數學傳播 47卷1期, pp. 95-98

麥比烏斯定理的聯想

戴立輝 · 蘇化明 · 陳　翔

分別過拋物線內接三角形 ABC 的頂點作切線, 設它們各交於 A', B', C', 若用 S 表示面積, 則有

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \tag{1}$$

這一結論是麥比烏斯於 1827 年得到的, 其證明可參閱文獻 [1] 或文獻 [2]。麥比烏斯定理啟發我們考慮三次曲線 $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ $(a_0\neq 0)$ 是否有類似的結論, 本文所得的結果是如下命題。

命題: 設 A,B,C 是曲線 $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ $(a_0\neq 0)$ 的凹弧 (或凸弧) 上的不同三點, 過此三點分別作曲線的切線, 這些切線相交於點 A', B', C', 若用 S 表示面積, 則有

$$S_{\triangle A'B'C'}<\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \tag{2}$$

證明: 首先考慮三次曲線 $y=x^3+px$。易知點 $O(0,0)$ 爲 $y=x^3+px$ 的拐點亦即曲線凹、凸的分界點。由於 $y=x^3+px$ 關於點 $O(0,0)$ 爲中心對稱, 因此只需要考慮曲線 $y=x^3+px$ 當 $x\geq 0$ 的情形, 此時曲線弧爲凸的 (向下凸)。

設 $A(a,a^3+pa)$, $B(b,b^3+pb)$, $C(c,c^3+pc)$ 爲 $y=x^3+px$ 上的不同的三點 $(0\leq a<b<c)$, 則

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & a^3+pa & 1\\ b & b^3+pb & 1\\ c & c^3+pc & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & a^3 & 1\\ b & b^3 & 1\\ c & c^3 & 1\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{2}(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).\end{aligned}\tag{3}$$

由於 $y' = 3x^2 + p$, 故 $y = x^3 + px$ 過 A, B, C 三點的切線方程分別爲

$$y = (3a^2 + p)x - 2a^3;$$
$$y = (3b^2 + p)x - 2b^3;$$
$$y = (3c^2 + p)x - 2c^3.$$

解此聯立方程組可得 $y = x^3 + px$ 過 A, B, C 的三條切線的交點座標分別爲

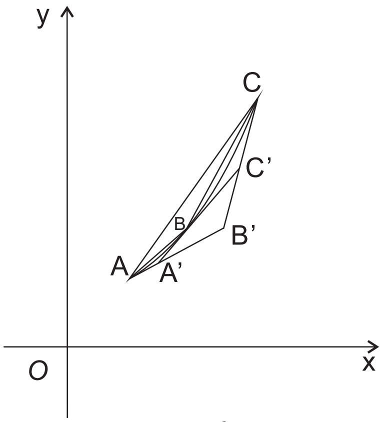

圖1

$$A'\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}, \frac{2}{3}\cdot\frac{p(a^2+ab+b^2)}{a+b}+\frac{2a^2b^2}{a+b}\Big);$$
$$B'\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{c^2+ca+a^2}{c+a}, \frac{2}{3}\cdot\frac{p(c^2+ca+a^2)}{c+a}+\frac{2c^2a^2}{c+a}\Big);$$
$$C'\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{b^2+bc+c^2}{b+c}, \frac{2}{3}\cdot\frac{p(b^2+bc+c^2)}{b+c}+\frac{2b^2c^2}{b+c}\Big).$$

從而有

$$\begin{aligned} S_{\triangle A'B'C'} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} & \frac{2}{3}\cdot\frac{p(a^2+ab+b^2)}{a+b}+\frac{2a^2b^2}{a+b} & 1 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{c^2+ca+a^2}{c+a} & \frac{2}{3}\cdot\frac{p(c^2+ca+a^2)}{c+a}+\frac{2c^2a^2}{c+a} & 1 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2+bc+c^2}{b+c} & \frac{2}{3}\cdot\frac{p(b^2+bc+c^2)}{b+c}+\frac{2b^2c^2}{b+c} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{3(a+b)(b+c)(c+a)}\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2b^2 & a+b \\ c^2+ca+a^2 & c^2a^2 & c+a \\ b^2+bc+c^2 & b^2c^2 & b+c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由於

$$\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2b^2 & a+b \\ c^2+ca+a^2 & c^2a^2 & c+a \\ b^2+bc+c^2 & b^2c^2 & b+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)^2,$$

因此

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}(ab+bc+ca)^2. \tag{4}$$

由式 (3), (4) 得

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}. \tag{5}$$

經計算得

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) =& a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)\\ &+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+4ab(a+b+c),\\ (ab+bc+ca)^2 =& a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab(a+b+c).\end{aligned}$$

故由式 (5) 知不等式 (2) 等價於

$$3(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) > 8(ab+bc+ca)^2,$$

亦即

$$\begin{aligned}&3[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+4ab(a+b+c)]\\ &\quad > 8a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+16abc(a+b+c),\end{aligned}$$

或

$$3[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)] > 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a+b+c). \quad (6)$$

由於 $a^3b+ab^3>2a^2b^2$, $b^3c+bc^3>2b^2c^2$, $c^3a+ca^3>2c^2a^2$, 因此得

$$3[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)] > 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

又 $a^2b^2+b^2c^2>2ab^2c$, $b^2c^2+c^2a^2>2abc^2$, $c^2a^2+a^2b^2>2ab^2c$, 所以可得

$$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) > 4abc(a+b+c),$$

因此

$$6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) > 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a+b+c),$$

由此知不等式 (6) 成立, 從而不等式 (2) 成立。

對於曲線 $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, 由於 $a_0\neq 0$, 故不妨設 $a_0>0$。

首先作座標平移變換: $x=x'-\dfrac{a_1}{3a_0}$, $y=y'+\dfrac{2a_1}{27a_0^2}-\dfrac{a_1a_2}{3a_0}+a_3$, 則 $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 變換爲 $y'=a_0x'^3+a_2'x'$, 其中 $a_2'=-\dfrac{a_1^2}{3a_0}+a_2$。

由於 $a_0>0$, 故 $\dfrac{y'}{a_0}=x'^3+\dfrac{a_2'}{a_0}x'$, 再作座標壓縮變換: $\dfrac{y'}{y''}=a_0$, $\dfrac{x'}{x''}=1$ 並記 $\dfrac{a_2'}{a_0}=a_2''$, 則 $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 變換爲 $y''=x''^3+a_2''x''$。

由前面的證明知, 不等式 (2) 對於曲線 $y'' = x''^3 + a_2'' x''$ 成立。由於座標平移變換及壓縮變換不會改變直線與曲線的相切關係, 也不會改變兩個圖形之間的面積關係, 因此對曲線 $y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, 命題成立。

參考文獻

1. 單墫。數學名題詞典[M]。江蘇教育出版社, 南京, 2002, 758-759。
2. 劉連璞。平面解析幾何方法與研究 (第二卷) [M]。哈爾濱工業大學出版社, 哈爾濱, 2015, 71。

—本文作者爲戴立輝, 陳翔任教中國閩江學院數學與數據科學學院, 蘇化明任教中國合肥工業大學數學學院—

勘誤表 (二)

第 32 卷第 4 期 (128號), 89 頁, 第 5 行。

欲找之直線 CD, 其與直線 m 之間距是點 A 與點 B 兩者至 M 的距離的幾何均數。(請見原問題, 登於32卷2期)

應爲：欲找之直線 CD, 其與直線 m 之間距是點 A 與點 B 兩者至 m 的距離的幾何均數。(請見原問題, 登於32卷2期)

第 45 卷第 1 期 (177號), 87 頁, 倒數第 10 行。

(*Surreal Numbers*: How two ex-students turned onto pure mathematics and found total happiness)。

應爲：

(*Surreal Numbers*: How Two Ex-students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness)。

第 44 卷第 1 期 (173號), 91 頁,

第 4 行,「第 30 行的數不起過 4」更正爲「第 30 行的數不超過 4」。

倒數第 5 行最後,「算單明瞭」更正爲「簡單明瞭」。

第 44 卷第 3 期 (175號), 52 頁, 第 2 行,

由「爲此, 只要證明級數 (40) 的通項 ...」, 至「引理 1 證明結束」, 作者有更改詳見網路電子版。