我們因此立下求和函數 F_k, $k\ge 1$, 的定義:

定義一: 求和函數 $F_k(x)$, $k\geq 1$, 是一個滿足 $F_k(0)=0$, $F_k(x)-F_k(x-1)=x^k$ 的多項式。當 $k=1,2,3$ 時, $F_k(x)$ 的表示是

$$F_1(x)=\frac{x^2+x}{2}, \tag{4}$$

$$F_2(x)=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}, \tag{5}$$

$$F_3(x)=\frac{x^4+2x^3+x^2}{4}. \tag{6}$$

二、求和函數的存在性和唯一性

我們有下面的定理

定理一: 求和函數如果存在, 滿足唯一性。但若一個多項式 $g(x)$, 只滿足 $g(x)-g(x-1)=x^k$, $k\geq 1$, 則 $g(x)$ 與 $F_k(x)$ 差一個常數, $g(x)=F_k(x)+g(0)$。

證明: 因爲 $g(x)-g(x-1)=x^k$, 所以 $(F_k(x)-g(x))-(F_k(x-1)-g(x-1))=0$, 觀察多項式 $F_k(x)-g(x)$ 的諸項, 例如最高次項 x^l, 如果 $l\geq 1$ 則 $x^l-(x-1)^l=lx^{l-1}+\cdots$, 亦即 x^{l-1} 將是 $(F_k(x)-g(x))-(F_k(x-1)-g(x-1))$ 的最高次項, 因此 l 只能爲 0, 所以 $F_k(x)-g(x)$ 必是一個常數, 當然 $g(x)=F_k(x)+g(0)$。

設求和函數 $F_k(x)$ 存在, $k\geq 2$

將方程式 $F_k(x)-F_k(x-1)=x^k$ 對 x 微分, 得 (註二)

$$F_k'(x)-F_k'(x-1)=kx^{k-1},$$

或

$$\frac{1}{k}F_k'(x)-\frac{1}{k}F_k'(x-1)=x^{k-1}.$$

根據定理一 $\frac{1}{k}F_k'(x)$ 和 $F_{k-1}(x)$ 只差一個常數, 亦即

$$\frac{1}{k}F_k'(x)=F_{k-1}(x)+c_k.$$

考慮

$$\int_0^x F_{k-1}(t)dt+c_kx=G(x).$$

因爲

$$G'(x)=F_{k-1}(x)+c_k=\frac{1}{k}F_k'(x),$$

所以 $G(x)$ 與 $\dfrac{1}{k}F_k(x)$ 只差一個常數, 但是 $G(0)=0$, 而 $\dfrac{1}{k}F_k(0)$ 也爲 0, 所以 $G(x)=\dfrac{1}{k}F_k(x)$ 或

$$F_k(x)=kG(x)=k\Big(\int_0^x F_{k-1}(t)dt+c_kx\Big),$$

將上式 x 以 1 代入得

$$1=F_k(1)=k\Big(\int_0^1 F_{k-1}(t)dt+c_k\Big),$$

亦即

$$c_k=\frac{1}{k}-\int_0^1 F_{k-1}(t)dt.$$

以上的分析是基於 F_k 存在, 我們仍須證明下列定理二。

定理二: 若 $F_{k-1}(x)$ 已知, 則

$$F_k(x)=k\Big(\int_0^x F_{k-1}(t)dt+c_kx\Big),$$

其中

$$c_k=\frac{1}{k}-\int_0^1 F_{k-1}(t)dt.$$

證明: 首先 $F_k(0)=0$, 其次

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}[F_k(x)-F_k(x-1)]&=\int_0^x F_{k-1}(t)dt+c_kx-\int_0^{x-1}F_{k-1}(t)dt-c_k(x-1)\\&=\int_0^x F_{k-1}(t)dt-\int_0^{x-1}F_{k-1}(t)dt+c_k\\&=\int_0^x F_{k-1}(t)dt-\int_0^{x-1}F_{k-1}(t)dt+\frac{1}{k}-\int_0^1 F_{k-1}(t)dt\\&=\int_1^x F_{k-1}(t)dt-\int_0^{x-1}F_{k-1}(t)dt+\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

但

$$\int_0^{x-1}F_{k-1}(t)dt=\int_1^x F_{k-1}(t-1)dt,\quad \text{(註三)}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_1^x F_{k-1}(t)dt-\int_1^x F_{k-1}(t-1)dt+\frac{1}{k}\\&=\int_1^x t^{k-1}dt+\frac{1}{k}=\frac{x^k}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{x^k}{k},\end{aligned}$$

所以 $F_k(x)-F_k(x-1)=x^k$。證畢。

下面舉三個例子 (註四)

例1: $k=2$

$$\begin{aligned}
&F_1(x)=\frac{1}{2}(x^2+x),\quad c_2=\frac{1}{2}-\int_0^1 F_1(t)dt=\frac{1}{12},\\
&\frac{1}{2}F_2(x)=\int_0^x F_1(t)dt+c_2x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x,\\
\text{得}\quad &F_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x \qquad (\text{見式 } (5)).
\end{aligned}$$

例2: $k=3$

$$\begin{aligned}
&F_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x,\qquad c_3=\frac{1}{3}-\int_0^1 F_2(t)dt=0,\\
&\frac{1}{3}F_3(x)=\int_0^x F_2(t)dt+0\cdot x=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^2,\\
\text{得}\quad &F_3(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2 \qquad (\text{見式 } (6)).
\end{aligned}$$

例3: 利用數學歸納法證明 $k\geq 2$, $F_k(x)=\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}+$ (低次項)。

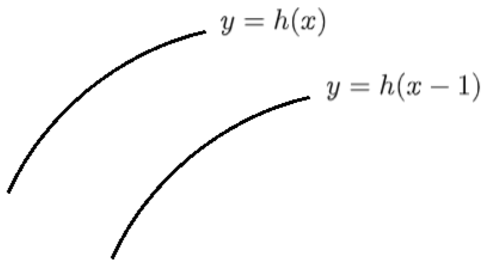
$$\begin{aligned}
\text{假設}\quad &F_{k-1}(x)=\frac{1}{k}x^k+(\text{低次項}),\\
\text{則}\qquad &\frac{1}{k}F_k(x)=\int_0^x F_{k-1}(t)dt+c_kx=\int_0^x(\frac{1}{k}t^k+\cdots)dt+c_kx\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{k(k+1)}x^{k+1}+(\text{低次項}),
\end{aligned}$$

所以 $F_k(x)=\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}+$(低次項)。

註一: 請參考數學傳播 2014 (150), 葉東進的文章《冪次和表爲 n 之多項式的係數律則》。

註二: $y=h(x-1)$ 的函數圖 (如圖)
是 $y=h(x)$ 的圖形向右平移一個單位, 因此切線 (斜率) 也是向右平移一個單位, 所以

$$\frac{dh(x-1)}{dx}=h'(x-1).$$



註三: (如上圖)

$$\int_a^b h(x)dx = \int_{a+1}^{b+1} h(x-1)dx$$

即上限、下限均向右平移一個單位, $y = h(x)$ 覆蓋的面積等於 $y = h(x-1)$ 覆蓋的面積。

註四: 希望本文能提供高中學多項式微積分時一個重要的題材。

—本文作者為台大數學系退休教授—