

有朋自遠方來——專訪

Persi Diaconis 教授



策 劃：劉太平

訪 問：劉太平、黃啓瑞

時 間：民國 112 年 3 月 6 日

地 點：中央研究院數學研究所

整 理：編輯室

Persi Diaconis 教授 1945 年 1 月 31 日出生於紐約，1971 年獲紐約社區大學學士學位，1972 年及 1974 年獲哈佛大學碩士及博士學位。他曾任教哈佛大學，目前是史丹佛大學的數學系暨統計系教授。因他對擲硬幣和撲克牌洗牌等方面的機率論做出了傑出貢獻，他曾獲頒諸多重大獎項，包括 MacArthur 獎 (1982 年)，並且是美國國家科學院院士 (1995 年)。訪談中，讀者將一睹他傳奇的職業生涯和他獨特的數學見解。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 歡迎來訪, Persi。你這麼熱誠, 充滿活力。很高興你來!

Persi Diaconis (以下簡稱「D」): 我仍然深愛數學。

劉: 這讓我想起了一個故事。有次我在 Palo Alto 和 Louis Nirenberg¹ 共進午餐, 他說他想退休。但他其實不必退休, 所以我問他為什麼要退休。他說:「有這麼多經典好書, 但我從來沒時間讀它們」。幾年後, 他退休了, 我又問他:「你的好書讀得如何?」他說:「沒辦法, 我還在做數學」。就以這做為開場白, 我們可以開始了。

D: 有你們兩個好伙伴, 真好, 我很愉快。能見到啟瑞, 真是個驚喜; 很高興見到你。

黃啓瑞 (以下簡稱「黃」): 謝謝。

¹Louis Nirenberg (1925~2020), 加拿大出生的美籍數學家, 對線性及非線性偏微分方程理論, 及其在複分析、幾何中的應用, 做出重大貢獻。2015 年獲頒 Abel 獎。

D: 當然, 我們認識很久了。

黃: 是的, 我們認識很久, 40 年了。從 1980 年代, 應該是 1982 年至今。

劉: 我有時會說: 某某事在你出生之前發生。Persi, 你在這裡, 我就不能這麼說了。

D: 是的。我們同年齡, 都是老傢伙。但是有老的和老朽的... 你知道的, Joe Keller², 我的意思是, 他未曾老過。

劉: 真高興你能來, 我們會操勞你的。

D: 我會保護自己。

劉: 話說這個系列, 名為「許振榮講座」。許教授是臺灣首位做研究的數學家, 在東北大學 (Tohoku University) 獲得博士學位。他過世後, 夫人捐贈了一筆資金, 於是我們有了這個構想。中研院數學所非常樂意贊助, 與中華民國數學會共襄盛舉。中華民國數學會的會長應該會在你的第一個演講做介紹。這系列講座始自 2011 年, 一開始我們請了幾位日本學者, 因為許振榮先生是從日本獲得學位, 我們有某種感念。深谷 (Fukaya)³ 是第一位演講者。

D: 深谷, 目前在石溪 (Stony Brook)?

劉: 是的, 石溪。

D: 他近來有點爭議性。我的意思是, 有些人說:「這是錯的」, 然後他說:「不, 不」。他的工作確實有爭議; 非常抽象, 我一無所知, 但 Yasha Eliashberg⁴認為他很傑出。現在 John Pardon⁵正試圖解決各個問題。

劉: 原來如此。我們繼續討論一下這個話題, 然後再回頭談談你自己。Arnold⁶在史丹佛大學時, 確實提到了其中的一些, 然後他說:「另一方面, Gromov⁷, 我不知道為什麼, 他永遠是對的」。Arnold 就是這麼說的。

D: 我曾在公共場合和 Arnold 鬥嘴。他做了3次演講。我的演講談的是洗牌。這大概是 30 年前的事。我說:「雖然我的洗牌是和排列群 (permutation group) 相關, 但它們適用於其他

²Joseph Keller (1923~2016), 美國數學家, 提出幾何衍射理論來解決波傳播問題。1997 年因他對電磁、光學、聲波傳播, 以及流體、固體、量子及統計力學的貢獻, 獲頒 Wolf 獎。

³Kenji Fukaya (深谷賢治, 1959~), 專訪 2009 年刊載於數學傳播 33 卷第 3 期。Fukaya 近年來的工作重心是辛幾何, 特別是拉格朗日子流形, 以及與這些子流形的交集相關的 Floer homology。Fukaya 發展了一種理論, 將給定的辛流形的拉格朗日子流形視為某種廣義範疇的對象, 現稱 Fukaya 範疇。

⁴Yakov Eliashberg (1946~) 俄國出生的美籍數學家, 專訪 2017 年刊載於數學傳播 41 卷第 2 期。他的研究興趣在辛幾何、contact 幾何、多複變、奇點理論和低維拓撲。他是辛拓撲的創始人之一。2020 年獲頒 Wolf 獎。

⁵John Pardon (1989~), 任教於普林斯頓大學, 解決了 Gromov 提出的結的形變問題。

⁶Vladimir Arnold (1937~2010), 出生於烏克蘭的數學家, 與 Kolmogorov 及 Moser 提出 KAM 理論, 研究可積動力系統的穩定性。因他在動力系統、微分方程和奇點理論方面的工作, 於 2001 年獲頒 Wolf 獎。

⁷Mikhael Gromov (1943~), 俄國出生的法籍數學家。藉由創新思想及非傳統的數學方法, 獲致幾何分析及群論的重大突破, 解決了現代幾何中諸多複雜問題。2009 年獲頒 Abel 獎。

類型，也就是 Lie 理論：A 型、B 型、C 型、D 型」。所以，我說：「所有這些公式在一般類型也是正確的」。一個聲音從這三百人的觀眾中傳來，帶著濃重的俄羅斯口音：「你的理論怎麼看待 E8？」我說：「我不在乎 E8，因為它沒有 n 。我不會讓 n 趨近於無限，我不在乎」。那個聲音說：「沒有自己的 E8 定理的人，不是數學家」。我說：「那人是誰？」。他是 Arnold。演講之後，我走到他面前，試圖與他結識，因為他是一個傑出的人物。他甚至不和我說話。我的意思是，我沒有自己的定理。現在，我有一個關於 E8 的定理，但那是 30 年後的事了。他是個硬漢，Arnold。

劉：非常硬。是的。但是，你知道，他在不同的環境中成長。

D：是的。但 Yasha 也出自那個環境。

劉：是的，是的。

D：Yasha，他是那麼和善。

劉：我知道。

D：而且總是正面的。

劉：我想談一件人們一直難以理解的事；它已經成為關於 Persi Diaconis 的民間傳說。那就是：你很小的時候就離開了家。

D：14 歲。

劉：14。這麼小的年紀。以我的成長經歷來說，這非常奇妙：我出走了。然後怎麼辦？首先，我需要吃飯，需要睡覺等等，對吧？是的。那麼，怎麼辦到的？

D：我是個認真的業餘魔術師。小時候，你懷著我們現在無法重獲的熱情做事。那個時代，最會耍戲法的魔術師名叫 Dave Vernon。他在我 13 歲時認識了我，那時我常在魔術商店裡閒逛，老是曠課。我喜歡魔術。魔術師們會在周六會面，有一次他打電話給我說：「我要去 Delaware 州。你要來嗎？」我說：「要」。他說：「星期二兩點在西邊高速公路見」。就這樣，我收拾好行李就走了，再也沒有回家。我成為他的助手，再也沒有回去。我們走遍了美國。他是一個表演者。實際上，他的年齡是我的 4 倍多；我 14 歲，他大概是 68 歲。一直以來，有一個認真的業餘魔術師組成的世界，你可以靠演講為生，周遊各個城市給演講；他通常就做這事。但有時他會辦場表演，或在電視演出，而我是他的助手。我就是這樣過活的。

魔術師會互相照顧。這是一個非常和善的社群。沒有什麼壞事發生在我身上。有錢的傢伙提供你住宿。我有奇妙的冒險經歷。我絕不願和世界任何人換行業的。

而後他去了西岸，在洛杉磯開始經營所謂的魔術城堡 (Magic Castle)；它至今仍在那裡。我 16 歲時回到紐約，在下東區找了一套公寓，月付約 18 美元，盡我所能以魔術為生。我不

是大明星，但足以謀生。有時順利。我去了香港，在希爾頓酒店表演，也去了南美。但也經常沒事做。有時我去波士頓辦場表演，之後住在劇場寄宿公寓，那裡的人說：「喔，我們那邊需要一位魔術師」。我就這樣過活，直到 24 歲。

而後我開始上大學，學校位在紐約。回首過往 10 年，當魔術師來養活自己的路程，真是美好。我在魔術界仍然有很好的朋友。某方面來說，那是一個有意思的世界。譬如，如果你去一個陌生的城市，你會打電話給一個你不認識的數學家說：「嘿，我是一個數學家。我在這個地區。我們能見面嗎？」你可能會，但大多數人不會。但是魔術師會如此，因為這是一個秘密社團，他們何其高興能遇到可以交談的人。

有件事我尚未達成；然而在這一趟臺灣之行，也許我會解決問題。我對魔術史非常感興趣，中國魔術史是很隱密的。例如，中國著名的魔術技巧，有一項是連環 (linking ring)。你有幾個很大的環，原本它們是分開的，而後其中的幾個連結在一起，對吧？這首次出現在西方時，正值中國軍隊、雜耍演員和一些東西在 1820 年左右來到西方。我也不知道它是從 1720 年，還是從 20 年開始出現在中國。我們不知道。沒有人知道中國魔術的歷史。臺灣一定會有人知道，因為這裡有認真的學者。此地，諸如中國科學史和中國數學史，都有非常謹慎的工作。譬如李約瑟。

但是魔術史；我非常努力地在臺灣搜索，希望尋獲認真的魔術學者，迄今都失敗，至今如此。

劉：說到魔術，在四川，有一種魔術叫「變臉」，可以變換臉。只是個快速的動作，然後他們就變臉了。

D：我看過，太讓人讚嘆了。

劉：是的。而這是嚴格的職業機密，不對外透露，只傳承給兒子、女婿或特殊人物。

D：我看過有人這樣做，真是了不起。

劉：我不懂魔術。魔術的本質是什麼？當然，對外人來說，這是魔術，做了一些違反物理定律的事情等等。但要如何成爲技藝精湛的魔術師呢？你必須有敏感的手，或者你必須深入分析思考？

D：這很重要。但是，也有一些出色的表演者，不太擅長變戲法，但很會表演。他們可以一面伸手碰觸腳燈，一面與人交談，然後他們的助手就有了大箱子。我變戲法、花招 (sleight of hand)；這沒那麼容易。那麼，魔術的定義是什麼？「看似違反自然法則？」我的意思是，這是一種定義。

我和 Ron Graham⁸ 合寫了一本關於數學和魔術的書，裡面有很多關於魔術哲學的東西。一方面，要有一種張力；因爲當你表演時，就像任何戲劇一樣，有一種叫做劇院魅力的東西，

⁸Ronald Graham (1935~2020)，專訪 2019 年刊載於數學傳播 43 卷第 2 期。美國數學家，對組合學有重要貢獻。他與 Paul Erdős 長期合作。

讓你忘記戲院裡有演員，而你成為故事的一部分；它起了這種作用。不知怎地，即使是看電影時，我們也忘記了我們坐在電影院裡。所以，魔術有這個面向，讓人甘願暫停懷疑。但是，你必須愚弄別人，否則你就只是敘事劇裡的演員。但如果你一味愚弄別人，說：「現在，你看。注意我的手。我的袖子裡什麼都沒有」。如果你只專注於愚弄人們，那麼你就失去了劇院魅力。所以說，有一種張力。這就像一部好的推理小說；它必須是好的寫作並且吸引你；喔，到底是誰幹的？你必須反覆思量，因為如果只是「這是一個上鎖的房間」，如此等等，那麼就沒有故事，你看了也毫不在乎，對吧？如果只是故事，那就不是一部好的推理小說。這與魔術非常相似。

優秀的表演者可以沿著山脊走動；讓你極想知道那是怎麼回事，同時又讓你感到欣喜。你感到驚訝，讓表演者帶著你走，到讓你更加快樂的地方。沒有那麼多好的魔術師。卻有很多很多不好的。

劉：這讓我想到了數學教學。有時你在演講中會說，「誰在乎 (Who cares)?」對吧？對我來說，這應該意味著，聽起來很抽象的問題：數論，組合數學，概率論，實際上有一個非常直觀的開始。

D：我總是這樣認為的。

劉：是的。在我看來，你有這種神奇的能力，讓人們覺得，「是的，這個數學問題，它是相當抽象的。但實際上，它可能和一些具體的，甚至是直覺的日常事物相關」。

D：嗯，這在演算法中或許很重要，或者在科學計算、打好牌或實際的東西中很重要。應用數學方面也有同樣的問題。我的意思是，可以真正應用的東西，不同於那些僅僅因為某人能力夠、或因為有人認為它很美，而發展出理論的東西；你知道兩者之間的區別。後者沒錯，非常好。有很多很多成功的人在做數學，因為那些東西是美麗或有趣的；50 年後，那些正好是我所需要的。但另一方面，也有很多胡扯抽象的東西。

劉：是的。它會被遺忘，但當人們需要它時，又會重新發現它。

D：是的。

劉：你如何，在過了一些年的魔術表演之後，對自己說：我對數學有這種發自內心深處的熱愛？

D：不，不是這樣單純。是比這更有意思的故事。

魔術師對狡詐的賭徒非常感興趣，他們玩紙牌和擲硬幣時小心翼翼地作弊。每當我的老導師到達一個新城市時，我們都會嘗試結識那些狡詐的賭徒。你會認為這是不可能的。這完全不是不可能的。首先，你得知一個來自其他城市的名字，也知道狡詐的賭徒不能告訴任何人他們做了什麼。因此，當有人對他們的作為感興趣，並且不會洩露秘密時，他們會很高興。我們總是尋找賭徒，不僅是狡詐的，有時還有那些變戲法之餘還巧妙下注，藉此來取得優勢的

人。

有各種詭譎的賭注。擲一對骰子，你等到兩個 7 出來，或者 6 和 8 出來。每個人都知道 7 是最可能的數位，所以如果我必須等到兩個 7，或者 6 和 8，我會取兩個 7。這是不對的，因為它可以是 6 和 8，8 和 6，實際上直覺不一定對。在各種遊戲中都有一些詭譎的賭注，我對那些賭注很感興趣，而且我非常擅長弄清楚它們。我不是真的理解自己在做什麼，但我會與人討論並且學習。

我問一個朋友：「有沒有一本我可以讀的機率書？」他說，「有的，Feller 的書《機率論導論及其應用，第 1 卷 (*An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1*)》。這是最好的書」。所以我在 18 歲、17 歲左右買了一本。但我看不懂，因為我不會微積分。於是，我開始上大學，是爲了學習怎麼閱讀 Feller⁹。我會想學習，因為你翻個幾頁就感覺到：「哇，這很有趣」，即使你讀不懂。Feller 會講故事，讓它變得有趣。書裡有各種各樣的應用及他的意見。他是一位非常優秀的作者。但是我不懂微積分，所以我不得不學習微積分。

一個有趣的故事我可以告訴學生：我不知道上學意味著什麼。我前三年的微積分成績是 C、C 和 D。而後我選修高等微積分，老師說：「你自己知道，你是個聰明人，但你必須學習」。我以為自己做的就是去聽課，然後就會能說「知道了」。他說：「不。我要請你在考試中證明這些問題。你應該把它們寫下來多練習」。我說：「喔，我從未如此」。我獨自一人，沒有導師，是這個人，Tony D'Aristotle¹⁰，告訴我的。所以，我開始學習，喜歡它。

我學了很多數學，我仍然喜歡它。當時是在社區學院 (city college)，紐約最大的免費學校，位於 Harlem 區中部的第 137 街。學數學的學生們坐在一張桌子旁。我沒有家人。我的意思是，我離家出走。對我來說，這是一個社群，數學是一個社群。我們彼此喜歡，我們互相支援。如果有人遇到麻煩，你幫助他們。這是一個家庭，自昔至今一直是一個家庭。那是很久以前的事了，這是另一個我喜愛數學的理由。

但是，我不得不考慮：再下去該怎麼辦？一開始我晚上去上課。在社區學院，你可以只選課，如果成績及格，就可以換到白天上課。我沒有高中文憑或任何東西，但他們讓你選課，這還可行。

就這樣我喜歡上了數學。我選修實變，非常有趣。然後問題來了，我想去讀研究所。我想，「好吧，我試試」。我申請了幾所數學研究所，但有一所……我想去哈佛，因為我是個窮孩子，而哈佛就是哈佛；就是：「哇，哈佛」。我的老師們拒絕寫信去哈佛。他們說，「社區學院從來沒有人進入過哈佛數學系」。那時他們的信都還是用手寫的，「我們不會寫這信」。

我就這樣申請了哈佛大學統計系，招生委員會裡有一位認真的業餘魔術師 Fred Mosteller¹¹。

⁹William "Vilim" Feller (1906~1970)，克羅埃西亞出生的美國數學家，對馬爾可夫鏈理論有重大貢獻，並以兩卷專書聞名於世。

¹⁰Anthony D'Aristotle.

¹¹Fred Mosteller (1916~2006)，美國統計學家，著作甚豐，對美國統計學的發展有重大影響。

有一位幫我寫信的人是 Martin Gardner¹²。他寫的信說：「我對數學一無所知，但在過去 10 年投注的 10 個最佳紙牌技巧中，這個孩子發明了其中的兩個。你們應該給他一個機會」。Fred Mosteller 說：「我們給他一個機會」。所以，他們讓我進入哈佛統計系，我想：「喔，我會轉去數學，但我喜歡統計學。可以的」。你可以自稱統計學家，然後去做任何事情，因為我就是個例子，對吧？這就是我過渡的方式。

那段時間，我一直以魔術為生，因為我必須謀生。我還是個年輕小伙子。我不是大明星或什麼人物。有時你賺一百美元，有時你賺 25 美元。我去了英格蘭，擔綱男子俱樂部的開場表演。他們會有一個歌手、一個喜劇演員，通常還會有一個脫衣舞孃，這是最主要的：一個脫衣舞孃，外加一個魔術師，對吧？我們每晚做三場演出，賺到 50 鎊。那些人是我的朋友，他們仍然是我的朋友。我這樣做了六個月，賺的錢不多，但是我生活、我冒險，非常的好。有一個非常活絡的魔術社群，至今我仍和他們交流。

劉：在我看來，你善用了西方世界提供的自由。

D：是的。

劉：人們有正確的心態，會說：「我們給這個人一個機會」。

D：是的，譬如說法國，就不一樣了；離開 10 年後回來，非常非常困難。這裡或許可能？如果你退出了體系？我不知道。可以嗎？在臺灣，有人可以這樣起步嗎？當然可以。你可以去社區大學。你可以……，但很難，對吧？這更難。在美國？好吧，它發生了。

劉：對你來說，它不僅僅是個地方。它是哈佛，提供一流的教育，對吧？但即使在社區學院，在你拿了 C、C、D 的成績後，也有人對你說：「是的，你搞錯了。身為學生，你需要做功課」，然後還是容許你繼續求學。

D：我做了功課。我可以解題，但我不知道自己必須為考試而學習。就是如此。我從來沒有想過。我只是覺得我很笨，沒有能夠看到這點。我以為只要坐在那裡看就行了。

劉：我明白。事實上，需要更用功些才能熟練。

D：一旦我得知這個想法，情況就好轉了。

劉：不過，仍然要有動機。你說，「好，我知道如何下注，每次都能占一點優勢，確實是機率理論在幫我。我需要學習機率論。在此之前，我需要學習微積分」。這是一個非常合乎邏輯的推理。

D：我有很好的老師。記得我第一次去上初等機率的課時，頭一遭聽到中心極限定理。這是一個相當大的班級，可能有 40 人。我打斷了授課。說：「什麼？真的？我的意思是，任何分佈都歸結到鐘形曲線？」我只是想：這真是太好了。我說：「那太好了」。老師沒有修理我。他說：

¹²Martin Gardner (1914~2010), 1956 至 1981 年在 Scientific American 雜誌撰寫數學遊戲專欄。

「是的，這很了不起。這是一個偉大的定理。一種普遍性的體現」。他們很高興。社區學院的老師想教普羅大眾；我的意思是，他們接納來自不同背景的人；如果有人閃現光點，老師就會去照亮他們，幫助他們。這非常好。

劉：是的。這些年來社區大學是否有些改變？

D：嗯，我在那裡的期間，它已經開始改變了。社區學院的設置，曾經是爲了那些想留在紐約的聰明年輕人。在我求學期間，首先是 1968 年，由於越戰，街頭發生騷亂，社區學院變了。有人說：「每個人都應該能夠進入社區學院。但是有些人沒有背景，譬如少數民族和其他人。因此，我們要改變結構」。他們曾經有各種各樣的大學部課程：實變、微分幾何、偏微分方程，都刪掉了。他們製作了一個分數加法和讀比例尺的課程，讓學生爲就業做準備。這發生在我求學期間。呃，這真的很可怕，因爲他們讓所有人去教補救課程。現在情況好多了。當然，他們確實在教書，讓任何想去的人有一個機會。

此外，社區學院與城市大學 (city university) 不同。你知道，城市大學聲譽卓著，非常斯文高雅。它們有非常優秀的數學家，做最好的抽象數學。那裡的數學沒有那麼多的應用性。我們認識城市大學的應用數學家嗎？我不認識任何在那裡做實際應用的人。

黃：話說 Feller 的書，你覺得它對學生的學習有幫助嗎？

D：我認爲這是一本很了不起的書。我開始在哈佛教書時，想到了 Feller；這是一本很好的書。但是，當然，如果你想學機率，除了離散機率之外，還必須學習連續機率，對吧？所以我也需要...

黃：第 2 冊。

D：第 2 冊。對。我教大學部課程，指定第 1 冊和第 2 冊爲教科書；學生們來上課，他們很震驚。這也許是 1985 的事。但爲什麼 Wiley 從不降低價格，或製作廉價版的 Feller... 所以，每冊是 200 美元。學生們問：「我們必須買這些書嗎？」它們是很了不起的書。我教過 Feller。它們對學生來說很困難，水準略高，而且也充滿錯誤。我的意思是，在段落層次來看，它很精彩。但在句子層面上，它經常是不對的。然後，在章節層面，他沒有講到 Martingale。他有自己的看法。他的出身是偏微分方程。Feller 是一名分析學者。但關於什麼是機率，什麼是機率的核心理論，它有一種奇妙的風味。我不知道還有哪本書有這種風味。

現在每個人都在教 Ross 的書¹³，這沒關係，還不錯。我上次在史丹佛大學教機率時，也是教 Feller 的書。這是一種有趣的教學方式，我的意思是，人們不知道的是，學生現在不懂分析。我意指的是什麼樣的分析？ $\log(1-x) = -\sum x^i/i$ ，或者如何進行估計。學生們不再學習這些了。但也許在應用數學或者數論中，他們會學到如何進行估計。但特別是美國研究

¹³Sheldon Ross,《A First Course in Probability》及《Stochastic Processes》。

生和大學生，並沒有學會如何獲得有用的上限和下限，從公式中得到數字。他們沒有學到。Feller 的書到處有這些東西。這很重要。

黃：這是一本很難的書。我讀了它，但不是整本書。而且習題非常困難。

D：是的，這是真的。這是一本很難的書。真是難。但這是哈佛和史丹佛，聰明的學生。這是一門成功的課程；我是說，他們沒有半途離開。他們離開的時刻，都是在我教了一些自己一無所知的東西時，譬如抽象代數、建物或更不堪的，這時班級很快就會縮減成 4 或 6 個學生。但 Feller 總是……因為這是一本很精彩的書。我能讓他們接觸到 Feller，那就好。

我做過類似的事情。你知道 Knuth¹⁴，Don Knuth，偉大的 Don Knuth。他也寫了很了不起的書，我用它們教組合數學，因為我想：或許我能讓學生們接觸 Knuth……我無法涵蓋 700 頁，但上次我教大學部組合學時，使用了第 4A 冊，有排列、組合、集合分區、圖形等等，應有盡有。它又用它們做出東西，真的用它們一起做出東西。它不只說，「我們這樣做是因為它有趣，或因為它很好玩」。重要的是，如果我能教給學生們那些東西，讓他們閱讀 Knuth 其他的書，那就是給學生的一份禮物。雖然它們也是困難的書，但他在書後有習題的解答。好書無價。應該要有人列出好書的清單。

黃：Stirling 公式的逼近公式通常很粗糙。

D：是的。

黃：但我需要一些進階的逼近公式。我在 Feller 的書中找到了。

D：告訴我們！我在課堂上教那個，兩節課才做出 Stirling 公式……嗯，很好，我以前每堂課都這樣做。對，如果你想找到 Stirling 公式非常好的上限和下限，Louis Gordon¹⁵ 在《*American Mathematical Monthly*》上有一篇精彩的文章¹⁶，有美麗、最佳的、有用的上限和下限。但是，當然，在 Abromowitz 和 Stegun 的書¹⁷中，你也可以找到一些，但 Louis 的更好，使用了 Gamma 隨機變數的機率來證明。在組合數學中，他們通常滿意於此：這裡有一些序列，它們有一個生成函數，然後，瞧，我們可以寫下右側的封閉解 (closed form)，然後停下來。它是沒用的！當 n 為 52 時，它說了些什麼？ n 為 100 時，它說了什麼？Feller 解釋了如何從公式中獲得數字，這很有價值。我仍然嘗試這樣做。

劉：來換個話題。回頭看，你曾在劇院做魔術師、紙牌等等，但在職業生涯的後期，你又回到了

¹⁴ Donald Knuth (1938-)，美國數學家暨電腦科學家，對演算法有卓越研究，並發明 TeX 排版語言。著作包括多卷《*The Art of Computer Programming*》。1974 年獲頒 Turing 獎。

¹⁵ Louis Gordon (1946~)，任教於南加大，專精統計學。

¹⁶ Louis Gordon, A Stochastic Approach to the Gamma Function, *the American Mathematical Society*, Vol. 101, No. 9 (Nov., 1994), pp.858-865

¹⁷ Abramowitz 和 Stegun 是 1964 年數學參考書的非正式名稱，由美國國家標準局（現為美國國家標準和技術研究院 NIST）的 Milton Abramowitz 和 Irene Stegun 編輯。

洗牌等等。這和你當魔術師的時候稍有不同，對吧？

D: 沒有太大的不同。例如，這就是我如何第一次學到二進制數。我會解釋的。魔術師和狡詐的賭徒可以完美地洗牌；完美意味著你將它們精確地切成兩半。你有（洗牌的聲音）。1, 1, 1, ... 好。現在，為什麼有趣呢？好吧，假設我在上面有 4 張王牌。如果我完美地洗一次牌，那麼每隔兩張它們會現身，對吧？每隔一張會出現。如果我洗兩次牌，它們就是每隔四張會現身。如果我發牌給 4 位玩家，我就會拿到王牌，對吧？

劉: 這是非常確定性的。

D: 嗯，當然。這是完美的洗牌，但仍然... 我想我 13 歲時就學會了這個；我在魔術店裡閒逛，一個傢伙從英國來訪... 好的，有兩種完美的洗牌。和我談論洗牌就像和加州人談論葡萄酒，你知道嗎？你會聽到...

劉: 欲罷不能。

D: 哦，不，不，我會停下來。所有兩種完美的洗牌：in-shuffle，最上面的牌去到內部；out-shuffle，最上面的牌留在外面。它們稍有不同。那麼，你能用這些做什麼呢？假設我想將最上面的牌帶到位置 6；魔術師可能想把最上面的牌帶到一個已知的位置。我瞭解到，如果你把最上面的牌帶到位置 J ，你取 J 減去 1 並用二進位表示，然後如果你運作洗牌序列，其中 1 是 in-shuffle, 0 是 out-shuffle, I-O-I-I-O, 你會把最上面的牌帶到 J 的位置。這就是我對二進位數的瞭解。

當孩子們對棒球或足球感興趣時，他們會著迷，對吧？所以我癡迷於練習。例如，一副紙牌要回復原狀需要 8 次完美的洗牌，需要 8 次完美的 out-shuffle。我學會那條漫長的路途。你洗牌，洗牌，直到他們回復原狀。我意識到，如果你做任何重複的事情，卡片當然會回復原狀。嗯，當你 13 歲，14 歲的時候，這是一個很大的發現，對吧？所以，即使它不是數學，仍然是數學，讓我對數學有些感覺。

我從研究所畢業時，我想：「我只是要成爲一名數學家，統計學家，我不會告訴任何人和魔術有關的東西，因爲他們只想談論魔術的那些東西。我現在做的是數學」。後來，不知怎的，Ron Graham 和我想了解 in-shuffle 和 out-shuffle 能做出什麼排列。如果開始時最上面有四張王牌，而你要發牌給五位玩家，能否在洗牌後讓莊家拿到王牌？這是一個和對稱群相關的數學問題。

我無法回答很多這樣的問題。似乎是在 1975 年，Don Knuth 教了一門課，聯繫教授們，說：「如果你有任何你感興趣的非數值計算，我有一個滿是年輕人的班級，我們可以嘗試」。我說：「我想知道由 in-shuffle 和 out-shuffle 生成的群的階是多少」。怎麼做？好吧，你從排好的順序開始，從 1 到 $2n$ ，然後你 in-shuffle 一次，接著 out-shuffle 一次，如此這般，持續運作，同時追蹤排的順序。假設它是 4 張牌或 10 張牌。他們開始這樣運作並生

成數據，而演算法跑得非常慢。他們終於做了 52 張牌，在一台大機器上花費了一個小時的 CPU 時間。52 張牌的洗牌群 (shuffle group) 是什麼？這在一台大型機器上，耗費了一個小時的 CPU 時間。但後來，我有了數據，可以猜到模式。而後 Ron Graham、群論學家 Bill Kantor¹⁸ 和我合作，證明了這件事¹⁹。這是很難、很難的，是非常困難的群論。它上了紐約時報。我的底細被洩漏了。如果你看了《紐約時報》的頭版……

劉：是的，我讀了這篇文章²⁰。

D：是的，「教授洗牌」。我怎麼改變了志趣？我們這個領域的一位佼佼者 Paul Lévy²¹。初到史丹佛大學任教時，我經常去圖書館。當時 Lévy 的作品集已經出版，是 6 冊法文。現在的我法文很差。當時更糟。我現在有法國妻子和法國小孩，所以法文有進步，但仍然一點也不好。當時我拿起一卷 Paul Lévy 的作品集，隨機翻開，頁面上出現完美洗牌的方程式。哎呀，Lévy 寫了 10 篇關於完美洗牌的論文。他因病臥床一年，有興趣知道何種排列可能發生。他寫了 10 篇論文，魔術界沒有人知道這件事，數學界也沒有人知道。我知道這件事，我說：「啊，如果 Lévy 可以做，我也可以」。

劉：凡人都可以做。

D：是的，喔，不是。Lévy 是一位偉大的數學家。

劉：是的，有些人可以做。

D：有些人可以做，對。我想我來做應該也可以。這就是我何以會在史丹佛大學開始學習洗牌。這就是我何以回應了 Don Knuth 的徵詢。Don 還在做研究。他已經 85 歲了，仍然……他讓人讚嘆。Don Knuth 是一位偉大的作家，偉大的科學家，偉大的數學家，事實上，如果他願意，他可以做出偉大的數學。他拿的是數學的博士。

劉：有一次，Don Knuth 在史丹佛給了一個演講，你在聽眾席中，做了一些評論。我記得他在演講開始時說：「今天的演講會很短，因為我要講的是拉馬努金 (Ramanujan)²² 的一篇很短的文章，只有 3 頁」。但是，四十分鐘後，他只講了前半頁。

D：每年耶誕節，他都會給「聖誕樹講座」，只給一個演講。他的演講何其好，人們至今仍記得 Don Knuth 是誰。聽眾有 150 人。老實說，他不是一個傑出的演講者；30 年來他都沒再

¹⁸William Kantor (1944~)，美國數學家，任教於 Oregon 大學，研究有限幾何，以及有限群在電腦科學（群論演算法）、組合學、編碼理論和幾何學中的應用。

¹⁹Persi Diaconis, Ronald Graham and William M. Kantor, The mathematics of perfect Shuffles, *Advances in Applied Mathematics*, Volume 4, Issue 2, June 1983, Pages 175-196.

²⁰Gina Kolata, *In Shuffling Cards, Seven is Winning Number*, New York Times, Jan. 9, 1990

²¹Paul Lévy (1886~1971), 法國數學家，早年是泛函分析專家，對機率論有重大貢獻，特別是 Wiener 過程及 Lévy flight 方面的研究。

²²Srinivasa Ramanujan (1887~1920), 對解析數論做出了重大貢獻，致力於橢圓函數、連分數和無窮級數的研究。

教書。但他仍然喜歡那些題材。上一次講的是組合的東西：Baxter 排列²³。

劉：我們來談通俗演講。你在萬聖節給演講，是關於不可測集。

D：不可測集，是的。

劉：不可測集。你似乎把它和鬼魂聯繫起來，因為萬聖節是關於鬼魂的，對吧？

D：還有怪物。那是怪物出沒的時候。我教研究生機率時，不曾教到不可測集。這並不難，但也並非標準的題材，所以，在萬聖節，我給了通俗演講，談不可測集，因為這是怪物出沒的時候。人們來聽。在倒數第 2 次，不是我最後一次，有個 12 歲的女孩和父親要去聽我的講座。我站在門口，說：「妳知道，這是數學課」。她看著我的眼睛說：「我想知道什麼是不可測集」。上帝保佑妳，好姐妹。真是太好了。

劉：這讓我覺得你有辦法讀懂人類的情感。因為怪物是鬼或者其他什麼的，對吧？不可測集是其中一員。

D：它是其中一員。如果沒有選擇公設 (axiom of choice)，就無法構建一個不可測集。我的意思是，你不能寫下一個不可測集。你可以用英文描述解析集合，但不能用英文描述非 Borel 的集合，或是確實不可測的集合。

劉：但對理解可測集來說，這些東西不可或缺，因為我們被教育，覺得一切都是可測的。如果一切都是可測的，那麼就沒有必要提到「可測」這個詞。

D：數學家大都不會對此深思熟慮，但史丹佛大學的 Grigori Mints²⁴ 不同。他在哲學系，但他是數學家，是像 Brouwer 和 Bishop 那樣的俄羅斯建構數學家。你可以和他談談，他對數學很感興趣。有一次看他走來，我說：「嗨」，他也說：「嗨」。接著我說：「你還好吧？」他說：「不」。我問：「怎麼了？」他說：「你怎麼可能做數學？基礎這麼糟糕，怎麼可能做數學？」這是發自內心的。我想，「哎呀」。你知道的？因為我們不關心基礎，對吧？對我來說，一切都是有限的。

但我曾和一些邏輯學家一起做研究，他們的思考擴及無窮大，但也只是第一個不可數基數 (uncountable cardinal)。你可以假設單位區間中的每個集合都是可測的；這與一些可測基數的存在相矛盾，但不抵觸任何人類可以思考的東西。邏輯學家的研究擴及那裡，那也是數學。如果你假設了這件事，那麼它來自公設，但它無關乎任何你可以觸及的東西。

不，但如果有人要解決 P-NP，那就是邏輯學家。那關乎數學語言的一些結構性的東西。每個人都對 Poincaré 猜想有意見，然後 Perelman²⁵ 解決了。在有人解決 P-NP 之前，大家

²³<https://www.youtube.com/watch?v=zg6YRqT4Duo>.

²⁴Grigori Mints (1939~2014)，生前任教於史丹佛大學哲學系。他的研究重心是證明論、數學推理分析及其在電腦科學等領域的應用。

²⁵Grigori Yakovlevich Perelman (1966~)，俄羅斯數學家，證明了 Poincaré 猜想，而後拒絕接受菲爾茲獎及 100 萬美元的

都只是信口說空話。

劉：你離開哈佛，搬到史丹佛。這是兩個不同的社會。

D：是的。

劉：可以評論一下嗎？

D：當然。首先，我為什麼離開史丹佛，搬到哈佛？起初我在史丹佛大學統計系，經常去數學系參加研討會。我 1974 年開始在史丹佛大學工作，大約在 1980 年離開。當時數學系對應用數學非常敵視。他們把電腦科學扔出去，又和統計學切割。你們可能認識的鍾開萊²⁶。他曾經在研討會上大喊：「哦，Persi，你又來假扮數學家了」。少量的點點滴滴就會產生宏大的效應，對吧？還有些老傢伙，分析學者，十分多疑。他們對應用數學很不友善，對我尤其如此。我在做數學，我有機會去哈佛數學系，他們真的很想要我去，所以我去哈佛。該死，史丹佛數學系。他們不想和機率學者交談。好的。Sam Karlin²⁷對我很好，這有點出乎意料。他很有趣... 你認識 Sam 嗎？

劉：是的。生物學界的人把他當成自己人。他做生物，而不僅僅是生物學中的某種數學模型。

D：他們何其愛用他的演算法去搜索 DNA 序列。他非常受人尊敬。他是個好數學家。他在我背後對我很好，而不像大多數人，只在你面前對你很好。Sam 在我背後對我很好。但我何時才可藉由某個問題打動他？他寫了一本關於全正值 (total positivity) 的書，難以閱讀。我有一些問題。我知道它在書中的某個地方。所以，我說：「Sam，看。你能不能，你知道，我有這個問題」。Sam 說：「喔，這太微不足道了。而且，我已經做出來了。你為什麼對此感興趣？」我從來沒有從他那裡得到過有用的答案。但我真的很尊敬他，但他不會坐下來聽我講，和我進行科學對話。但那只是 20 年時光。

所以我真的離開了史丹佛，因為數學系很封閉。現在這是一個完全不同的系所。他們真的非常友善，好人。有一些非常好的人。

劉：史丹佛早年在古典分析方面很強，對吧？

D：是的，有 Schiffer²⁸，Paul Cohen²⁹，Szego³⁰等。我剛到史丹佛時，去聽了 Pólya³¹講課。

Clay 獎。

²⁶鍾開萊 (1917~2009)，華裔美籍數學家，對布朗運動、隨機過程及其在幾何、分析的應用有卓越貢獻，並有十多本專書著作。

²⁷Samuel Karlin (1924~2007)，波蘭裔美國數學家，生前任教於史丹佛大學數學系，研究賽局理論及其在經濟學、人口統計的應用。1989 年，提出一種估計一個生物體的已知 DNA 序列與另一個生物體的已知 DNA 序列之間相似性的方法，協助研發方法來對具有統計顯著性的 DNA 匹配進行排序。

²⁸Menahem Max Schiffer (1911~1997)，德裔美國數學家，從事複分析、偏微分方程和數學物理研究。

²⁹Paul Cohen (1934~2007)，美國數學家，使用 forcing 的技巧，證明選擇公理和廣義連續統假設在集合論中的獨立性，從而獲費爾茲獎。他對調和分析也有卓越貢獻，曾提出 idempotent theorem。

³⁰Gábor Szego (1895~1985)，匈牙利裔美國數學家，研究極值問題及 Toeplitz 矩陣。

³¹George Pólya (1887~1985)，匈牙利裔美國數學家，研究機率、分析、數論、幾何、組合數學和數學物理。

這是一個精彩的故事，所以我要講一下。Pólya 當時 81 歲，有人勸他開個組合數學的課。課堂有 100 人。Pólya 是個迷人的老傢伙。他 81 歲了。第一堂課時，他在一個 3×3 的正方形上，寫了「Abracadabra³²」這個字。他說：「這裡有一個問題要問你」。他說：「在這個正方形上有多少種方法可以寫出『Abracadabra』？」他說：「有多少人認為方法數介於 50 到 500 之間？」有些人舉起了手。然後，他說：「有多少人認為介於 500 到 5000 之間？」更多的人。「有多少人認為大於 5000？」然後，他看著觀眾說：「你認為所有問題最好都用選票多寡來回答嗎？」這真是太精彩了。他的課堂充滿這樣的事情；有一些很好的故事是他之前講過的，但很精彩。當然他早就從數學系退休了。

我不會指名道姓，但有人非常非常討厭我。

我在哈佛時，是在數學系，統計系不想和我說話。好吧，我去了。我在那裡待了將近 15 年後，遇到了我的妻子，她是法國統計學家。我們必須找到兩份工作。哈佛不感興趣。我們試了一下麻省理工學院，也試過康乃爾。接著我打電話給史丹佛大學，Iain Johnstone³³說：「我們會解決這個問題」。他們為我們打造了 2 份工作。這就是我搬回來的原因。我一半在統計系、一半在數學系，我非常滿意。她也喜歡她的工作。這就是我搬家的真實故事。我不得不找 2 份工作。我有一個我在乎的妻子。

劉：當時在哈佛是誰要你去的？

D: David Mumford³⁴ 和 Barry Mazur³⁵。

劉：Mumford 當時在做應用數學？

D: 是的，沒錯。Mumford 想學機率，希望有人和他交談，Barry 是我的朋友兼粉絲。我在哈佛大學統計系獲得了博士學位，但我選修過很多數學。對我來說，最溫暖的一個時刻，是我畢業時，兩位數學家 Barry Mazur 和 Lynn Loomis³⁶帶我出去吃午飯，他們說：「看，你可以做數學，我們不想失去你。你應該申請博士後」。我去了史丹佛，但我在哈佛有數學界的朋友：David Mumford 和 Barry Mazur。當時組合數學已經是大家認可實在的領域。他們還想要一些機率。這是一個很小的系所，哈佛系所。只有 13 名終身職教授。

黃：David 告訴我，他從你那裡學會了機率。

D: 是的。

³²是一個著名的咒文，作為「magic word」在進行魔術表演時使用。

³³Iain Johnstone (1956~)，澳洲出生的統計學家，任教於史丹佛大學統計系。

³⁴David Mumford (1937~)，出生於英國的美國數學家，因代數幾何方面的工作而獲頒 1974 年菲爾茲獎。而後對電腦視覺及模式理論貢獻卓著。目前是布朗大學應用數學系名譽教授。

³⁵Barry Mazur (1937~)，美國數學家，對數論、算術幾何、幾何拓撲、微分拓撲、代數幾何有重大貢獻。2022 年獲頒 Chern Medal。

³⁶Lynn Harold Loomis (1915~1994)，美國數學家，研究分析、應用數學及統計。

黃：我問他：你怎麼學的... 他明白地說，是向你學的。

D：他的做法是正確的。他旁聽大學部課程，接著旁聽研究所課程。而後他教大學部課程。真正以我們的方式學習機率的數學家，David Mumford 是我認識的唯一一位。一般人學習機率，就說：這是一個可測量的函數。但他確實學會了真正的機率。

我嘗試過；50 年來，我一直試圖教數學家機率，但機率太難學了。這就像自學，或者教數學家物理。如果你在大學時沒有用心學過，就難了。我們知道 Hilbert 空間是什麼，但對量子力學有感覺嗎？它完全是另一回事。如果你以那種方式開始，那就太好了。但是，你知道，很少有數學家真正在談論物理學或機率。我猜想，俄羅斯人在大學時就學會了機率，他們真的學會了。

劉：他們在高中時就已經被拔尖出來了，對吧？

D：對。還有 Kolmogorov³⁷。機率融入了文化、數學文化。但是美國人...

劉：要為美國教育體系辯護，我知道可能不是那麼容易。有一次，Arnold 一如往常行事，我說：「既然你和我此刻都在美國，美國一定有什麼東西是正確的」。美國的人才比較分散，對吧？在俄羅斯，有如此密集的優秀人才。但在美國，你最終進入了數學學術圈，是一個好例子。

D：你可以來自美國的任何地方，但比較困難。

1986 年，當我開始在哈佛大學任教時，偉大的 David Kazhdan³⁸ 說：「你能給一個演講，談談什麼是隨機變數嗎？」我說：「David，你知道，隨機變數是一個可測函數」。他看著我說，「對你來說不止如此，應該另有意涵」。他是對的。所以，我做了這樣一個演講，試圖解釋... 但是唯一曾學會的人是 David Mumford。他很特別。他依舊很特別。

劉：機率很難。

D：是的，但你學會了。

劉：我在史丹佛大學教了幾個學季的機率，因為我下定決心，雖然不想成為一個機率學家，但我了解機率。

D：你教得很好。大家都這麼說，我們有去探聽。這是一個很好的課程。

劉：我花了很長時間，才了解一個非常困難的東西：Bayesian。對我來說它非常深奧。你對這個領域有些感覺。

D：是的，謝謝。我想知道，臺灣有 Bayesian 嗎？我想沒有那麼多。

³⁷ Andrey Kolmogorov (1903~1987)，俄國數學家，發展了機率論的公理基礎。他利用機率理論研究了行星的運動和噴射發動機的湍流氣體。他也是演算法複雜性理論的奠基者。

³⁸ David Kazhdan (1946~) 前蘇聯及以色列數學家，對表示理論有重大貢獻，在 Kazhdan - Lusztig 猜想及 Langlands 綱領方面成就斐然。

黃：我不知道。

D：如果有的話，你應該會知道。我想為數甚少。

黃：是的，你或許知道，我有兩篇統計學的論文，可算是眾所周知的長篇論文，但我仍要說我不了解統計學。統計學非常不同，就像自然科學。雖然我寫了兩篇統計學的好論文，但是我對統計學並沒有感覺。

D：但 Grenander³⁹ 是 Bayesian。Gelman⁴⁰ 是 Bayesian。你知道，布朗大學數學系相當 Bayesian。你逃跑了。

劉：我在 2000 年回到台灣時，開始了這系列專訪，標題名為「有朋自遠方來」，引用了孔子的話。在他的《論語》的開頭，他說：「有朋自遠方來，不亦樂乎？」現在你說你不了解統計學。有一句著名的孔子名言說：「知之為知之，不知為不知，是知也。」，但很多人甚至不知道自己並不知道。

D：對。那是非常... 我不知道那是孔子說的。

劉：知之為知之，不知為不知，是知也。

D：你在學校和那些諺語一起長大。

劉：是的。孔子其實尚可。只是因為要讀這些才能通過入學考試，所以我們不喜歡它。但平心而論，他很不錯。

D：他很好。你知道我寫了一篇關於《易經》的論文嗎？你怎麼發音？

黃：易經。

D：孔子寫過評論。早期對《易經》的註解有些可以追溯到孔子。我想簡短說明一下我做了什麼；我的意思是，我如何寫成那篇關於《易經》的論文。部分的《易經》需要你生成隨機模式。傳統上，你有 49 根蓍草，把它們分成 2 組，而後拿掉 4 根，於是蓍草有了相當複雜的隨機分布。現今人們改用硬幣來做，我證明兩者產生的分布是不同的，確實相異。現代人入門的分布與古人不同。

要證明它們不同，我需要製作一個模型，用它來隨機分割一堆棒子。假設你有 49 根蓍草，像這樣把它們分成兩組。我想對此做一個數學模型。Laplace 說，「嗯，均勻分布」。但這是不對的。我的意思是，它較常接近 $1/2$ ，不是均勻的。好吧，二項式分布不是那麼糟，因為每根棒子都有一半時間往左或往右移動。我證明的是，你所做的分布假設並不重要，它會被抵銷掉。實際上，這是一個 Tauberian 定理，是一個很好的定理。

³⁹ Ulf Grenander (1923~2016)，瑞典數學家，生前任教布朗大學。他的早期研究涉及機率論，隨機過程，時間序列分析和統計理論。近幾十年來，他為計算統計，圖像處理，模式識別和人工智能做出貢獻。

⁴⁰ Andrew Gelman (1965~)，美國統計學家，哥倫比亞大學的統計兼政治學教授。

而我之所以會研究《易經》，是因為要了解機率的歷史；它確實是1650年從 Pascal 和費馬 (Fermat) 開始的嗎？人們賭博……你知道，羅馬士兵用骰子賭基督的衣服。但是沒有關於《易經》的定量思考記錄。《易經》是誰設計出來的？它早就知道一些組合學了。這是一個非常複雜的儀式，但一切是平衡的，實線和虛線出現的可能性相同。有人曾知道一些事情。這很有趣，所以我寫了關於《易經》的論文。

我在嬉皮的年代長大，當年很多人習慣用易經來決定是否出門喝咖啡。現在我想人們在電腦上做決定，對吧？你必須看看電腦用了什麼演算法，用它生成了隨機模式。我還沒有這樣看。無論如何，你可以從任何事情中得出機率。這是我的感覺。

但有趣的是，人們使用這本書的方式，與傳統方式之間的差異，不在小數點後三位。它位於小數點後第一位。這確實很不同，這是有趣的部分。

我看到你有一個問題清單。

黃：太嚴肅的問題。不管它。

劉：不。給我們一些問題。我們需要嚴肅的事情。請說。

黃：話說現在的線上教學，您如何看待它對數學的影響？

D：有什麼影響？這和我們一起在房間裡不一樣，也和 Zoom 上見面不同。我不知道原因。它比電話好多了。疫情開始時，我在葡萄牙，在 Zoom 上授課……它不是很好，但它現成可用。

現在，大班級，任何大班級，有時一個 500 人的班級，他們都被錄影了，學生可以在他們想看的時候觀看。但它肯定效果是不同的。在現場課堂上，我呼喚學生。你可以看到他們是否在微笑、閱讀報紙、使用手機。你可以查看自己的講課效果如何。這就像一個演員，在劇院現場演出。你參與其中，你付出了你的精力和注意力，這讓教授與眾不同，對吧？

這不同於看電視。這有點微妙，並不太糟，也許我們會更加善用它。在疫情肆虐期間，這像是天賜之物。我不知道此地是否如此，但我們在所有系所都看到了這情況，尤其是數學系：大一新生不懂高中數學，因為疫情而損失了一兩年。他們自學，在 Zoom 上學習。那是不一樣的，真的不一樣，你可以涵蓋的教材料減少了 20%。在聰明學生的課堂，他們不認識二項式公式。我們的 Math 63，是要開給超級聰明的學生，但即使是超級聰明的學生，也不會藉由二項式展開 $(a + b)^n$ 的係數，也不知道各種基本的東西。這證明了一些事情：線上教學的成效是不一樣的。

但我不是教育專家。總之我不喜歡它。而且，我幾乎不發送電子郵件。我的妻子是專家；她被困在葡萄牙，而我在家，我必須弄清楚 Zoom。我有一個 iPad、電腦和一部手機。我給她看那些按鈕；她對我尖叫，「不要那樣做，不要」。所以或許我不是回答這個問題的最佳人選。

劉：我有一個研討會，每週四上午 10 點至下午 1 點，進行 3 小時。我人在史丹佛時也照常如

此；那裡是晚上。每周大約 15 到 20 人參加。實際情況是，有些人會進行少許互動，但為數甚少。其他人只是被動地坐在那裡聽。

D：他們甚至不露面，很多人根本見不到臉。

劉：對，對。事實上，大多數人如此。因此你幾乎可以得出一個結論：它的成效不是最為理想。

D：不是。但總比沒有好。聊勝於無。我要求他們露面。我說，「沒有人能讓你這樣做，但我們在一起。你露個臉，讓我們知道有其他人在場。你願意現身嗎？」

劉：可以這麼說，你在天上人間往返。現在你談到了《易經》。你似乎一直在學習。你如何學到這麼多東西。

D：我能夠如此，是因為我喜歡學習新事物。我能夠解決問題的原因在此。我總會先問：「怎麼可以讓你著手解決問題？」對我來說，如果這意味著我必須學習一些新的數學，那幾乎保證了我會希望去學它們。接著我會努力以赴。

對我來說，數學也很有社交性。你問我一個問題，與我在網路等等地方閱讀問題，是非常不同的。而後我們可以互相交談，這也許會讓你更快樂，也許會讓你對我有好的評價。對我來說，在數學的互動中，人的角色非常重要。而且，如果我和某些人一起工作，他們知道某個東西，我就可以從他們那裡學到它，或是學會其它的。這就是我如何學會了幾乎所有東西；不是從書本上，而是從某某人那裡。這是我們真正學習事物的方式，對吧？

David Freedman⁴¹教過我。我去哈佛讀統計學研究所，當時沒有研究所的機率課程。我從來沒有上過研究所的機率課。我寫了博士論文。我到史丹佛時，David Freedman 在柏克萊，我們開始一起研究一個問題，他說：「不，不，做這個」。他就地教我機率，喝了超過 500 杯咖啡。這是很好的學習方式，對吧？對我來說，這也許是唯一的學習方式。我試過了...我在史丹佛大學有 3 個辦公室：一個在數學系，一個在統計學系，一個在 Bytes 咖啡店。我大半時間待在 Bytes 咖啡店，和我的學生一起喝咖啡和塗鴉。

很高興你仍在舉辦研討會。

黃：關於統計，我有幾個問題：現今，高維數據盛行，大數據是另一個議題，它們是很不同的...

D：是啊！但是它們已經發展出來，而且佔據優勢。

黃：這就是問題所在，有些東西儘管佔據優勢，但很難總結成觀點或歸納成理論。

D：對，我同意。首先，機器學習和大數據已經佔據優勢，無所不在了，最好的圍棋程式 AlphaZero 和最好的西洋棋程式 MuZero 就是例子。機器學習和大數據的理論產生出許多具挑戰性的數學問題。我認為有新的數學問題很好，但有些已經超越我的經驗範疇，這是下個世代所面臨的挑戰。

⁴¹David Freedman (1938~2008)，加州大學柏克萊分校統計教授，研究 martingale 不等式，Markov 過程等。

如果我的統計學生想要研究機器學習和大數據，我會嘗試安排他們和從事相關研究的人合作。這要非常密集地使用電腦，但我不是這類型的人。我還是研究生時，如果不學習如何寫程式，就無法獲得統計博士的學位，但那是很久以前的事了。機器學習和大數據已經佔據優勢，雖然我和新時代有點距離，我還是有以下幾點要說。

生活中還是有很多資料分析涉及小數據，除了常識，還需要古典統計，這些小數據不是從網路上收集的。譬如一個醫生要比較兩個病人，或者比較某十個病人和另外十個病人，所涉及的統計數據就不是所謂的大數據了。

有些人正在進行有趣的工作，我也正在嘗試和研究，並且與編寫 AlphaZero 和 MuZero 的團隊 DeepMind 討論。DeepMind 編寫了最好的圍棋程式和最好的西洋棋遊戲程式，之後被 Google 購併。我每週一次和那裡的人討論，如何讓電腦學習玩接龍。你知道七堆紙牌的接龍遊戲嗎？我們這行有個笑話：我們不知道接龍遊戲的獲勝機率。在拉斯維加斯，你可以花 52 美元買一副牌，你從打出去的牌每張得到 5 美元。這是一場公平的遊戲嗎？這取決於規則。微軟的規則是，你可以分拆遊戲，一次發三張牌。改變規則會改變賠率嗎？當然，這也關乎「誰在玩紙牌」。它並非定義嚴謹。那麼電腦玩接龍能表現得多好？我正在研究這個問題。我學到的一件事是，毫無疑問地，如果他們真的感興趣，如果他們讓一個由 30 名工程師組成團隊來解決這個問題，在 6 個月內，他們會有些可以展示的成果，但是你看看他們推銷成果的方式。你可以把你的問題輸入到 MuZero 中，這個程式甚至不需要知道規則，立即就開始與自己對玩。荒唐，它根本不行。我有三名工程師，他們試圖將紙牌放入 MuZero。沒用的，它沒有給出任何明智的東西。

有了大數據，或許可以從中得到一些合理東西。當然，我做的研究不是這個，我也不懂大數據，大數據已發展出了自己的語言。如果你是一個只受過古典訓練的統計學家，試圖閱讀現今的機器學習文獻，這會是十分困難的。我的意思是，這一切都在它自己的形像中... 如果你試圖挑選一些問題並試圖證明它，可能六個月後，它已經完全過時了，沒有人在關注這個議題了，何苦？機器學習正以非常非常快的速度蓬勃發展，它是一個健康的領域，就此存在，我的很多同事都試圖把它和數學結合起來。

在機器學習，難以理解的一件事是大數據的過度擬合 (overfitting)。也就是說，在古典統計學中我們知道：如果你有 100 個參數和 50 個資料點，那麼，你可以擬合任何東西，你可以找出一個通過所有資料點的多項式。但不知何故，在機器學習或深度學習上情況不是那麼簡單。如果你極過度擬合，它反而會變得有用，並做出很好的預測，這是非常難以理解的。人們正試圖打造數學和玩具問題 (toy problem) 去理解此現象。我想這就是我們在做的，對吧？我們製作玩具問題，然後試圖去證明某件事。應用者會嘲笑我們，因為我們分析的模型，與他們真正做的事情，相去甚遠。

彼此之間是有緊張的關係。但我認為它們是很不錯的數學問題。在被解決、被定位前，我都

會質疑：是否存在它們的位置。讓我解釋一下。如果你找 30 個電腦科學博士或物理學博士，給他們 3000 萬美元，以及他們想要的所有計算和一個特定的問題，我不會質疑他們會做出些成果，而且會是有用、有趣的東西。但是，如果你給另外 30 個人同樣的特定問題與資源，他們會做一些完全不同的東西。那麼，那裡有個主題嗎？還是都只是因時制宜 (ad hoc) 的？在我看來，它非常非常善變，欠缺定論。有一門學科叫做深度學習 (deep learning)，但我並不了解。我的意思是，我可以把簡單的神經網路模型抽象成數學問題，但他們實際做的，是因時制宜的，原創性很高，勇氣十足；他們做的是很艱苦的工作，我不想爭論這個，只是到了下周，一切又成了另一回事。那麼，你如何能抓住它呢？我們如何證明它？而且，這是非常糟糕的科學，也就是說，首先，它有專利，他們不讓你看到程式代碼。他們向你展示成功的故事，但不透露失敗的故事。

劉：他們就像算命的人。

D：是的，沒錯。但是，另一方面，也有成功的故事。他們有精彩的成功故事。算命的人當然有時也會這樣；特別是如果他們能看到你，並且能對你的反應做出回應，他們也可以做得很好。但這是一個棘手的領域。幸運的是，我們仍然可以解決一些簡單的問題。

譬如說蒙地卡羅模擬 (Monte Carlo simulation)，你可以看看人們實際用它來做什麼。實際使用量最大的一大套程式是「Stan」，在美國開發的，來自紐約的 Flatiron Simons 研究所。這是 Hamiltonian 蒙地卡羅，但有各種各樣的花裡胡哨。如果你看到它們針對問題實際做了什麼，就不會用數學來捉摸它。即使你考慮 Metropolis 演算法的任何實際應用，一個實際的東西，不是玩具，是實際的，但要嘗試證明一些關於它的東西，還是相當艱難。我不知道該怎麼做。我在研究。有希望。你對這做了一些研究，我也是。但它仍然是在清理過的模型 (cleaned-up model)。現在有了 Ising 模型，很能詮釋；但它們在更複雜的情況下使用它，數學難以捉摸。

劉：我想到一件事。在經歷了這一切之後，你的父母對你有什麼看法？

D：首先，我的父母早已辭世。我 14 歲離開家後，一生中又見過他們兩次，而且是在不太好的狀況。我認為他們不知道我在做什麼。他們有自己的問題。我一個多事的家庭長大，很多人住院，而且精神有問題。我想我的父母從來沒有真正理解過我……首先，他們在我成為教授之前就去世了，所以……但他們確實知道我上了研究所而且拿到博士學位，但我沒有和他們交談。我們沒有對話。這是一個非常不幸福的家庭。我不想與它有任何關係，我也沒有。

劉：從東方人的心態來看，我會說，他們的確沒有看到你的成功，但你上研究所是……

D：是件真實的事。

劉：是的，這必定讓他們覺得很好。

D: 我希望如此。我的意思是, 我不知道。但我真的是一個非常不守紀律的孩子, 也許直到上大學, 也許快上研究所。有一次, 我在加州大學聖地牙哥分校做演講, 教務長是一位女士, 是我六年級的同學, 她必須介紹演講者和這個「某某」講座。她說:「不可能是 Persi Diaconis。他不可能完成學業, 不會是成功人士」。她介紹我時, 做了一個標準規格的演講, 而我講了那個故事。我說:「現在, 瑪莎, 妳知道, 我記得 …」

劉: 她說不出話。

D: 嗯, 我很爛, 嗯, 我不是一個爛孩子, 我只是 … 我變魔術, 在學校不專心, 不做作業。他們一直推著我往前走, 說:「你是個聰明的孩子。你在這裡很無聊。好吧, 我們跳級」。所以 … 無論如何, 它有成果。

劉: 是的, 這是一個美好的故事。對許多人來說, 也是非常令人鼓舞的故事。

D: 應該是。但是, 如果你有個孩子 14 歲時離家出走, 你恐怕不會開心。

劉: 是的。

D: 但未曾有壞事發生在我身上。你認為我是逃家的魔術師, 但是 …

劉: 是的, 我擔心你將如何吃飯和過活。

D: 我沒辦法, 但我有我的導師, 而且魔術師社群真的很會照顧人。但我沒有任何辦法賺錢。

劉: 是的。之後你來到這個數學社群, 也不錯。

D: 不錯, 不錯。它比許多其他社群溫和許多。我的意思是, 看看他們如何照顧 John Nash⁴²。你知道嗎? 我們甚至容忍了 Finn⁴³, 對吧?

劉: 大家很高興我願意和他共用辦公室。Bob Finn 很有趣, 不是在通常的意義下, 但是很有趣。鍾開萊又是如何?

D: 他曾經告訴我:「需要被人喜歡的美國病, 我沒有染上」。

劉: 我明白。

黃: 他得罪了很多人, 即使在機率界。

D: 是的。他不遺餘力地冒犯。他喜歡 … 他是, 他 … 太糟糕了, 因為他是一個認真的好人, 我的意思是, 我本來可以從他身上學到很多東西, 但他就是 …

我走在路上一眼看出他是誰, 然後就躲開了。如你所知, 他幾乎全盲。所以, 當我看到他走過

⁴² John Nash (1928~2015), 美國數學家, 因在賽局論方面的工作而於 1994 年獲頒諾貝爾經濟學獎。2015 年, 因他對偏微分方程的貢獻而獲頒 Abel 獎。

⁴³ Robert Finn (1923~), 專訪 2003 年刊載於數學傳播 27 卷第 2 期。他在 Navier-Stokes 方程式、最小曲面方程式及毛細面研究上貢獻卓著。

來的時候,我會走另一條路。但他並不是真的全盲,所以他說,「Persi,是你嗎?你在躲著我嗎?」我繼續往前走。

你認識他嗎?你見過鍾開萊嗎?

黃:兩次,他以前是我師祖 Cramér⁴⁴的學生。

D:我明白了。我不知道這件事。

黃:實際上, Cramér 沒能在瑞典拿到駕駛執照。但 1940 年代,他訪問普林斯頓時,鍾開萊教他如何開車。這太瘋狂了,因為鍾開萊的視力很差。

D:很好,非常好,太瘋狂了。

黃: Grenander 告訴我那個故事。

D:這是一個很好的故事。這是一個很好的故事。這太瘋狂了。鍾開萊這樣的人教他如何開車,真是太瘋狂了,因為開萊實質上是盲人。

黃: Cramér 用美國的駕照換到了瑞典的駕照。

D:啊,那很好。那很好。我有一個關於 Cramér 的精彩故事。當他大約...你見過 Cramér 嗎?

黃:沒有。

D:好。要知道,瑞典人有兩種,有些是很高的戰士。他身高 6 英尺 7 英尺。非常非常高大,非常善良、聰明。和他共處時,他會聽你說話,會和你對談。他 80 歲左右時,柏克萊有個研討室要命名, Neyman⁴⁵請 Cramér 飛來為研討室揭幕。

Cramér 曾擔任瑞典大學的校長。他是一位偉大的科學家。每個人都敬重他。他是個嚴肅的瑞典人,但他是個好人。我被指派招待他,陪他一小時。我是一名助理教授,但他們說,「你能和 Cramér 教授談談,帶他去喝咖啡或做些什麼嗎?」於是我和 Cramér 共處一個小時。他說:「你好」。我說:「我有一個真正的問題要問你」。他說:「是嗎?」我說:「你曾經做過數論,你做出很好的數論結果,然後你不做了。你為什麼不再做數論?」他說,「這是一個有趣的問題,我要告訴你」。他說:「我喜歡數論。別無其它我要研究的;我早上、中午和晚上都研究它,那是我畢生的工作」。

Cramér 在瑞典時,是 Mittag-Leffler⁴⁶的助理。有一天, Mittag-Leffler 把他叫進來,說:「你把這個寫在我的論文上嗎?」他曾給 Cramér 他的論文草稿,要 Cramér 閱讀和修正,「你把這些評論寫在我的論文上嗎?」Cramér 說:「是的,先生」。他說:「你不會再在瑞典做

⁴⁴Harald Cramér (1893~1985), 瑞典數學家、精算師和統計學家,專精數理統計及機率數論。

⁴⁵Jerzy Splawa-Neyman (1894~1981), 俄羅斯出生的美國數學家,對機率和統計有重要貢獻,包括在氣象學和醫學中的應用。

⁴⁶Gösta Mittag-Leffler (1846~1927), 瑞典數學家,研究函數的一般理論。他最著名的工作是單值函數的解析表示。

數學了」。他再也不能做數學；Mittag-Leffler 權勢很大，以至於他不得不停止做數學。他轉而學習精算科學。這是一個讓人驚嘆的故事。首先，有人有這種權勢，讓我很訝異。我說：「這是一個不比尋常的故事。你有寫下來？記錄下來？」他說：「是的，在我的自傳裡」。我說：「什麼自傳？」他說，「我為我的孩子寫了一本自傳」。他說：「有 4 份。其中一份副本在瑞典圖書館，你可以找到它，故事就在那裡」。他寫下它和其他有趣的事情。Mittag-Leffler 如此有權勢，真是太離奇了。詭異。

黃：是的。我從 Grenander 那裡聽聞此事。

D：那個故事？所以我們兩個人都知道它。抱歉，我的敘述正確嗎？大半是對的。因為他告訴了我。這很感人，因為他是一個很好的數論學家，提出質數的 Cramér 模型，底數是 $x/\log x$ 的 Poisson 過程，還有很多很多很好的定理。

黃：我問我的老師：為什麼他們能夠做很多不同的事情。他告訴我，因為瑞典是個小國，所以他們的知識份子必須有能力去做不同的事情。我記得他曾告訴我，他證明統計學的一些理論時，因為 Cramér 很忙，要求他接管保險的工作，所以他不得不做……

D：生命科學，是的。

黃：像是生命表 (life table) 和汽車保險。

D：我明白。

黃：所以他證明出汽車保險的某些定理，因為汽車保險和人壽保險非常不同。

D：真有意思。他寫下來了嗎？我不知道那個故事。

黃：他沒有寫下這樣的事情，但他告訴過我們。

D：太精彩了，因為他喜歡抽象數學。我的意思是，他是很精彩的人。Grenander 總是深富人性，非常願意和人說話，我去過布朗大學很多次，因為它離哈佛很近；我在哈佛教書的時候去的。他建立了一個很好的系所。

黃：他還告訴我們，關於他設計的東西。他不知道他們真的用了那個東西。
海軍上將要求他設計大砲，因為在瑞典，他們做了很多砲彈。

D：砲彈？他們想測試他們是否有戰力？

黃：他們請他設計有適當大小的砲彈，用在軍艦上。砲彈的尺寸，要怎麼講呢？

D：對，對。砲彈的內部，對吧？是的，對。

黃：對，砲彈。我應該用「通用」這個字；一個尺寸適當的砲彈，在軍事上很有用。Grenander 實際計算了一下。他們真的採用了。

D: 很好。

黃: 另一件事是後勤動員。在戰爭期間, 你必須動員物資, 你必須把東西存放在不同的地方。實際上, 他為國防部寫了一篇關於這個問題的文章。

D: 如何以最佳方式儲存東西

黃: 是的, 他嘗試做這樣的事情。

D: 但是可以像 Monge-Ampère 一樣, 也就是說, 你想儲存東西, 以便它們可以

黃: 戰爭中, 從不同的地方, 他們可以

D: 是的, 他們必須最小化運送物資的時間, 對, 是的, 像 Monge-Ampère 一樣, 就像在給定的邊際條件下做度量。

黃: 運輸問題。

D: 就是這樣! 你已經證明了你是這裡最年輕的。

黃: 運輸問題。

D: 對。

黃: 有些來自實際應用的數學問題。他們必須解決那些問題。

劉: 和你談話真是暢快。真好。我們可以繼續談到深夜, 但我認為我們應該去吃晚飯。但談到台灣人, 相對於你不可思議的人生經驗, 我擔心台灣學生; 他們太專注於書籍和考試。

D: 考試之類的事情。是的。

劉: 而且, 你知道, 啟瑞這一代; 啟瑞比我年輕一點, 但不是那麼多。

黃: 3 歲或 4 歲。

劉: 4 歲。對。但年歲的比例正在變成 1。我知道現在這是一個敏感問題。

D: 不, 在這個房間裡不敏感。

劉: 不在這個房間裡。但我們這一代, 對書本和考試, 並不那麼專心一意。但現在的年輕人, 有點過於關注單一焦點。Persi 是不同的, 真好。

D: 真是太愉快了。我會在這裡是你的錯; 沒有你, 我不會來的。

劉: 我們去吃晚飯吧。

D: 好, 因為和你一樣, 我現在還有時差。