數學傳播 47卷1期, pp. 99-104

構造妙解 感覺何來

鄒黎明 · 浦敘德

1. 寫在前面

一些富有挑戰性的最值試題, 其呈現的「構造」技巧, 確實讓人讚歎「構造」奇妙, 解法的感覺何來? 這些試題的切入點在那裡? 解法很精彩, 解答的感覺從哪裡來更重要, 作爲教師如何讓學生找到感覺, 開啟思考的路徑, 變得尤爲重要。

2. 構造妙解

案例1: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=60^\circ$, $BC=8$, $AC=10$, 點 D、E 分別在 AB、AC 上, 且 $AD=CE$, 則 $CD+BE$ 的最小值爲 __________ 。

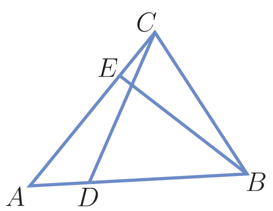

圖1

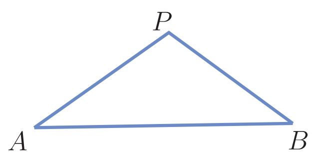

圖2

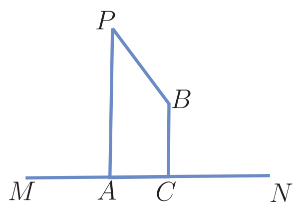

圖3

解析: 我們從求 $CD+BE$ 的最小值的形式, 這兩條線段不在一個三角形中, 我們研究最小值根本上就是利用了「兩點之間線段最短」、「垂線段最短」, 從圖形特徵考慮是下面兩個模型:

(1) 如圖 2, 已知線段 $AB=m$, 點 P 爲任意一點, 則 $PA+PB$ 的最小值爲 m;

(2) 如圖 3, 點 P 爲定點, $PA\perp MN$ 於 A, $PA=m$, 點 B 是動點, $BC\perp MN$ 於 C, 則 $PB+BC$ 的最小值爲 m。

(1) 用「兩點之間線段最短」、(2) 用「垂線段最短」, 雖然兩個最小值的依據不同, 但是它們這兩條線段的和在圖形中都有一個共同端點, 我們考慮能不能把線段 CD、BE 改造到有一個共

同頂點; 這個題目中有 $AD=CE$, 這是一個非常好的條件, 我們可以考慮把 $\triangle ADC$ 拼到使得 AD、CE 重合, 如圖 4, 過 C 作 $CA'//AB$, 使得 $CA'=AC$, 連接 $A'E$、$A'B$,

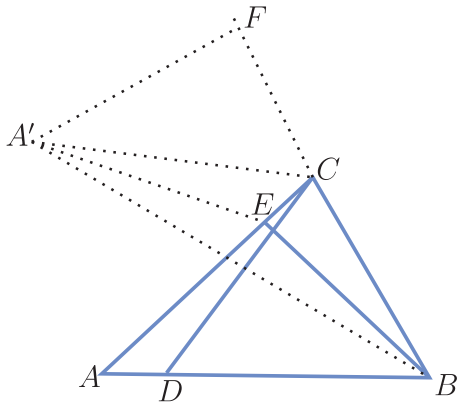

圖 4

作 $A'F\perp BC$ 於 F, 從 $CA'//AB$, 得到 $\angle A'CE=\angle A$, $\angle A'CF=\angle ABC=60°$; 因爲 $A'C=AC$, $\angle A'CE=\angle A$, $CE=AD$, 所以 $\triangle A'CE\cong\triangle CAD$, 所以 $A'E=CD$, 所以 $CD+BE=A'E+BE$, 在 $\triangle A'CF$ 中, $A'C=10$, 得到 $CF=5$, $A'F=5\sqrt{3}$, $BF=5+8=13$, 在 $\triangle BA'F$ 中, $A'B=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+13^2}=\sqrt{244}=2\sqrt{61}$, 考慮 $\triangle A'BE$, 得到 $A'E+BE\geq A'B$ 所以 $CD+BE$ 的最小值爲 $2\sqrt{61}$。

點評: 這個題目構造的關鍵是通過作出平行線來完成圖形的拼接, 作出 $A'F$ 是爲了構造特殊的直角三角形, 把問題轉化爲模型 (1)。

變式 1: 如圖 5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=60°$, $AC=8$, $AB=10$, 點 D、E 分別在 AC、AB 上, 且 $AD=AE$, 則 $CE+BD$ 的最小值爲 ________ 。

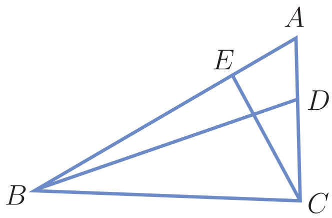

圖 5

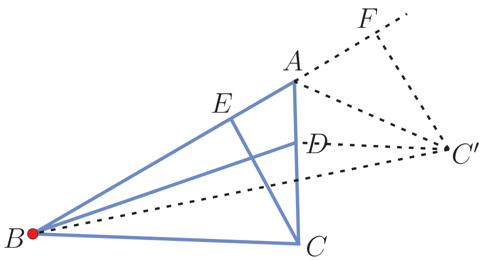

圖 6

分析: 把 $\triangle AEC$ 繞點 A 逆時針旋轉 $60°$ 到 $\triangle ADC'$, 連接 DC'、BC', 作 $C'F\perp AB$ 於 F, 得到 $\angle DAC'=\angle BAC=60°$, 所以 $\angle FAC'=60°$, 所以 $AF=4$, $C'F=$

$4\sqrt{3}$, $BF=10+4=14$, $BC'=\sqrt{14^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{61}$, 因爲 $DC'=CE$, 所以 $CE+BD=BD+DC'\geq BC'=2\sqrt{61}$, 所以, $CE+BD$ 的最小值爲 $2\sqrt{61}$。

點評: 這個變式 1 是我們熟悉的旋轉變換, 案例 1 反而是變式 1 的推廣。

案例 2: 如圖 7, 在直角坐標系中, 點 A 的坐標爲 $(3,2\sqrt{10})$, 以原點 O 爲圓心, 以 13 爲半徑作 $\odot O$, 點 B、C 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle BAC=90°$, 連接 BC, 則線段 BC 長的最小值是 __________。

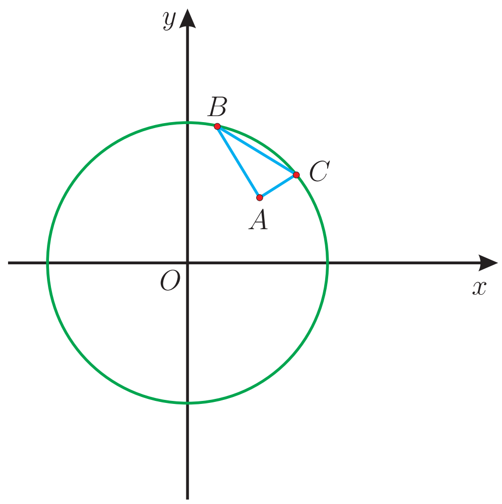

圖 7

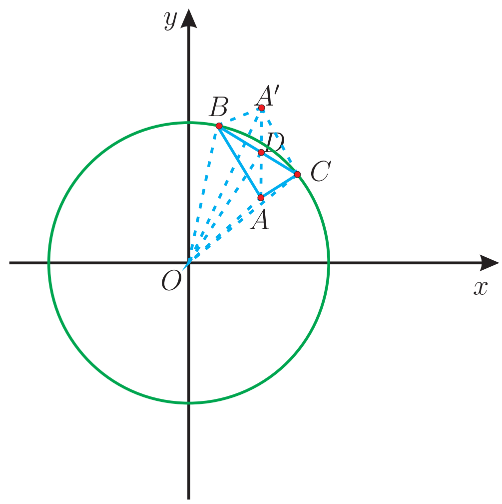

圖 8

解析: 如圖 8, 取 BC 的中點 D, 連接 OA、AD、OD, 因爲 $\angle BAC=90°$, D 是 BC 的中點, 所以 $AD=\frac{1}{2}BC$, 只要研究 AD 的最小值; 容易得到

$$OA=\sqrt{3^2+(2\sqrt{10})^2}=7.$$

考慮 $\triangle ADO$, AD 和 OD 都是未知的, 案例 1 的方法無法解決, 怎麼辦? 我們作出矩形 $ABA'C$, 連接 AA' 交 BC 於 D, 得到 $BC=AA'$, 只要研究 AA' 的最小值, 連接 OA、OA'、OB、OC, 得到

$$OA^2+OA'^2=OB^2+OC^2,\ OB=OC=13,\ OA=7,$$
$$OA'^2=338-49=289,\ OA'=17$$
$$AA'\geq OA'-OA=17-7=10$$

所以線段 BC 長的最小值是 10。

點評: 這裡關鍵是把問題轉化爲求 AA' 的最小值問題, 事實上我們希望 OA 和 BC 要整合到有公共端點, 由於這裡有直角三角形的條件, 構造出矩形就有矩形的對角線相等, 餘下就是要得到 OA' 是已知的; 事實上, 這裡利用了平行四邊形中一個特徵, 平行四邊形的四條邊的平方和等於對角線的平方和。延長 OD 到 O', 使得 $DO'=OD$, 連接 BO'、CO'、AO'、$A'O'$, 構造出平行四邊形 $OBO'C$、$OAO'A'$, 這兩個四邊形對角線交點就是 D, 得到

$$2OB^2+2OC^2=BC^2+OO',\ 2OA^2+2OA'^2=AA'^2+OO'^2,$$

$BC=AA'$, 得到 $OA^2+OA'^2=OB^2+OC^2$, 這樣把問題轉爲我們能夠思考的問題。

變式 1: 如圖 3 在直角坐標系中, 點 A 的坐標爲 $(3,2\sqrt{10})$, 以原點 O 爲圓心, 以 13 爲半徑作 $\odot O$, 點 B、C 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle BAC=90^\circ$, 連接 BC, 則線段 BC 長的最大值是 ----------。

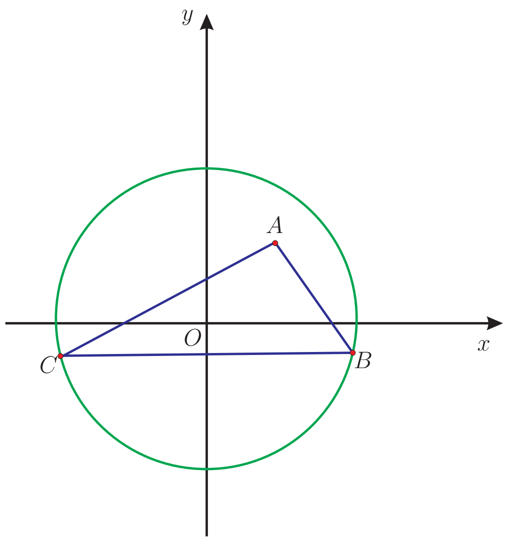

圖 9

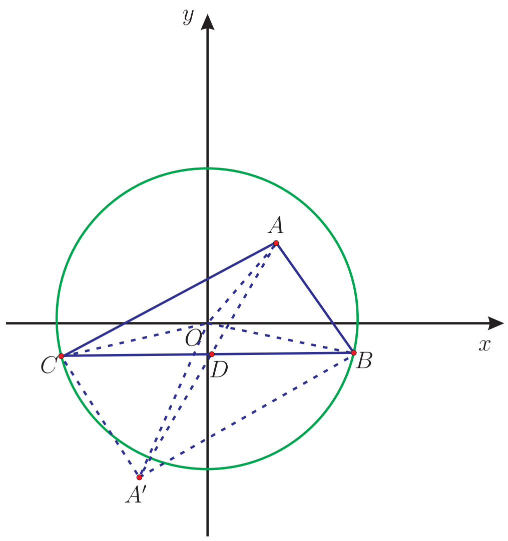

圖 10

解析: 作矩形 $ABA'C$ 連接 OA、AA'、OA', 同理得到 $OA=7$, $OA'=17$, 考慮 $\triangle OAA'$, 得到

$$AA'\le OA+OA'=7+17=24$$

所以線段 BC 長的最大值是 24。

點評: 變式的方法與案例 2 方法類似, 可以作爲對於這個構造技巧的強化訓練。

案例3: 如圖 11, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=10$, $\angle B=30^\circ$, 點 D 爲 AB 上一個點, 且

$AD = 4BD$, E 爲射線 AC 上一動點, F 爲射線 CB 上一動點, 且 $\angle EDF = 60°$, 求 EF 的最小值 ________ 。

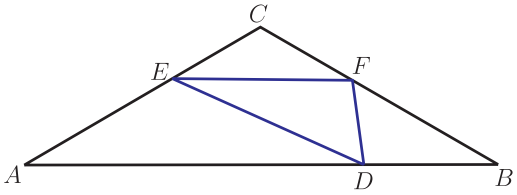

圖 11

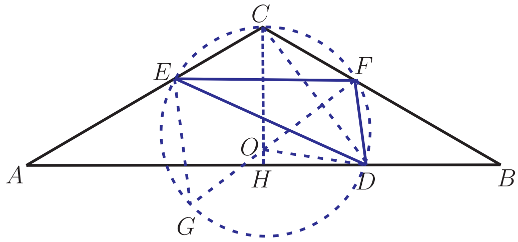

圖 12

解析: 如圖 12, 我們從條件想到 $\angle C + \angle EDF = 180°$, 得到四邊形 $CEDF$ 有外接圓 $\odot O$, 作出直徑 FG, 連接 EG, 得到 $\angle GEF = 90°$, $\angle EGF = \angle EDF = 60°$, 得到 $EF = FG\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}FG$, 於是問題轉化爲研究 FG 的最小值, 連接 OC、OD、CD, 得到 $OC+OD \geq CD$, $FG \geq CD$; 只要求出 CD, 作 $CH \perp AB$ 於 H, 從 $AC = CB = 10$, 得到 $AH = HB$, 從 $AD = 4DB$, 得到 $AB = 5DB$, $HB = \dfrac{5}{2}DB$, $\angle B = 30°$, $CH = 5$, $BH = 5\sqrt{3}$, $\dfrac{5}{2}DB = 5\sqrt{3}$, $DB = 2\sqrt{3}$,

$$HD = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3},\ CD = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$$

$EF \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}CD = \sqrt{39}$, EF 的最小值爲 $\sqrt{39}$。

思考: EF 取得最小值的位置是怎麼樣呢? 這時 CD 爲以 O 爲圓心的圓 $\odot O$ 的直徑, 得到 $\angle CED = \angle CFD = 90°$, 如圖 13

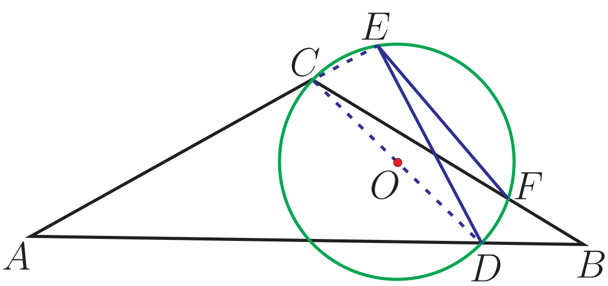

圖 13

這時, $AD = 8\sqrt{3}$, $BD = 2\sqrt{3}$, $\angle A = \angle B = 30°$, 得到 $DE = 4\sqrt{3}$, $DF = \sqrt{3}$, $EF = \sqrt{39}$, $\triangle DEF$ 的周長爲 $5\sqrt{3} + \sqrt{39}$, 面積爲 $\dfrac{1}{2}DE \cdot DF\sin 60° = 3\sqrt{3}$。

下面要說明圖 13 的位置就是周長和面積最小值位置。

變式1: 如圖 11, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 10$, $\angle B = 30°$, 點 D 爲 AB 上一個點, 且 $AD = 4BD$, E 爲射線 AC 上一動點, F 爲射線 CB 上一動點, 且 $\angle EDF = 60°$, 求 $\triangle DEF$ 的周長最小值 _________ 。

分析: 如圖 12, 我們從條件想到 $\angle C + \angle EDF = 180°$, 得到四邊形 $CEDF$ 有外接圓 $\odot O$, 得到 $\angle FED = \angle BCD$, $\angle ACD = \angle EFD$, 因爲點 D 是定點, 所以 $\angle BCD$, $\angle ACD$ 保持不變, 這樣 $\triangle DEF$ 的形狀保持不變。研究 $\triangle DEF$ 的周長最小值的位置就是 EF 最小值的位置, 於是 $\triangle DEF$ 的周長最小值爲 $5\sqrt{3} + \sqrt{39}$。

變式2: 如圖 12, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 10$, $\angle B = 30°$, 點 D 爲 AB 上一個點, 且 $AD = 4BD$, E 爲射線 AC 上一動點, F 爲射線 CB 上一動點, 且 $\angle EDF = 60°$, 求 $\triangle DEF$ 的面積最小值 _________ 。

解析: 從上面知道 $\triangle DEF$ 的形狀不變, 研究 $\triangle DEF$ 的面積最小值的位置就是 EF 最小值的位置, 於是 $\triangle DEF$ 的面積最小值爲 $3\sqrt{3}$。

點評: 在研究過程中, 我們發現研究 $\triangle DEF$ 的周長和面積的最小值更加耐人尋味。

3. 結束語

我們在文 [1]、[2] 已經研究了幾個最值問題的模型特徵, 然而試題的表像千差萬別, 從學生角度看, 能夠想到「構造」出輔助線不是那麼容易的事情。牢記初心, 模型引路, 最值試題如果現成的圖形中難以直接思考, 可以通過巧妙構造, 創造出我們常見的兩個最小值模型, 這之間的思考推進, 來源於我們對於相關資訊的解讀。

參考文獻

1. 浦敘德, 鄒黎明。借助曲尺模型探究一類最值問題。數學教學[J], 2016(4)。
2. 鄒黎明等。「曲柄連杆」 模型解決一類最值問題。初中數學教與學 [J], 2017(3)。

—本文作者鄒黎明任教中國江蘇省無錫市碩放中學, 浦敘德任職中國江蘇省無錫市新吳區教師發展中心—