數學傳播 47卷1期, pp. 77-89

從兩種直角三角板到 14 種 “中學有理三角形”

林開亮

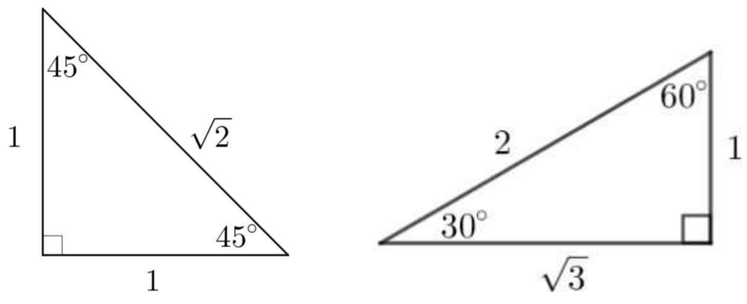
也許你還保存著這樣的記憶： 小學高年級或進入中學不久, 數學老師說每個人都要準備一副三角板： 無論材質如何, 其中一個是兩個銳角均爲 45 度的等腰直角三角形, 另一個是銳角分別爲 30 度和 60 度的直角三角形, 任何一家文具商店都會出售。至於爲什麼, 老師沒有講, 也沒有人追問過, 直到今天似乎還沒見到一本書討論這個問題。

當然可以做出多種解釋, 比方說能夠方便地作垂線、平行線、畫直角和一些特殊角, 有助於記憶特殊角的三角函數等等, 不過細究下來都不能令人滿意。不同於後世的工匠與畫師, 古希臘人在作圖中只允許使用沒有刻度的直尺與圓規。在他們那裏, 尺規作圖是一種與歐幾里德公理體系高度匹配的思想操練。爲什麼全世界學習幾何學的學生, 需要這樣一種貌似反歐幾里德傳統的「標配」呢?

直到讀了柏拉圖《蒂邁歐篇》, 筆者方覺豁然開朗。原來, 這兩種特殊的直角三角形, 是柏拉圖展開其宇宙構造圖景的基礎, 而這一思想的源頭可以追溯到認爲「萬物皆數」的畢達哥拉斯那裏去。根據大家都知道的一個傳說, 幾何學是進入柏拉圖學園的通行證, 而《蒂邁歐篇》正是柏拉圖闡述其宇宙觀的代表作, 書中爲兩種特殊的直角三角形賦予了超凡脫俗的意義。

劉鈍, 柏拉圖的《蒂邁歐篇》與五輪塔的幾何學 (見 [13])

從小學開始, 我們就接觸過直角三角板。衆所周知, 直角三角板只有兩種, 內角分別爲 45°–45°–90° 和 30°–60°–90°。



爲何只有這兩種特殊的直角三角形呢? 清華大學科學史系劉鈍教授在 2022 年發表的文章 [13] 中拋出這一問題, 並從數學歷史文化的角度給出了他的解釋 (見開篇引言)。這裡我們試圖從數學本身的視角給出一個解釋。

注意, 這兩種直角三角形具有以下兩個共性 (暫且先忽略直角的限制):

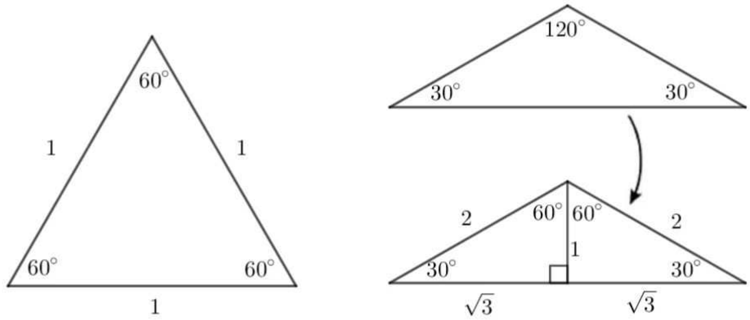
(i) 三邊長之比滿足

$$\ell_1 : \ell_2 : \ell_3 = \sqrt{d_1} : \sqrt{d_2} : \sqrt{d_3}, \tag{1}$$

其中d_1, d_2, d_3是正整數。

(ii) 每個角都是有理角, 即(在弧度制下) 爲π的有理數倍。

注意, 還有兩種三角形也滿足上述 (i) 與 (ii), 那就是等邊三角形與三內角分別爲 30°–30°–120° 的等腰三角形 (三邊長之比爲$1:1:\sqrt{3}$)。



我們將證明, 以上四種三角形就給出了滿足 (i) 與 (ii) 的全部三角形。事實上, 我們將證明以下更一般的結果:

定理 1. 設三角形的三內角爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 對邊長分別爲 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3。若它滿足

(i) 對每個 $i = 1, 2, 3$, $\theta_i = r_i\pi$, 其中 r_i 是有理數。

(ii) $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$。

(iii) $\ell_1 : \ell_2 : \ell_3 = \sqrt{d_1} : \sqrt{d_2} : \sqrt{d_3}$, 其中 d_1, d_2, d_3 是 (正) 有理數。

則必有

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \text{或} \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \text{或} \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \text{或} \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right). \tag{2}$$

爲證明定理 1, 我們需要以下引理:

引理 1 (Underwood 定理)**.** 設$\theta = r\pi$, 其中r是有理數, 則$\cos\theta$全部的有理數值爲:

$$1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1. \tag{3}$$

引理 1 是一個經典的結果, 至少有 100 年的歷史, 參見 [17, 6, 11]。本刊文章 [8] 曾介紹其經典證明, 以下給出另一個不同的證明。它歸功於 Richmond [16], 最近又被重新發現, 參見 [15]。

引理1的證明: 設 $\cos\theta$ 是有理數且 $\cos\theta\neq 0$, 則 $\cos\theta=\frac{p}{q}$, 其中 p,q 是互質的整數, 且 $q>0$。由二倍角公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, 有

$$\cos 2\theta=\frac{2p^2-q^2}{q^2}.$$

注意,

$$\gcd(2p^2-q^2,q^2)=\gcd(2p^2,q^2)=\begin{cases}1, \text{ 若 } q \text{ 是奇數}\\ 2, \text{ 若 } q \text{ 是偶數}\end{cases},$$

從而 $\cos 2\theta=\dfrac{2p^2-q^2}{q^2}$ 的最簡分數表達中的分母爲 q^2 或 $\dfrac{q^2}{2}$。

下面用反證法證明, 若 θ 爲有理角, 則必有 $q=1$ 或 $q=2$。

不然, 設 $q\geq 3$。則必有 $\dfrac{q^2}{2}>q\geq 3$, 從而

$$\cos\theta,\cos 2\theta,\cos 4\theta,\ldots$$

是兩兩不等的有理數, 因爲其最簡分數的分母依次增大。另一方面, 由於 $\theta=r\pi$ 是有理角, 所以 r 是有理數。令 $r=\dfrac{m}{n}$, 其中 m,n 是互質的整數, 且 $n>0$。則 顯然 $\{\cos k\theta\}_{k=1}^{\infty}$ 是一個週期爲 $2n$ 的數列, 從而

$$\cos\theta,\cos 2\theta,\cos 3\theta,\ldots$$

是有限集, 進而子列 $\cos\theta,\cos 2\theta,\cos 4\theta,\ldots$ 也是有限集。這與前面證明的結果矛盾!

定理1的證明: 不妨設$\ell_i=\sqrt{d_i}, i=1,2,3$。由餘弦定理, 有

$$\cos\theta_1=\frac{\ell_2^2+\ell_3^2-\ell_1^2}{2\ell_2\ell_3}=\frac{d_2+d_3-d_1}{2\sqrt{d_2d_3}}, \tag{4}$$

於是有

$$\cos^2\theta_1=\frac{(d_2+d_3-d_1)^2}{4d_2d_3}, \tag{5}$$

從而 $\cos^2\theta_1$ 是有理數。根據二倍角公式 $\cos 2\theta_1=2\cos^2\theta_1-1$, 推出 $\cos 2\theta_1$ 是有理數。進而由引理1, 可知 (注意 $0<\theta_1<\pi$, 從而 $\cos 2\theta_1\neq 1$)

$$\cos 2\theta_1=\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1.$$

從而

$$2\cos^2\theta_1-1=\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1.$$

於是

$$\cos^2\theta_1 = \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0,$$

進而

$$\cos\theta_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ 0.$$

從而

$$\theta_1 \in \left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right\} = S. \tag{6}$$

類似地, 可以推出

$$\theta_2 \in S, \qquad \theta_3 \in S. \tag{7}$$

注意, 由三角形的內角和定理, 有

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3 = \pi. \tag{8}$$

由於 $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$, 所以

$$\theta_1 \le \frac{\pi}{3} \le \theta_3. \tag{9}$$

以下分情況討論。由於 $\theta_1 \le \frac{\pi}{3}$ 且 $\theta_1 \in S$, 所以僅有三種情況:

情形 (i) $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$。則 $\theta_2+\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$, 由限制 (7) (9) 可以推出

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_3 = \frac{2\pi}{3}. \tag{10}$$

情形 (ii) $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$。則 $\theta_2+\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$, 由限制 (7) (9) 可以推出

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

情形 (iii) $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$。則 $\theta_2+\theta_3 = \frac{2\pi}{3}$, 由限制 (7) (9) 可以推出

$$\theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}. \tag{12}$$

以上三種情形就給出 (2)。定理 1 證畢。 □

從定理 1 可立即推出以下結果, 它從數學上解釋了爲何直角三角板只有兩種。

定理 2. 設直角三角形的兩銳角爲 θ_1, θ_2, 其中 $\theta_1 \le \theta_2$ 爲有理角, 若 $\sin\theta_1 : \sin\theta_2 : 1 = \sqrt{d_1} : \sqrt{d_2} : \sqrt{d_3}$, 其中 d_1, d_2, d_3 是 (正) 有理數, 則必有

$$(\theta_1,\theta_2) = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \text{或} \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right). \tag{13}$$

定理 1 還有一推論, 歸功於數學家 J. H. Conway(見 [7]定理1):

定理 3 (Conway 小定理)**.** 如果一個三角形的三個內角都是有理角, 且任意兩邊長之比爲有理數, 則該三角形爲等邊三角形。

在定理 1 的證明中, 我們實際上得到了以下定理:

定理 4. 設 $\theta = r\pi$, 其中 r 是有理數。則 $\cos^2\theta$ 是有理數當且僅當

$$\cos^2\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1.$$

定理 4 的一個等價表述如下:

定理 5. 設 r 是有理數, 且 $0 \le r \le 1$。則 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\sqrt{r}$ 是有理數當且僅當

$$r = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1.$$

定理 5 的一個特例曾應用於 Hilbert 第三問題的解決, 並被收入著名的《數學天書中的證明》一書 ([1, p.52] 定理 3):

定理 6. 設 $n \ge 3$ 是奇數, 則 $\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是無理數。

定理 5 的其他特例與變形也見於一些中學數學競賽問題, 參見 [10] p. 153 和 p. 162。

類似地, 還可以得到引理 1、定理 3、定理 4 的正弦版本和正切版本, 只要注意到 $\sin\theta = \cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta)$ 以及

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta},$$

此處從略。有興趣的讀者可見 [12]。

我們指出, 定理 1 包含在一個更廣泛的定理中。三角形稱爲一個有理中學三角形 (rational grade school triangle), 若它的三個角都是有理角(即每個角的弧度都是 π 的一個有理倍數), 且三邊長 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 滿足關係

$$\ell_1 : \ell_2 : \ell_3 = x_1 : x_2 : x_3,$$

其中

$$x_j = a_j + b_j\sqrt{d_j},$$

這裡 a_j, b_j 是有理數, 而 d_j 是正整數。

1982年, J. C. Parnami 等 [14] 確定了全部的“有理中學三角形”(A. Berger [2, 3] 最近又重新推導了這一結果)。其結果如下:

定理 7. 一個三角形爲有理中學三角形當且僅當它的每一個角是 15° 或 36° 的整數倍。在相似等價意義下, 有理中學三角形只有 14 個, 其內角(在角度制下) 分別爲:

36–36–108	36–72–72	15–15–150	15–30–135	15–45–120	15–60–105	15–75–90
30–30–120	30–45–105	30–60–90	30–75–75	45–45–90	45–60–75	60–60–60

注意到, 這 14 個三角形中, 有 7 個等腰三角形, 3 個直角三角形 (除了定理 2 給出的兩種以外, 還有一種是 15°–75°–90°)。僅有三種直角有理三角形的結論, 也曾被 Calcut [4] 獨立得到。

Parnami 等對定理7的證明, 僅用到初等的 Galois 理論與數論, 下面我們分享給有興趣的讀者。證明用到三個引理, 我們介紹如下。

第一個引理通常作爲 Galois 基本定理的一部分, 爲方便讀者, 我們單獨列出, 參見[9, p. 265] 定理1.10。

引理 2. 設 K/k 是 Galois 擴張, 具 Galois 群 G。設 F 是中間域, 即 $k \subset F \subset K$, 令 H 是 K/F 的 Galois 群。則 F 是 k 的正規擴張當且僅當 H 是 G 的正規子群。若 F 是 k 的正規擴張, 令 G_1 是其 Galois 群, 則限制映射 $\sigma \mapsto \sigma|F$ 給出 G 到 G_1 的同態, 其核是 H。從而我們有 $G_1 \approx G/H$.

第二個引理是關於分圓域的基本結果, 參見 [9, p. 278] 定理 3.1。

引理 3. 設 ζ 是一個本原 n 次單位根。$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 同構於 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ 的 Galois 群, 同構映射如下給出: 對任意的 $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, σ_k 由 $\zeta \mapsto \zeta^k$ 定義。

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 是剩餘類環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的乘法群。Gauss 給出了關於該群的結構的基本結果, 這是我們所需要的第三個引理 (參見 [18, p. 73] 定理 2)。

引理 4. 設 $n = 2^s p_1^{s_1} \cdots p_t^{s_t}$ 爲質因數分解, 其中 $p_1, \ldots, p_t$ 爲互異的奇質數, 則 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 同構於

$$(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/p_1^{s_1}\mathbb{Z})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_t^{s_t}\mathbb{Z})^*,$$

其中對 $i = 1, \ldots, t$, $(\mathbb{Z}/p_i^{s_i}\mathbb{Z})^*$ 是 $p_i^{s_i-1}(p_i - 1)$ 階迴圈群; 若 $s = 1$ 或 $s = 2$, 則 $(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z})^*$ 爲迴圈群; 若 $s \geq 3$, 則 $(\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z})^*$ 爲階爲 2 和 2^{s-2} 的兩個迴圈群的直積。

現在我們可以給出 Parnami 等對定理 7 的證明了。

定理7的證明: 不妨設所考慮的“有理中學三角形”的三內角爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 對邊長分別爲 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, 且

$$\ell_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{d_i}), \quad i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

其中 $d_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3$。則由餘弦定理有

$$\cos\theta_1 = \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_1^2}{2\ell_2\ell_3}, \tag{15}$$

從而

$$\cos\theta_1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_3}). \tag{16}$$

注意, 作爲 $(X^2-d_1)(X^2-d_2)(X^2-d_3)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\sqrt{d_3})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的 Galois 擴張, 其自同構群 G 中的每個元素形如

$$\sigma:\ \sqrt{d_i}\mapsto\pm\sqrt{d_i},\quad i=1,2,3. \tag{17}$$

因此 G 中的每個自同構σ滿足

$$\sigma^2=1. \tag{18}$$

現在設 $\theta_1=\frac{2\pi m}{n}$, 其中 m,n 是互質的正整數。由於 $\theta_1\in(0,\pi)$, 所以 $n\geq 3$.

令 H 是 $\mathbb{Q}(\cos\theta_1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的 Galois 群。根據引理2, H 是 G 的一個商群, 從而特別地, H 中的每個自同構 τ 也滿足

$$\tau^2=1. \tag{19}$$

另一方面, 令 $\zeta=e^{i\theta_1}$, 則 ζ 是一個 n 次本原單位根, 且

$$2\cos\theta_1=\zeta+\zeta^{-1}, \tag{20}$$

從而

$$\cos\theta_1\in\mathbb{Q}(\zeta). \tag{21}$$

由引理 2 與引理 3, 立即推出 H 同構於 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*/\{[1],[-1]\}$。由於 (19) 成立, 這就意味著, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 的每個元素 x 滿足 $x^4=1$。根據引理 4, 這就推出, 在 n 的質因數分解

$$n=2^s p_1^{s_1}\cdots p_t^{s_t}$$

中, 對於每個奇質數 p_i, 有

$$p_i^{s_i-1}(p_i-1)\leq 4.$$

從而 $p_i\leq 5$, 即有 $p_i=3$ 或 $p_i=5$, 並且對應的 $s_i=1$。類似地, 由引理 4, 在 n 的質因數分解中, 2 的指數 s 必須滿足 $s\leq 4$。綜上, n 的質因數分解具有以下形式

$$n=2^s3^{s_1}5^{s_2}, \tag{22}$$

其中

$$0\leq s\leq 4,\quad 0\leq s_1\leq 1,\quad 0\leq s_2\leq 1. \tag{23}$$

這一共給出 $5\times2\times2=20$ 個值。注意 $n\geq3$, 因此其中至多有 18 個值滿足條件, 它們取自集合

$$S_1=\{4,8,16,3,6,12,24,48,5,10,20,40,80,15,30,60,120,240\}. \tag{24}$$

注意, 並非 S_1 中的 18個值都能使得 (19) 成立。比如, 若 $n>7$, 則由 (22) 可知, 7 與 n 互質, 從而由限制 (19) 可知, 必定有

$$7^2\equiv\pm1\pmod n. \tag{25}$$

這意味著

$$n \mid 48 \quad \text{或} \quad n \mid 50. \tag{26}$$

這就推出 n 不能取值 S_1 的後八個值, 從而 n 包含在集合 S_1 的下述子集

$$S_2 = \{4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 5, 10\}. \tag{27}$$

也並非 S_2 中的 10 個值都能使得 (19) 成立. 若 $n > 11$, 則由 (22) 可知, 11 與 n 互質, 從而由限制 (19) 可知, 必定有

$$11^2 \equiv \pm 1 \bmod n. \tag{28}$$

這意味著

$$n \mid 120 \quad \text{或} \quad n \mid 122. \tag{29}$$

這就推出 n 不能取值 S_1 中的 $16, 48$, 從而 n 包含在集合 S_2 的下述子集[1]

$$S_3 = \{4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10\}. \tag{30}$$

這就推出 $\theta_1 = \dfrac{2\pi m}{n}$ 可能的取值集合爲

$$S = \left\{\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{12}, \frac{10\pi}{12}, \frac{2\pi}{24}, \frac{10\pi}{24}, \frac{14\pi}{24}, \frac{22\pi}{24}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{10}, \frac{6\pi}{10}\right\}. \tag{31}$$

容易驗證, 上述集合 S 可以重新表示爲

$$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{4\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{6\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{8\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{10\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}. \tag{32}$$

類似地, 我們可以證明 $\theta_2, \theta_2 \in S$。現在我們只需要求出所有的 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in S \times S \times S$ 且 $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$ 使得

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi. \tag{33}$$

我們分兩種情況。

第一種情況: 若 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之一是 $\dfrac{j\pi}{5}$, 這裡 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, 則另外兩個 θ 之和必定以 5 爲分母, 這就意味著剩下的兩個 θ 之中必定有一個以 5 爲分母(否則其分母必定是 12 的因數), 從而另一個也必定以 5 爲分母. 這就引出方程

$$\frac{j_1\pi}{5} + \frac{j_2\pi}{5} + \frac{j_3\pi}{5} = \pi, \tag{34}$$

即

[1]事實上, 我們的方法可以證明以下結果: 設 n 是正整數, 若 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ 中每個元素 k 都滿足 $k^2 \equiv \pm 1 \pmod n$, 則 $n \mid 24$ 或 $n \mid 10$。一個相關的結果參見 [5]。

$$j_1 + j_2 + j_3 = 5, \tag{35}$$

其中 $j_1, j_2, j_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $j_1 \leq j_2 \leq j_3$, 它只有兩組解

$$(j_1, j_2, j_3) = (1, 1, 3) \quad 與 \quad (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 2). \tag{36}$$

它們給出的內角是

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right) \quad 與 \quad (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right). \tag{37}$$

第二種情況: 若 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 都是 $\dfrac{j\pi}{12}$, 這裡 $j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$。則我們得到方程

$$\frac{j_1\pi}{12} + \frac{j_2\pi}{12} + \frac{j_3\pi}{12} = \pi, \tag{38}$$

即

$$j_1 + j_2 + j_3 = 12, \tag{39}$$

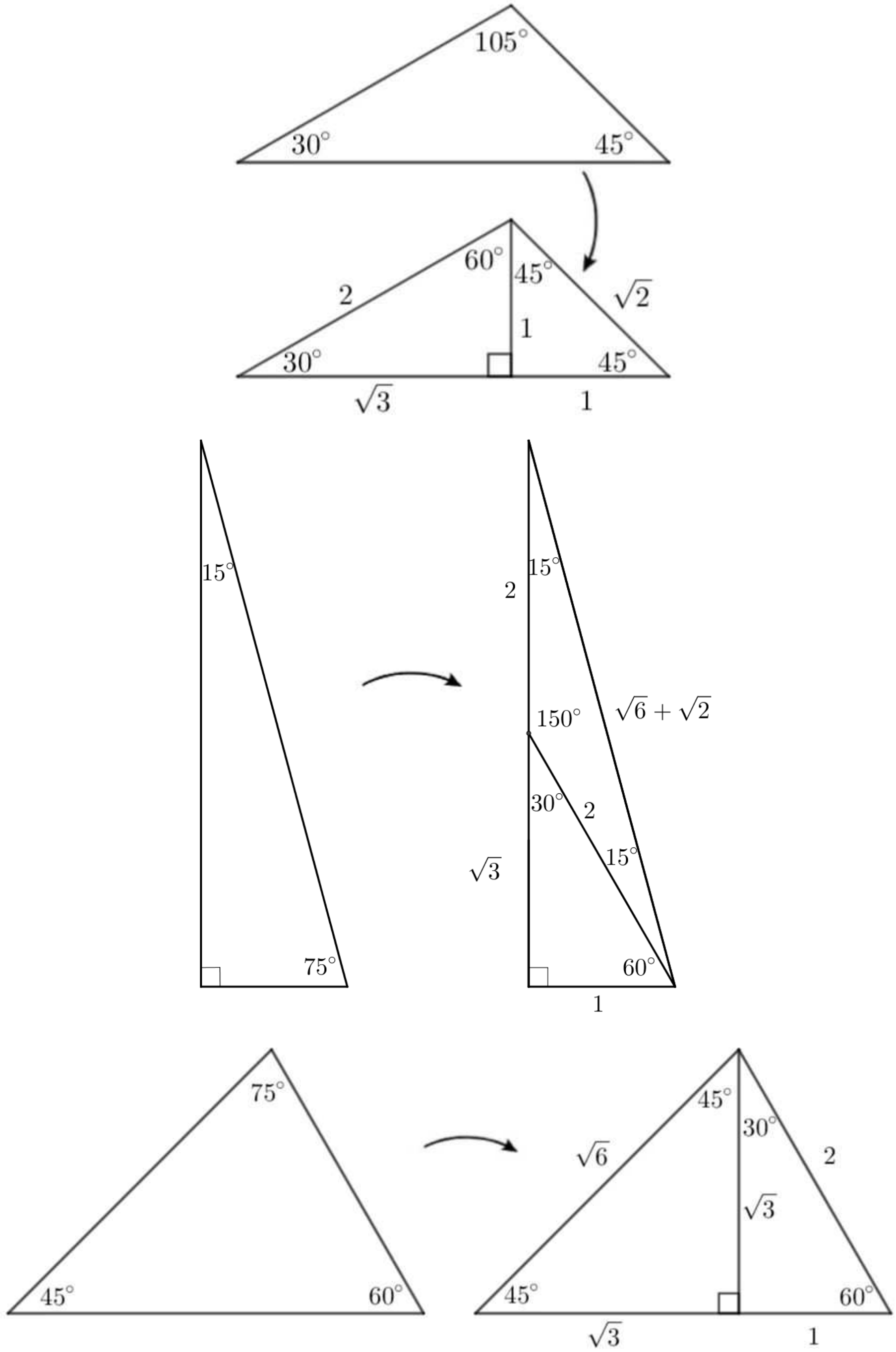
其中 $j_1, j_2, j_3 \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ 且 $j_1 \leq j_2 \leq j_3$。它有 12 組解:

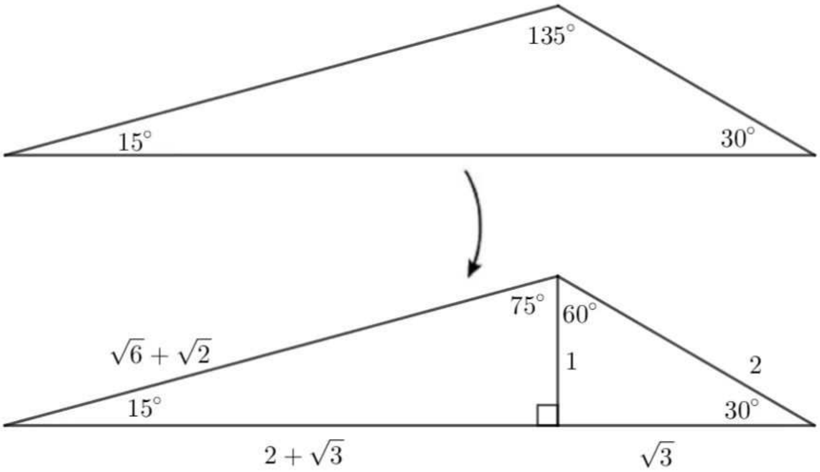
$$\begin{aligned} &(1,1,10), (1,2,9), (1,3,8), (1,4,7), (1,5,6), (2,2,8), \\ &(2,3,7), (2,4,6), (2,5,5), (3,3,6), (3,4,5), (4,4,4). \end{aligned} \tag{40}$$

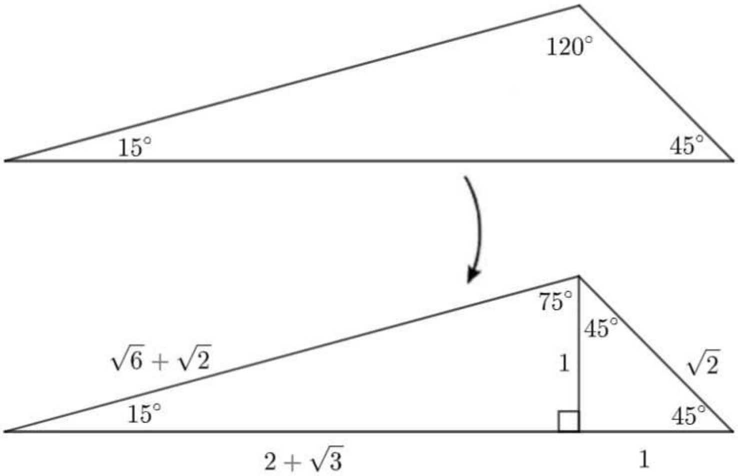
並且可以寫出對應的內角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$。爲方便讀者, 我們將全部 14 中可能的情況匯成表格如下:

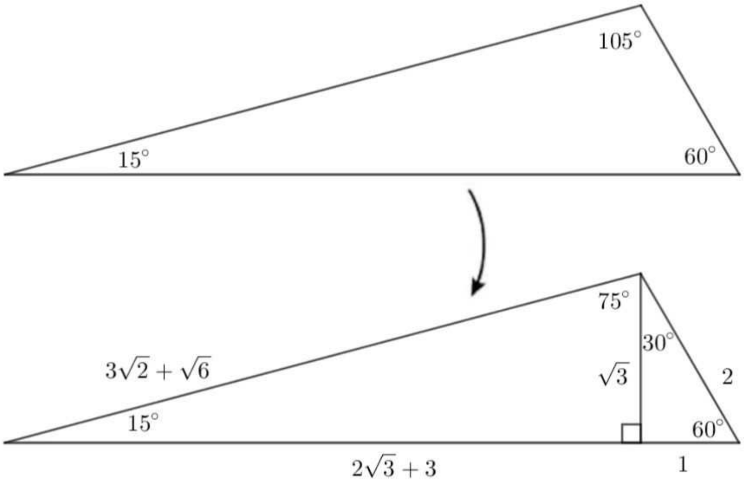
角度制記號	$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$	$\ell_1 : \ell_2 : \ell_3$
36°–36°–108°	$(\pi/5, \pi/5, 3\pi/5)$	$2 : 2 : \sqrt{5}+1$
36°–72°–72°	$(\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5)$	$\sqrt{5}-1 : 2 : 2$
15°–15°–150°	$(\pi/12, \pi/12, 5\pi/6)$	$\sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{3}+1$
15°–30°–135°	$(\pi/12, \pi/6, 3\pi/4)$	$\sqrt{3}-1 : \sqrt{2} : 2$
15°–45°–120°	$(\pi/12, \pi/4, 2\pi/3)$	$\sqrt{3}-1 : 2 : \sqrt{6}$
15°–60°–105°	$(\pi/12, \pi/3, 7\pi/12)$	$\sqrt{3}-1 : \sqrt{6} : \sqrt{3}+1$
15°–75°–90°	$(\pi/12, 5\pi/12, \pi/2)$	$\sqrt{3}-1 : \sqrt{3}+1 : 2\sqrt{2}$
30°–30°–120°	$(\pi/6, \pi/6, 2\pi/3)$	$1 : 1 : \sqrt{3}$
30°–45°–105°	$(\pi/6, \pi/4, 7\pi/12)$	$\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3}+1$
30°–60°–90°	$(\pi/6, \pi/3, \pi/2)$	$1 : \sqrt{3} : 2$
30°–75°–75°	$(\pi/6, 5\pi/12, 5\pi/12)$	$\sqrt{3}-1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$
45°–45°–90°	$(\pi/4, \pi/4, \pi/2)$	$1 : 1 : \sqrt{2}$
45°–60°–75°	$(\pi/4, \pi/3, 5\pi/12)$	$2 : \sqrt{6} : \sqrt{3}+1$
60°–60°–60°	$(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$	$1 : 1 : 1$

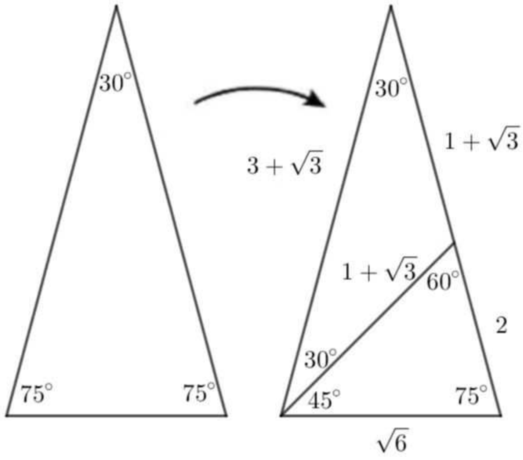
表中第三列顯示的比值表明, 這 14 種三角形確實都是“有理中學三角形”, 從而上表就給出了全部的“有理中學三角形”。第三列的各個比值之確定, 可參見以下“無字證明”, 由浙江省永嘉中學葉盧慶老師提供。

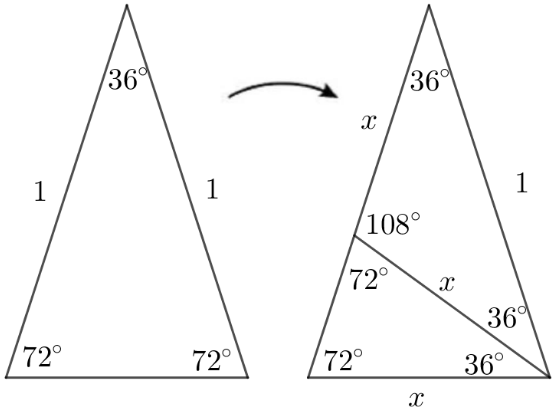



135°
15°
30°
75°
60°
√6 + √2
1
2
15°
30°
2 + √3
√3


120°
15°
45°
75°
45°
√6 + √2
1
√2
15°
45°
2 + √3
1


105°
15°
60°
75°
30°
3√2 + √6
√3
2
15°
60°
2√3 + 3
1





$$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x} \iff x^2=1-x \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

致謝

感謝中國傳媒大學陳見柯老師與江西省吉水中學孫志躍老師對初稿提出寶貴意見! 感謝浙江省永嘉中學葉盧慶老師分享他的“無字證明”, 爲拙文增色不少。

感謝華東師範大學圖書館王善平老師爲作者傳遞文獻 [14]。

參考文獻

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from the Book, Sixth Edition. Springer, 2018. 有中譯本,《數學天書中的證明》(第6版), 馮榮權、宋春偉、宗傳明、李璐譯, 北京: 高等教育出版社, 2022。
2. A. Berger, More grade school triangles, *Amer. Math. Monthly*, 124 (2017), 324-336.
3. A. Berger, On linear independence of trigonometric numbers, *Carpathian Journal of Mathematics*, 34 (2018), 157-166.
4. J. S. Calcut, Grade school triangles, *Amer. Math. Monthly*, 117 (2010), 673-685.

5. S. K. Chebolu, What is special about the divisors of 24? *Math. Mag*, 85 (2012), 366-372.
6. 程其襄。三角函數表上的數哪些是無理數 [J]。數學教學, 1955 年第一期, 16-18。
7. J. H. Conway, A characterization of the equilateral triangles and some consequences. *Math. Intelligencer*, 36 (2014), No.2, 1-2.
8. 黃越。有理角的三角函數哪些是無理數。數學傳播季刊, 44(3), 87-93, 2020。
9. S. Lang, *Algebra*. Revised Third Edition. Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
10. 李克大, 李尹裕。《有趣的差分方程》(第2版)。合肥: 中國科學技術大學出版社, 2019。
11. 林開亮, 孫志躍。從代數方程求三角函數: 從 $\cos 72^\circ$ 的計算談起,《數學教學》2022年第1期, 43-46.
12. 林開亮。從正多邊形中的有理比到$\tan\frac{\pi}{n}$的極小多項式,《蛙鳴 》第65期, 2021 年6月。
13. 劉鈍。柏拉圖的《蒂邁歐篇》與五輪塔的幾何學。數學文化, 13 (2022), 63-77.
14. J. C. Parnami, M. K. Agrawal, A. R. Rajwade, Triangles and cyclic quadrilaterals, with angles that are rational multiples of π and sides at most quadratic over the rationals, *Math. Student*, 50 (1982), 79-93.
15. B. Paolillo , G. Vincenzi,
On the rational values of trigonometric functions of angles that are rational in degrees, *Math. Mag.*, 94 (2021), 132-134.
16. H. W. Richmond, An elementary note in trigonometry, *Math. Gaz.*, 20 (1936), 333-334.
17. R. S. Underwood, On the irrationality of certain trigonometric functions, *Amer. Math. Monthly*, 28 (1921), 374-376.
18. 張賢科。《初等數論》。北京: 高等教育出版社, 2016。

—本文作者任教中國西北農林科技大學理學院—