數學傳播 47卷1期, pp. 51-76

SASAS 正弦型方程式對比三角形正弦定理與圓內接多邊形各邊長、頂角與頂角弦長關係方程式

李輝濱

壹、引言

圓內接多邊形中任意三段連續相鄰邊長與居間的兩頂角恰形成以邊長-頂角-邊長-頂角-邊長 SASAS 分佈排列出 _/ 圖樣的幾何形狀, 而此三段邊長與居間的兩頂角正弦值恰能構建成一組的兩相關方程式稱爲圓內接多邊形邊長與頂角的 SASAS 正弦型方程式。圓內接多邊形圖形中任意一個頂點處的頂角必爲圓周角, 此圓周角正向面對的完整圓弧所夾的弦長即稱爲頂角弦長。在多邊形領域裡探索其邊長與頂角的關係性質時, 經常會應用到三角形正弦定理; 此外, 在圓內接奇數邊數多邊形性質中亦擁有這個正弦定理。但仔細研究圓內接偶數邊數多邊形的各性質, 卻發現其並不具有這種型態的正弦定理。相對地, 找到了圓內接偶數邊數多邊形擁有幾個不同類型組合的特殊正弦型方程式。顯然, 奇數邊形與偶數邊形的各種數學性質存有不少的差異; 將此兩種圖形所各持有的方程式類型相比較, 則形成各異其趣的絕妙規律性, 也都能展現出簡潔完美的恆等式特質。

以下正文的推證敘述過程中, 將從較簡易的三角形、圓內接四邊形、圓內接五邊形、$\cdots$、圓內接八邊形分析起, 逐次推廣至一般化的圓內接 n 邊形。以嚴謹論證, 詳實對照地歸納演繹出一系列完整精緻的自我發想創意理論; 並將全文綜合整理成清晰順暢的研究脈絡, 鉅細靡遺地呈現出各類關係方程式的性質來。

貳、本文

考慮任意一個圓內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$, 令 R 爲此圓半徑, 並令各邊邊長爲 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\ldots$, $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$, $\ldots$, $\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$, $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_1}=V_n$, $1\le i\le n$, i 與 n 皆爲自然數。

而在以下正文的敘述推論驗證過程中, 需要應用到下列 5 個數學性質 — 引理。

一、數學基本性質 — 引理

引理 1: 三角形正弦定理 : 請見下圖 T, 半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_1}=V_3$, 則精簡、對稱的正弦定理公式爲:

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R. \tag{1}$$

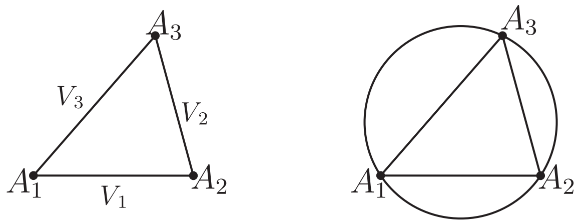

圖 T

證明: 略。

引理 2: 三角函數角度的和差轉換公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

引理 3: 任給一個圓內接偶數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$, $n=2k+2$, k 爲自然數, 則此多邊形的頂角組合;

$$A_1+A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}=A_2+A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-2}+A_n=\frac{1}{2}(n-2)\pi.$$

證明: 略。

引理 4: 圓內接多邊形各圓周角與對應弦長的正弦定理:

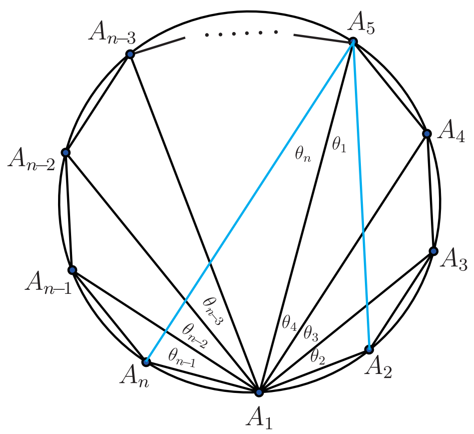

圖 a

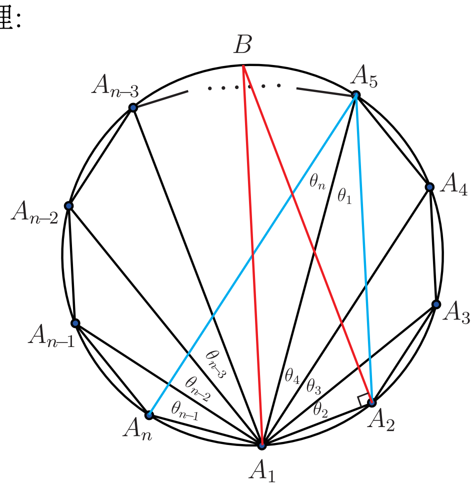

圖 b

圖 a, 半徑 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, ... , $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_1}=V_n$, 而邊長 V_1 所對應的圓周角爲 θ_1, V_2 所對應的圓周角爲 θ_2, V_3 所對應的圓周角爲 θ_3, ... , V_{n-2} 所對應的圓周角爲 θ_{n-2}, V_{n-1} 所對應的圓周角爲 θ_{n-1}, V_n 所對應的圓周角爲 θ_n, 則此多邊形各邊長所對應的圓周角的正弦定理方程式爲下列 (L-1) 式:

$$\frac{V_1}{\sin\theta_1}=\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\cdots=\frac{V_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}=\frac{V_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R. \tag{L-1}$$

證明: 略。

引理 5: 托勒密定理 (Ptolemy's Theorem) : 任給一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_1}=V_4$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, $\overline{A_2A_4}=d_{24}$, 則托勒密定理關係方程式爲 $d_{13}d_{24}=V_1V_3+V_2V_4$。

證明: 略。

二、圓內接多邊形三相鄰邊長與居間頂角組合的 SASAS 正弦型方程式

SASAS**定理**: 一個圓內接 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的任意三個連續相鄰邊的四頂點 A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, 如下圖 1, 令邊長 $\overline{A_{i-1}A_i}=V_{i-1}$, $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$, $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}=V_{i+1}$, $1\leq i\leq n$, 且 $A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_1$, $A_{n+2}=A_2$, $V_0=V_n$, $V_{n+1}=V_1$, 則下列 SASAS 正弦型方程式 (2.1) 式與 (2.2) 式必定恆成立:

$$V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}}=\frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i}-\frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}}. \tag{2.2}$$

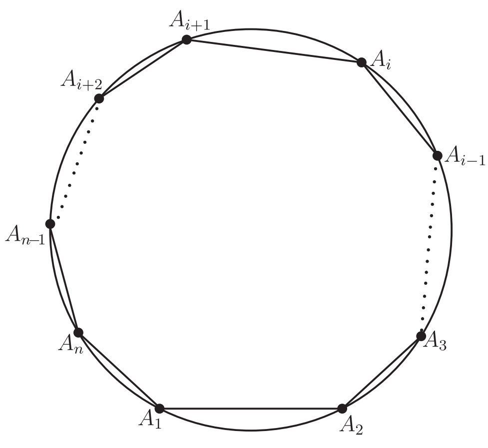

圖 1

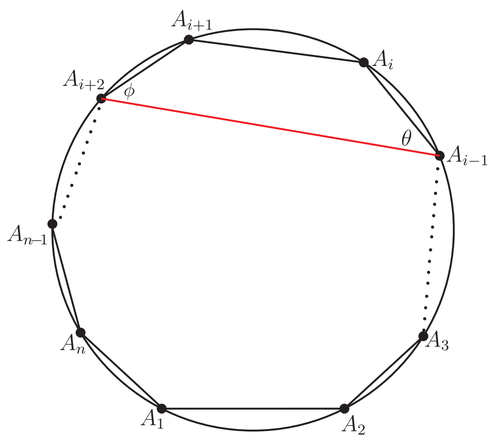

圖 2

證明: 見圖 2, 連接兩頂點 A_{i-1} 與 A_{i+2}, 使形成一個圓內接四邊形 $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$, 現在建立一直角坐標系, 並將 A_{i+2} 點置於此坐標系的原點, 再將直線段 $\overline{A_{i+2}A_{i-1}}$ 疊置於坐標系 X 軸, 使兩者相重合。此四邊形 A_{i+2} 處顯示之方位角爲 ϕ, 線段 $\overline{A_{i+2}A_{i-1}}$ 之方位角爲零, $\overline{A_{i-1}A_i}=V_{i-1}$ 之方位角爲 $\pi-\theta$, $\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$ 的方位角爲 $2\pi-\theta-A_i$, $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}=V_{i+1}$ 的方位角爲 $3\pi-\theta-A_i-A_{i+1}$。由封閉四邊形及向量的正交性質, 則此圓內接四邊形必有下列的四個相鄰邊長與頂角相關聯的正弦關係式; 再令邊長線段 $\overline{A_{i+2}A_{i-1}}=V$, 並引用引理2公式及引理3 圓內接四邊形的兩對角和恰爲 π 值關係, 則必可得下述推理過程: (以邊長線段 $\overline{A_{i+2}A_{i-1}}=V$ 爲水平基底直線段)

$$
\begin{aligned}
&V\sin 0+V_{i-1}\sin(\pi-\theta)+V_i\sin(2\pi-\theta-A_i)+V_{i+1}\sin(3\pi-\theta-A_i-A_{i+1})=0,\\
\Rightarrow\ &V_{i-1}\sin\theta+V_i\sin(\pi+A_{i+1}-A_i)+V_{i+1}\sin(2\pi-A_i)=0,\\
\Rightarrow\ &V_{i-1}\sin\theta-V_i\sin(A_{i+1}-A_i)-V_{i+1}\sin A_i=0,\\
\Rightarrow\ &V_{i-1}\sin A_{i+1}-V_i\sin(A_{i+1}-A_i)-V_{i+1}\sin A_i=0,\\
\Rightarrow\ &V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1}, &(2.1)\\
\Rightarrow\ &\frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}}=\frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i}-\frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}}. &(2.2)
\end{aligned}
$$

以上 (2.1) 式與 (2.2) 式證明完成。同時, 此定理的逆敘述也必然成立, 證明如下。

逆敘述: 任意給定一個平面凸四邊形 $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$, 若其三個連續相鄰邊長 V_{i-1}, V_i, V_{i+1} 與居間的兩頂角 A_i, A_{i+1} 已滿足 $V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1}$ 的 (2.1) 式等式關係式時, 則此凸四邊形的四頂點必定共圓。請見下圖 3。

證明: 以歸謬法證明; 假設 (2.1) 式成立, 請見下圖3。

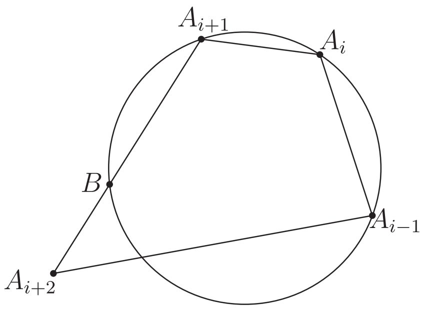

圖 3

若通過 A_{i-1}、A_i、A_{i+1} 三點的外接圓不通過點 A_{i+2}, 先預設點 A_{i+2} 落在圓的外側。令 B 點是線段 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 與圓周的交點, 且線段長 $\overline{A_{i+1}B}=U_{i+1}$, 則由已證的定理知;

$$V_i\sin(A_i-A_{i+1})=U_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1}, \tag{2.3}$$

但由已知的假設有 (2.1) 式, 比較 (2.3) 式與 (2.1) 式, 得 $U_{i+1} = V_{i+1}$, 而有 $B = A_{i+2}$, 即點 B 與點 A_{i+2} 重合。如果預設點 A_{i+2} 落在圓的內側, 證明完全類似。因此, 此平面凸四邊形 $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 的四頂點必定共圓, 其必爲圓內接四邊形。逆敘述證明完成。

這定理告訴我們, 只要有三個連續相鄰邊的四頂點共圓時, 此三鄰邊的邊長與居間的兩頂角之間必具有如 (2.1) 式與 (2.2) 式 SASAS 型的實質恆等式關係。(2.1) 式表明：任一邊長 V_i 與其兩端點的頂角差 $A_i - A_{i+1}$ 的正弦值乘積組合恰等於 (A_i 正弦值乘上對邊 V_{i+1}) 減去 (A_{i+1} 正弦值乘上對邊 V_{i-1}), 這是具有規則性的型態結構。此 2 式非常有效用, 後續的許多推演證明過程都會重複應用此 2 方程式性質。

三、圓內接多邊形各邊長、頂角與頂角弦長關係方程式

現在, 要充分應用上述 5 個引理與 SASAS 定理開始進入本文主題的演繹證明, 以尋獲圓內接多邊形各邊長、頂角與頂角弦長關係方程式, 其流程如下。

A. 三角形的各邊長與頂角關係方程式

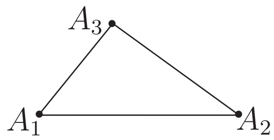

圖 4

A.1 見圖 4, 令三角形 $A_1A_2A_3$ 的邊長各爲

$\overline{A_1A_2} = V_1$, $\overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_3A_1} = V_3$, 由

$$V_1 \sin(A_1 - A_2) = V_1 \sin A_1 \cos A_2 - V_1 \cos A_1 \sin A_2. \tag{3.1}$$

由三角形正弦定理知; $V_1 \sin A_1 = V_2 \sin A_3$ 及 $V_1 \sin A_2 = V_3 \sin A_3$ 代入 (3.1) 式

$$\Rightarrow \qquad V_1 \sin(A_1 - A_2) = V_2 \sin A_3 \cos A_2 - V_3 \cos A_1 \sin A_3. \tag{3.2}$$

A.2 由

$$\begin{aligned} V_2 \sin A_1 &= V_2 \sin(\pi - A_2 - A_3) = V_2 \sin(A_2 + A_3) \\ &= V_2 \sin A_2 \cos A_3 + V_2 \cos A_2 \sin A_3, \\ \text{又由} \qquad V_3 \sin A_2 &= V_3 \sin(\pi - A_1 - A_3) = V_3 \sin(A_1 + A_3) \\ &= V_3 \sin A_1 \cos A_3 + V_3 \cos A_1 \sin A_3 \\ \Rightarrow \qquad V_2 \sin A_1 - V_3 \sin A_2 &= V_2 \sin A_2 \cos A_3 + V_2 \cos A_2 \sin A_3 \\ &\quad -V_3 \sin A_1 \cos A_3 - V_3 \cos A_1 \sin A_3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

再由三角形正弦定理得; $V_2 \sin A_2 = V_3 \sin A_1$, 則 (3.3) 式化簡成下式:

$$V_2 \sin A_1 - V_3 \sin A_2 = V_2 \cos A_2 \sin A_3 - V_3 \cos A_1 \sin A_3. \tag{3.4}$$

A.3 比較 (3.2) 式與 (3.4) 式, 兩式完全相等, 因此, 得下式:

$$V_1\sin(A_1-A_2)=V_2\sin A_1-V_3\sin A_2 \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\sin(A_1-A_2)}{V_3V_2}=\frac{\sin A_1}{V_3V_1}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}. \tag{3.6}$$

方程式 (3.5) 式與 (3.6) 式即爲證明出的三角形 SASAS 正弦型方程式。

方程式 (3.5) 式與 (3.6) 式爲三角形正弦定理之外的一組新創三角形邊長角度正弦方程式! 同理, 還能找出另外兩組, 分別爲;

$$V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3}. \tag{3.8}$$

$$\text{及}\quad V_3\sin(A_3-A_1)=V_1\sin A_3-V_2\sin A_1 \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\sin(A_3-A_1)}{V_2V_1}=\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_1}{V_3V_1}. \tag{3.10}$$

A.4 再將 (3.5) 式、(3.7) 式與 (3.9) 式三式一起相加, 即得下式:

$$V_1\sin(A_1-A_2)+V_2\sin(A_2-A_3)+V_3\sin(A_3-A_1)=0. \tag{3.11}$$

再將 (3.6) 式、(3.8) 式與 (3.10) 式三式一起相加, 又得下式:

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_3V_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_1)}{V_2V_1}=0. \tag{3.12}$$

方程式 (3.11) 式與 (3.12) 式又是另 2 組新創的三角形邊長與頂角正弦型方程式!

B. 圓內接四邊形各邊長與頂角關係方程

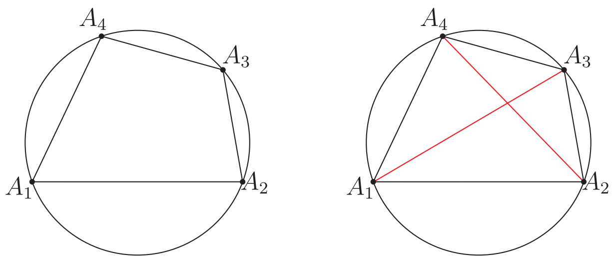

圖 5

B.1 見圖 5, 一個圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 其四個邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}$

$= V_3$, $\overline{A_4A_1} = V_4$, 對此圖形必有 SASAS 定理所述的下列 4 組關係式:

$$\text{第1組:}\qquad V_1\sin(A_1-A_2)=V_2\sin A_1-V_4\sin A_2 \tag{4.1}$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}=\frac{\sin A_1}{V_4V_1}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}. \tag{4.2}$$

$$\text{第2組:}\qquad V_2\sin(A_2-A_3)=V_3\sin A_2-V_1\sin A_3 \tag{4.3}$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3}. \tag{4.4}$$

$$\text{第3組:}\qquad V_3\sin(A_3-A_4)=V_4\sin A_3-V_2\sin A_4 \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}=\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_4}{V_3V_4}. \tag{4.6}$$

$$\text{第4組:}\qquad V_4\sin(A_4-A_1)=V_1\sin A_4-V_3\sin A_1 \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\sin(A_4-A_1)}{V_3V_1}=\frac{\sin A_4}{V_3V_4}-\frac{\sin A_1}{V_4V_1}. \tag{4.8}$$

B.2 先將 (4.2) 式、(4.4) 式、(4.6) 式、(4.8) 式等四式一起相加, 即得下式:

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_1)}{V_3V_1}=0. \tag{4.9}$$

再將 (4.9) 式各項全部乘上最小公倍式 $V_1V_2V_3V_4$, 即得下式:

$$V_3V_1\sin(A_1-A_2)+V_4V_2\sin(A_2-A_3)+V_1V_3\sin(A_3-A_4)+V_2V_4\sin(A_4-A_1)=0. \tag{4.10}$$

此時, (4.10) 式與 (3.11) 式作比較, 兩式皆具有簡潔規律性! 而 (4.9) 式、(4.10) 式皆爲圓內接四邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。

B.3 再檢視方程式 (4.2) 式 與 (4.6) 式, 由於兩對角相互補, 可得下式:

$$\begin{aligned}&\sin(A_1-A_2)=-\sin(A_3-A_4)\ \Rightarrow\ \sin(A_1-A_2)+\sin(A_3-A_4)=0,\\ \Rightarrow\ &\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}=0\ \Rightarrow\ \frac{\sin A_1}{V_4V_1}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_4}{V_3V_4}=0,\\ \Rightarrow\ &\frac{\sin A_1}{V_4V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

方程式 (4.11) 式爲圓內接四邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。等號左側是奇數標記頂角正弦值組合, 等號右側是偶數標記頂角正弦值組合, 整個方程式完全是具有規律型態的組合結構。

B.4 見圖 5 中, 頂角 A_1 與 A_3 正向面對的頂角弦長爲對角線長 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$, 而頂角 A_2 與 A_4 的頂角弦長爲對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, 由引理 4 圓周角的正弦定理知 : $d_{24}=$

$2R\sin A_1 = 2R\sin A_3$ 且 $d_{13} = 2R\sin A_2 = 2R\sin A_4$, 代入 (4.11) 式中, 再經運算, 化簡得

$$d_{24}(V_2V_3 + V_4V_1) = d_{13}(V_1V_2 + V_3V_4). \tag{4.12}$$

方程式 (4.12) 式爲圓內接四邊形各邊長與頂角弦長關係方程式。

C. 圓內接五邊形各邊長與頂角關係方程式

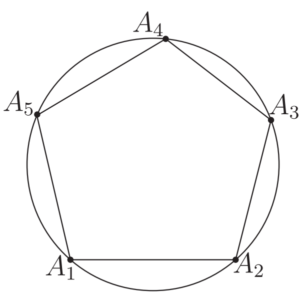

圖 6

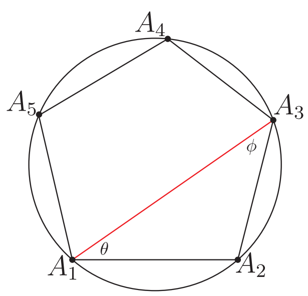

圖 7

C.1 任給一個圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 見圖 6, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 5 組同類型:

第1組:
$$V_1\sin(A_1 - A_2) = V_2\sin A_1 - V_5\sin A_2 \tag{5.1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A_1 - A_2)}{V_5V_2} = \frac{\sin A_1}{V_5V_1} - \frac{\sin A_2}{V_1V_2}. \tag{5.2}$$

其餘 4 組具有同樣型式省略之, 不再贅述。

C.2 將 C.1 所述的 (5.2) 式 5 組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = 0 \quad 且 \quad V_0 = V_5,\ A_6 = A_1,\ V_6 = V_1 \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} V_{i+2}V_{i+3}V_i\sin(A_i - A_{i+1}) = 0 \text{ 且 } A_6 = A_1, V_6 = V_1, V_7 = V_2, V_8 = V_3. \tag{5.4}$$

此 (5.3) 式、(5.4) 式皆爲圓內接五邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。

C.3 見圖 7, 連接兩頂點 A_1 與 A_3 形成直線段, 將五邊形分割成三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 與四邊形 $A_1A_3A_4A_5$。對 $\triangle A_1A_2A_3$ 言, 由正弦定理公式可得; $\dfrac{V_1}{\sin\phi} = \dfrac{V_2}{\sin\theta} = 2R$, 而圖中角度 θ 與 ϕ 需要變換; $\theta = A_1 - \angle A_5A_1A_3 = A_1 - (\pi - A_4) = A_1 + A_4 - \pi$ 且

$\phi = A_3 - \angle A_4A_3A_1 = A_3 + A_5 - \pi$, 將變換的 θ 與 ϕ 代入上述正弦定理公式中; 得

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5-\pi)} = \frac{V_2}{\sin(A_1+A_4-\pi)} = 2R \Rightarrow \frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)} = \frac{V_2}{\sin(A_1+A_4)} = -2R,$$

同理, 可再證明出分子爲 V_3, V_4, V_5 的 3 項, 然後將所得到的 5 項全部排列出來而得出圓內接五邊形正弦定理, 如下: 令 R 爲圓內接五邊形的圓周半徑, 則其方程式爲

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)} = \frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)} = \frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)} = -2R. \tag{5.5}$$

(5.5) 式爲具有美妙對稱型態方程式的圓內接五邊形正弦定理。

D. 圓內接六邊形各邊長與頂角關係方程式

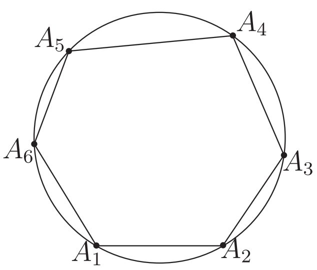

圖 8

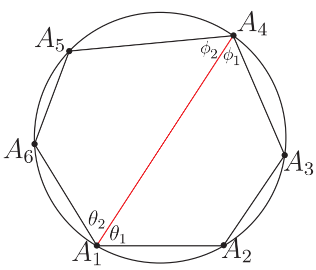

圖 9

D.1 任給一個圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 見圖 8, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 6 組同類型:

第 i 組:
$$V_i \sin(A_i - A_{i+1}) = V_{i+1}\sin A_i - V_{i-1}\sin A_{i+1},$$
$$1 \le i \le 6,\ V_0 = V_6,\ A_7 = A_1,\ V_7 = V_1, \tag{6.1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = \frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i} - \frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}},$$
$$1 \le i \le 6,\ V_0 = V_6,\ A_7 = A_1,\ V_7 = V_1. \tag{6.2}$$

將此同類型 (6.2) 式的 6 組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式:

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = 0 \quad 且 \quad V_0 = V_6,\ A_7 = A_1,\ V_7 = V_1 \tag{6.3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} V_{i+2}V_{i+3}V_{i+4}V_i \sin(A_i - A_{i+1}) = 0 \text{ 且 } A_7 = A_1, V_{6+j} = V_j, 1 \le j \le 4. \tag{6.4}$$

此 (6.3) 式、(6.4) 式皆爲圓內接六邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。

D.2 見圖 9, 連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成直線段 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, 將六邊形分割成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與另一個四邊形 $A_1A_4A_5A_6$。直線段又將頂角 A_1 分割出 2 個分角, 使 $A_1=\theta_1+\theta_2$。同時又將另一頂角 A_4 分割出 2 個分角, 使 $A_4=\phi_1+\phi_2$。現在要應用圓內接四邊形的 (4.11) 式關係方程式; 對圖 9 的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言, 必有下述關係式:

$$\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin\phi_1}{V_3d_{14}},$$

對圖 9的另一個四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ 也必有下述關係式:

$$\frac{\sin\theta_2}{d_{14}V_6}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}=\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}},$$

將此兩關係式相加合併, 得：

$$\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin\theta_2}{d_{14}V_6}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin\phi_1}{V_3d_{14}}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}}. \quad (6.D1)$$

接下來需應用到引理 5 托勒密定理公式, 見下圖 10; 連接直線段 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$, 再連接直線段 $\overline{A_6A_4}=d_{64}$, 再連接直線段 $\overline{A_2A_6}=d_{26}$, 得一個新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_6$,

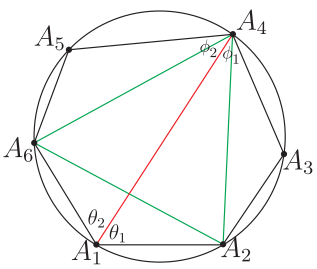

圖 10

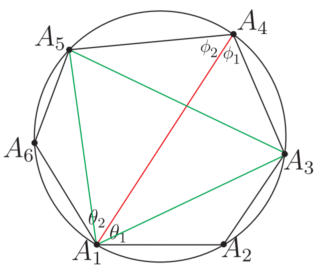

圖 11

由托勒密定理知: $d_{14}d_{26}=V_6d_{24}+V_1d_{64}$, 再應用引理 4 圓周角的正弦定理, 得：

$$d_{14}\sin A_1=V_6\sin\theta_1+V_1\sin\theta_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin A_1}{V_6V_1}=\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin\theta_2}{V_6d_{14}}. \quad (6.D2)$$

同理, 見圖 11, 再得一個新的圓內接四邊形 $A_1A_3A_4A_5$, 仿效圖 10 的做法, 再應用托勒密定理與圓周角的正弦定理, 必得

$$\frac{\sin A_4}{V_3V_4}=\frac{\sin\phi_1}{d_{14}V_3}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}}. \quad (6.D3)$$

最後, 將 (6.D2) 式與 (6.D3) 式一起同步代入 (6.D1) 式中, 即得美妙的下式;

$$\frac{\sin A_1}{V_6V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}. \quad (6.5)$$

(6.5) 式即爲圓內接六邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式, 媲美 (4.11) 式。

D.3 由 (6.5) 式可得:

$$\frac{\sin A_1}{V_6V_1}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}-\frac{\sin A_6}{V_5V_6}=0$$

及

$$\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}-\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}-\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_6V_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}=0$$

及

$$\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\frac{\sin(A_6-A_1)}{V_5V_1}=0.$$

將此兩式約去分母, 得

$$V_4\sin(A_1-A_2)+V_6\sin(A_3-A_4)+V_2\sin(A_5-A_6)=0, \tag{6.6}$$

及

$$V_5\sin(A_2-A_3)+V_1\sin(A_4-A_5)+V_3\sin(A_6-A_1)=0. \tag{6.7}$$

(6.5) 式、(6.6) 式、(6.7) 式俱爲圓內接六邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。(6.6) 式、(6.7) 式的各項結構都具規律性; 即每一項是以相鄰兩頂角差的正弦值再乘上兩頂角所夾邊長的正對面邊長的乘積而得。例如; 兩頂角 A_1 與 A_2 所夾邊長爲 V_1, 其正對面邊長爲 V_4, 所以組合此規律項爲 $V_4\sin(A_1-A_2)$。另兩頂角 A_2 與 A_3 所夾邊長爲 V_2, 其正對面邊長爲 V_5, 組合此規律項爲 $V_5\sin(A_2-A_3)$。

D.4 在圖 10 與圖 11 中, 見到六個頂角的各頂角弦長; 頂角 A_1 的頂角弦長爲 d_{62}, A_2 的頂角弦長爲 d_{13}, A_3 對應 d_{24}, A_4 對應 d_{35}, A_5 對應 d_{46}, A_6 對應 d_{51}, 應用引理 4 圓周角的正弦定理代入 (6.5) 式中, 化簡, 消除分母, 得:

$$\begin{aligned} &d_{62}V_2V_3V_4V_5+d_{24}V_4V_5V_6V_1+d_{46}V_6V_1V_2V_3\\ &\quad=d_{13}V_3V_4V_5V_6+d_{35}V_5V_6V_1V_2+d_{51}V_1V_2V_3V_4. \end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.8) 式即爲圓內接六邊形各邊長與頂角弦長關係方程式! 此 (6.8) 式的各項結構都具規律性; 即每一項是以頂角弦長乘上與此頂角兩鄰邊之外的所有邊長依序相乘的連乘積。例如 : 頂點 A_1 的頂角弦長爲 d_{62}, 其兩鄰邊長是 V_6 與 V_1, 其餘邊長依序分佈乘積爲 $V_2V_3V_4V_5$, 所以組合起來的此規律項爲 $d_{62}V_2V_3V_4V_5$。另頂點 A_2 的頂角弦長爲 d_{13}, 其兩鄰邊長是 V_1 與 V_2, 其餘邊長依序分佈乘積爲 $V_3V_4V_5V_6$, 所以組合起來的此規律項爲 $d_{13}V_3V_4V_5V_6$。

E. 圓內接七邊形各邊長與頂角關係方程式

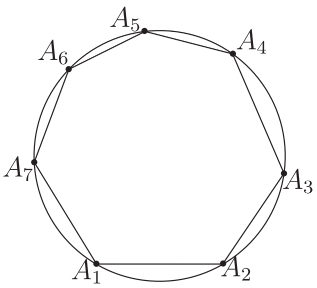

圖 12

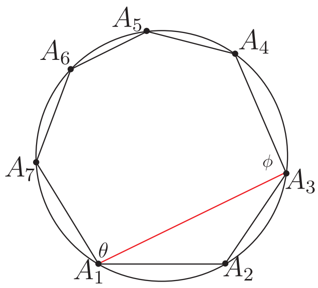

圖 13

E.1 任給一個圓內接七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, 見圖 12, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 7 組同類型:

$$\text{第 } i \text{ 組:} \quad V_i \sin(A_i - A_{i+1}) = V_{i+1} \sin A_i - V_{i-1} \sin A_{i+1}, \quad 1 \le i \le 7,\ V_0 = V_7,\ A_8 = A_1,\ V_8 = V_1, \tag{7.1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = \frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i} - \frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}} \quad 1 \le i \le 7,\ V_0 = V_7,\ A_8 = A_1,\ V_8 = V_1. \tag{7.2}$$

將此同類型 (7.2) 式的 7 組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = 0 \quad \text{且} \quad V_0 = V_7,\ A_8 = A_1,\ V_8 = V_1 \tag{7.3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{7} V_{i+2}V_{i+3}V_{i+4}V_{i+5}V_i \sin(A_i - A_{i+1}) = 0 \text{ 且 } A_8 = A_1, V_{7+j} = V_j, 1 \le j \le 5. \tag{7.4}$$

此 (7.3) 式、(7.4) 式皆爲圓內接七邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。

E.2 見圖 13, 連接頂點 A_1 與 A_3 形成直線段, 將七邊形分割成三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 與六邊形 $A_1A_3A_4A_5A_6A_7$。由 $\triangle A_1A_2A_3$ 的正弦定理得:

$$\frac{V_1}{\sin(A_3 - \phi)} = \frac{V_2}{\sin(A_1 - \theta)} = 2R,$$

對六邊形 $A_1A_3A_4A_5A_6A_7$ 應用引理 3 得 $\phi + A_5 + A_7 = \theta + A_4 + A_6 = 2\pi$, 代換後, 得

$$\frac{V_1}{\sin(A_3 + A_5 + A_7)} = \frac{V_2}{\sin(A_1 + A_4 + A_6)} = 2R.$$

同理, 可再證明出分子爲 V_3、V_4、V_5、V_6、V_7 的 5 項, 然後將所得到的 7 項全部排列, 如下:

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7)} &= \frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+A_2)}\\ &= \frac{V_4}{\sin(A_6+A_1+A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_7+A_2+A_4)}\\ &= \frac{V_6}{\sin(A_1+A_3+A_5)} = \frac{V_7}{\sin(A_2+A_4+A_6)} = 2R. \qquad (7.5)\end{aligned}$$

(7.5) 式爲具有美妙對稱型態方程式的圓內接七邊形正弦定理。

F. 圓內接八邊形各邊長與頂角關係方程式

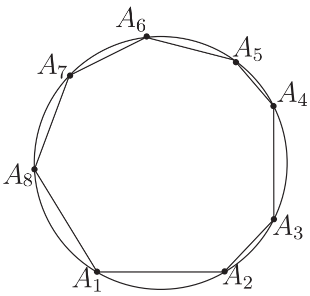

圖 14

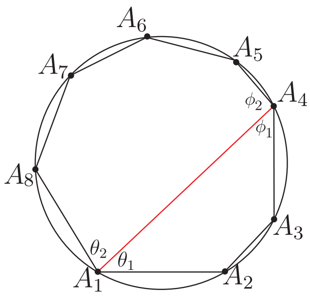

圖 15

F.1 任給一個圓內接八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, 見圖 14, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 8 組同類型:

第 i 組:

$$V_i\sin(A_i-A_{i+1}) = V_{i+1}\sin A_i - V_{i-1}\sin A_{i+1},$$
$$1\le i\le 8,\ V_0=V_8,\ A_9=A_1,\ V_9=V_1 \qquad (8.1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = \frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i} - \frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}}$$
$$1\le i\le 8,\ V_0=V_8,\ A_9=A_1,\ V_9=V_1. \qquad (8.2)$$

將此同類型 (8.2) 式的 8 組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式:

$$\sum_{i=1}^{8}\frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = 0 \quad 且 \quad V_0=V_8,\ A_9=A_1,\ V_9=V_1 \qquad (8.3)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{8} V_{i+2}V_{i+3}V_{i+4}V_{i+5}V_{i+6}V_i\sin(A_i-A_{i+1})=0 \text{ 且 } A_9=A_1, V_{8+j}=V_j, 1\le j\le 6. \qquad (8.4)$$

此 (8.3) 式、(8.4) 式皆爲圓內接八邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。此 (8.4) 式的各項結構都具規律性; 即每一項是以 $V_i\sin(A_i-A_{i+1})$ 形成的 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘再與 $V_i\sin(A_i-A_{i+1})$ 乘後的連乘積。例如; 第 1 組的 $V_1\sin(A_1-A_2)$, 其 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘爲 $V_3V_4V_5V_6V_7$, 所以組合起來的此規律項爲 $V_3V_4V_5V_6V_7V_1\sin(A_1-A_2)$。第 5 組的 $V_5\sin(A_5-A_6)$, 其 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘爲 $V_7V_8V_1V_2V_3$, 所以組合起來的此規律項爲 $V_7V_8V_1V_2V_3V_5\sin(A_5-A_6)$。其餘各項皆依如此操作而逐一被尋得。

F.2 見圖 15, 連接兩頂點 A_1 與 A_4 形成直線段 $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, 將八邊形分割成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與另一個六邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7A_8$。直線段又將頂角 A_1 分割出2個分角, 使 $A_1=\theta_1+\theta_2$。同時又將另一頂角 A_4 分割出 2 個分角, 使 $A_4=\phi_1+\phi_2$。現在要應用四邊形的 (4.11) 式及六邊形的 (6.5) 式; 對圖 15 的四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 言, 必有下述關係式:

$$\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin\phi_1}{V_3d_{14}},$$

對圖 15 的另一個六邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7A_8$ 有下述關係式:

$$\frac{\sin\theta_2}{d_{14}V_8}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_7}{V_6V_7}=\frac{\sin A_8}{V_7V_8}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}}.$$

將此兩關係式相加合併, 得

$$\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin\theta_2}{d_{14}V_8}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_7}{V_6V_7}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin\phi_1}{V_3d_{14}}+\frac{\sin A_8}{V_7V_8}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}}. \tag{8.F1}$$

接下來需應用到引理 5 托勒密定理公式, 見下圖16; 連接直線段 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$, 再連接直線段 $\overline{A_6A_4}=d_{64}$, 得一個新的圓內接四邊形 $A_1A_2A_4A_8$, 仿效圓內接六邊形 D.2 的應用托勒密定理, 再應用引理 4 圓周角的正弦定理分析推演過程, 得

$$d_{14}\sin A_1=V_8\sin\theta_1+V_1\sin\theta_2\ \Rightarrow\ \frac{\sin A_1}{V_8V_1}=\frac{\sin\theta_1}{d_{14}V_1}+\frac{\sin\theta_2}{V_8d_{14}}. \tag{8.F2}$$

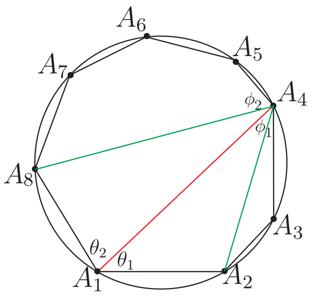

圖 16

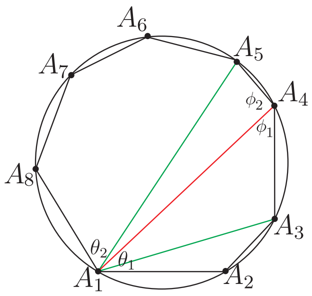

圖 17

同理, 見圖 17, 再得一個新的圓內接四邊形 $A_1A_3A_4A_5$, 仿效圖 16 的做法, 再應用托勒密定理與圓周角的正弦定理, 必得

$$\frac{\sin A_4}{V_3V_4}=\frac{\sin\phi_1}{d_{14}V_3}+\frac{\sin\phi_2}{V_4d_{14}}. \tag{8.F3}$$

最後, 將 (8.F2) 式與 (8.F3) 式一起同步代入 (8.F1) 式中, 即得整齊美妙的下式:

$$\frac{\sin A_1}{V_8V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_7}{V_6V_7}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin A_8}{V_7V_8}. \tag{8.5}$$

(8.5) 式即爲圓內接八邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。媲美 (6.5) 式。

F.3 仿效圓內接六邊形之 D.3 步驟, 移動 (8.5) 式等號兩側的項式再整合成下式

$$\Rightarrow\ \frac{\sin(A_1-A_2)}{V_8V_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}+\frac{\sin(A_7-A_8)}{V_6V_8}=0,$$

及

$$\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\frac{\sin(A_6-A_7)}{V_5V_7}+\frac{\sin(A_8-A_1)}{V_7V_1}=0.$$

將此兩式分別依序乘以 $V_2V_4V_6V_8$ 及 $V_1V_3V_5V_7$, 再整理, 得

$$V_4V_6\sin(A_1-A_2)+V_6V_8\sin(A_3-A_4)+V_8V_2\sin(A_5-A_6)+V_2V_4\sin(A_7-A_8)=0, \tag{8.6}$$

及同型態的另一式:

$$V_5V_7\sin(A_2-A_3)+V_7V_1\sin(A_4-A_5)+V_1V_3\sin(A_6-A_7)+V_3V_5\sin(A_8-A_1)=0. \tag{8.7}$$

(8.5) 式、(8.6) 式、(8.7) 式俱爲圓內接八邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。

F.4 在圖 16 與圖 17 中, 見到八個頂角的各頂角弦長: 頂角 A_1 的頂角弦長爲 d_{82}, A_2 的頂角弦長爲 d_{13}, A_3 對應 d_{24}, A_4 對應 d_{35}, A_5 對應 d_{46}, A_6 對應 d_{57}, A_7 對應 d_{68}, A_8 對應 d_{71}, 應用圓周角的正弦定理代入 (8.5) 式中, 化簡, 消除分母, 得

$$\begin{aligned}&d_{82}V_2V_3V_4V_5V_6V_7+d_{24}V_4V_5V_6V_7V_8V_1+d_{46}V_6V_7V_8V_1V_2V_3+d_{68}V_8V_1V_2V_3V_4V_5\\&=d_{13}V_3V_4V_5V_6V_7V_8+d_{35}V_5V_6V_7V_8V_1V_2+d_{57}V_7V_8V_1V_2V_3V_4+d_{71}V_1V_2V_3V_4V_5V_6.\end{aligned} \tag{8.8}$$

(8.8) 式即爲圓內接八邊形各邊長與頂角弦長關係方程式! 此 (8.8) 式的各項結構也如同 (6.8) 式一樣都具高度規律性! 尋求各項規律性的乘積操作也完全相同。

G. 接著, 省略繼續展示與證明 $n=9,10,11,12,\ldots$ 等等的各多邊形類型情形, 直到以下具有代表性身份的第 n 邊形的一般化圖形出現。

$\vdots$

H. 圓內接奇數邊數多邊形各邊長與頂角關係方程式

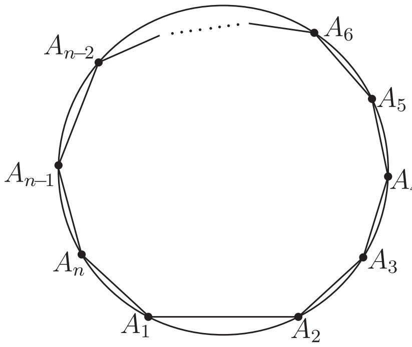

圖18

H.1 任給一個圓內接奇數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $n=2k+3$, k 爲正整數。見圖 18, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 n 組同類型:

第 i 組:
$$V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1},\quad 1\le i\le n,\ V_0=V_n,\ A_{n+1}=A_1,\ V_{n+1}=V_1, \tag{9.1}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}}=\frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i}-\frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}},\quad 1\le i\le n,\ V_0=V_n,\ A_{n+1}=A_1,\ V_{n+1}=V_1. \tag{9.2}$$

將此同類型 (9.2) 式的 n 組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}}=0 \quad \text{且} \quad V_0=V_n,\ A_{n+1}=A_1,\ V_{n+1}=V_1 \tag{9.3}$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{m=2}^{n-2}V_{i+m}\Big)V_i\sin(A_i-A_{i+1})=0\ \text{且}\ A_{n+1}=A_1, V_{n+j}=V_j, 1\le j\le n-2. \tag{9.4}$$

此 (9.3) 式、(9.4) 式皆爲圓內接奇數邊數 n 邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。此 (9.4) 式的各項結構都具規律性: 即每一項是以 $V_i\sin(A_i-A_{i+1})$ 形成的 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘再與 $V_i\sin(A_i-A_{i+1})$ 乘後的連乘積。例如; 第 1 組的 $V_1\sin(A_1-A_2)$, 其 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘爲 $V_3V_4V_5\cdots V_{n-2}V_{n-1}$, 所以組合起來的此規律項必定爲 $V_3V_4V_5\cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1\sin(A_1-A_2)$ 。第 5 組的 $V_5\sin(A_5-A_6)$, 其 SASAS 圖樣外的所有邊長依序相乘爲 $V_7V_8\cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1V_2V_3$, 所以組合起來的此規律項必定爲 $V_7V_8\cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1V_2V_3V_5\sin(A_5-A_6)$。而其餘各項皆可依此規律操作法而陸續一一被圓滿的尋獲。

H.2 圓內接奇數邊數多邊形正弦定理

由前述圓內接五邊形與七邊形證出的正弦定理知兩者的比例常數爲 $-2R$、$2R$, 明顯不同, 所以圓內接奇數邊數 n 邊形也需要分拆成 2 種相異的類型分別論述。

第1型：$n=4k-1$ 型, 此類型爲三角形、七邊形、十一邊形、十五邊形、$\cdots$ 等圓內接奇數邊數多邊形圖形的集合, 如下圖 19 與圖 20 的結構。

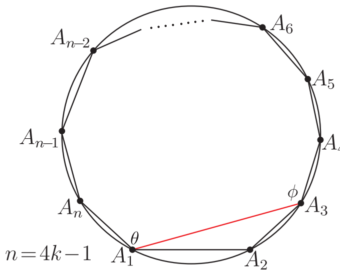

圖 19

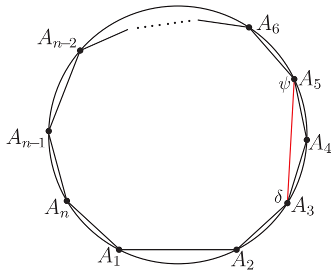

圖 20

(i) 圖 19, 連接頂點 A_1 與 A_3 形成直線段, 將 $n=4k-1$ 邊形分割成三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $4k-2$ 邊形 $A_1A_3A_4A_5\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$。由 $\triangle A_1A_2A_3$ 的正弦定理得：

$$\frac{V_1}{\sin(A_3-\phi)}=\frac{V_2}{\sin(A_1-\theta)}=2R,$$

對 $4k-2$ 邊形 $A_1A_3A_4A_5\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 應用引理 3 得 $\phi+A_5+A_7+A_9+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n=\theta+A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}=(2k-2)\pi$, 再應用引理 2, 演算得 $\sin(A_3-\phi)=\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)$ 及 $\sin(A_1-\theta)=\sin(A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)$, 代入等式中代換運算後, 得：

$$\begin{aligned}&\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)}\\&=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)}=2R.\end{aligned}$$

(ii) 同理, 見圖 20, 連接頂點 A_3 與 A_5 形成直線段, 分割出 $\triangle A_3A_4A_5$ 的正弦定理得：

$$\frac{V_3}{\sin(A_5-\psi)}=\frac{V_4}{\sin(A_3-\delta)}=2R,$$

對 $4k-2$ 邊形 $A_1A_2A_3A_5\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 應用引理 3 得 $\psi+A_7+A_9+A_{11}+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n+A_2=\delta+A_6+A_8+A_{10}+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1=$

$(2k-2)\pi$, 再應用引理 2, 演算代換後, 得：

$$\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+A_9+\cdots+A_{n-2}+A_n+A_2)} = \frac{V_4}{\sin(A_6+A_8+A_{10}+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1+A_3)} = 2R.$$

(iii) 同理, 可再證明出分子爲 V_5、V_6、V_7、$\cdots$、V_{n-1}、V_n 的 $n-4$ 項, 然後將所得到的 n 項全部排列出, 如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)}\\
&=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+\cdots+A_{n-2}+A_n+A_2)}\\
&=\frac{V_4}{\sin(A_6+A_8+A_{10}+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1+A_3)}=\cdots\\
&=\frac{V_{100}}{\sin(A_{102}+A_{104}+A_{106}+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1+A_3+\cdots+A_{97}+A_{99})}\\
&=\frac{V_{101}}{\sin(A_{103}+A_{105}+A_{107}+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n+A_2+A_4+\cdots+A_{98}+A_{100})}\\
&=\cdots=\frac{V_{n-1}}{\sin(A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-6}+A_{n-4}+A_{n-2})}\\
&=\frac{V_n}{\sin(A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1})}\\
&=2R=(-1)^{\frac{(4k-1)+1}{2}}\cdot 2R=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2R. \qquad (9.5)
\end{aligned}$$

此 (9.5) 式即爲證明出的圓內接奇數邊數 $n=4k-1$ 邊形正弦定理。綜觀上述第 1 型 (i) (ii) (iii) 系列完整演算證明流程所得到的比例常數爲正值 $2R$。

(9.5) 式正弦定理明顯展示出其美妙工整完全對稱性的方程式內涵型態!

第 2 型: $n=4k+1$ 型, 此類型爲五邊形、九邊形、十三邊形、十七邊形、$\cdots$ 等圓內接奇數邊數多邊形圖形的集合, 如下圖 21 的左、右圖例形樣結構。

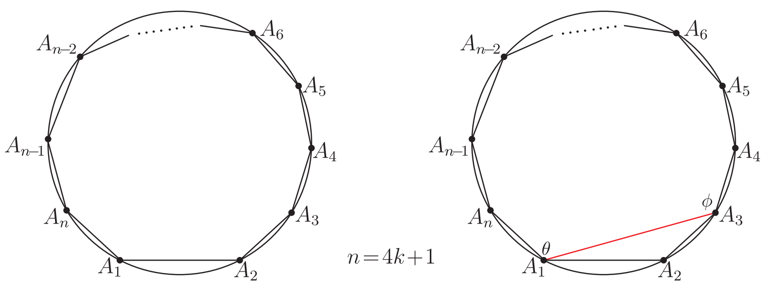

圖 21

(i) 圖 21, 連接頂點 A_1 與 A_3 形成直線段, 將 $n=4k+1$ 邊形分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 與 $4k$ 邊形 $A_1A_3A_4A_5\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$。由 $A_1A_2A_3$ 的正弦定理得:

$$\frac{V_1}{\sin(A_3-\phi)}=\frac{V_2}{\sin(A_1-\theta)}=2R,$$

對 $4k$ 邊形 $A_1A_3A_4A_5\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 應用引理 3 得 $\phi+A_5+A_7+A_9+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n=\theta+A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}=(2k-1)\pi$, 再應用引理2, 演算得 $\sin(A_3-\phi)=-\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)$ 及 $\sin(A_1-\theta)=-\sin(A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)$, 代入等式中代換運算後, 得：

$$\begin{aligned}&\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)}\\&\quad=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)}=-2R.\end{aligned}$$

(ii) 同理, 依序再證明出分子爲 V_3、V_4、V_5、$\cdots$、V_t、$\cdots$、V_{n-1}、V_n 的 $n-2$ 項, 然後將得到的 n 項全部排列於下:

$$\begin{aligned}&\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2}+A_n)}\\&=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_8+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)}\\&=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+A_9\cdots+A_{n-2}+A_n+A_2)}\\&=\frac{V_4}{\sin(A_6+A_8+A_{10}+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1+A_3)}=\cdots\\&=\frac{V_t}{\sin(A_{t+2}+A_{t+4}+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1+A_3+\cdots+A_{t-5}+A_{t-3}+A_{t-1})}\\&=\cdots=\frac{V_{n-1}}{\sin(A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-6}+A_{n-4}+A_{n-2})}\\&=\frac{V_n}{\sin(A_2+A_4+A_6+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1})}\\&=-2R=(-1)^{\frac{(4k+1)+1}{2}}\cdot 2R=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2R,\quad V_t=\overline{A_tA_{t+1}}.\end{aligned}\tag{9.6}$$

此 (9.6) 式即爲證明出的圓內接奇數邊數 $n=4k+1$ 邊形正弦定理。綜觀上述第 2 型 (i)(ii) 系列完整演算證明流程所得到的比例常數爲負值。

(9.6) 式正弦定理也明顯展示出其美妙工整完全對稱性的方程式內涵型態!

※ 現在將 (9.5) 式與 (9.6) 式兩式一起合併成完整統合的一般化代表式, 如下:

$$\frac{V_t}{\sin\left[\sum_{j=1}^{\frac{1}{4}[2(n-t)-1-(-1)^t]} A_{t+2j}+\sum_{j=1}^{\frac{1}{4}[2t-1+(-1)^t]} A_{2j-\frac{1+(-1)^t}{2}}\right]}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2R; \quad (9.7)$$

此處 $1\le t\le n=2k+1$, $t,j,k\in N$ (正整數), $\overline{A_tA_{t+1}}=V_t$ 是第 t 邊邊長, 且須遵守下列規定關係式:

$$\sum_{j=1}^{0} A_{t+2j}=0,\qquad \sum_{j=1}^{0} A_{2j}=0,\qquad \sum_{j=1}^{0} A_{2j-1}=0.$$

此 (9.7) 式即爲證明出的圓內接奇數邊數 $n=2k+1$ 邊形完整一般化正弦定理。

I. 圓內接偶數邊數 $n=2k+2$ 邊形各邊長與頂角關係方程式

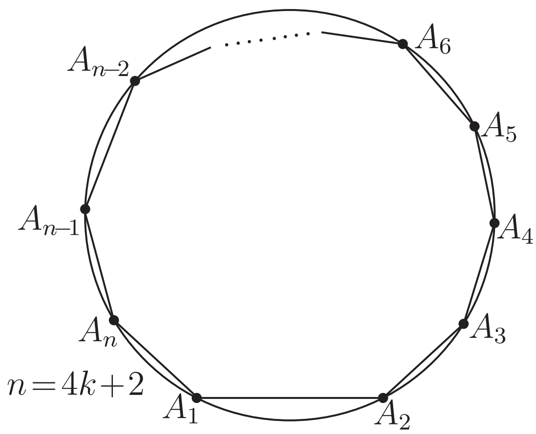

圖22

I.1 任給一個圓內接偶數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $n=2k+2$, k 爲正整數。見圖 22, 由 SASAS 定理可推求出下 2 式的 n 組同類型; 其

第 i 組: $$V_i\sin(A_i-A_{i+1})=V_{i+1}\sin A_i-V_{i-1}\sin A_{i+1},$$
$$1\le i\le n,\ V_0=V_n,\ A_{n+1}=A_1,\ V_{n+1}=V_1, \quad (10.1)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\sin(A_i-A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}}=\frac{\sin A_i}{V_{i-1}V_i}-\frac{\sin A_{i+1}}{V_iV_{i+1}},$$
$$1\le i\le n,\ V_0=V_n,\ A_{n+1}=A_1,\ V_{n+1}=V_1. \quad (10.2)$$

將此同類型 (10.2) 式的組以對應類型一起全數同時相加, 即得下列 2 式;

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(A_i - A_{i+1})}{V_{i-1}V_{i+1}} = 0 \quad 且 \quad V_0 = V_n,\ A_{n+1} = A_1,\ V_{n+1} = V_1 \tag{10.3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{m=2}^{n-2} V_{i+m}\Big)V_i \sin(A_i - A_{i+1}) = 0 \text{ 且 } A_{n+1} = A_1, V_{n+j} = V_j, 1 \le j \le n-2. \tag{10.4}$$

(10.3) 式、(10.4) 式皆爲圓內接偶數邊數 n 邊形各邊長與頂角關係正弦型方程式。此 (10.4) 式的各項結構都具規律性; 即每一項是以 $V_i \sin(A_i - A_{i+1})$ 形成的 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘再與 $V_i \sin(A_i - A_{i+1})$ 乘後的連乘積。例如; 第 1 組的 $V_1 \sin(A_1 - A_2)$, 其 SASAS 圖樣之外的所有邊長依序相乘爲 $V_3V_4V_5 \cdots V_{n-2}V_{n-1}$, 所以組合起來的此規律項必定爲 $V_3V_4V_5 \cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1 \sin(A_1 - A_2)$。第 5 組的 $V_5 \sin(A_5 - A_6)$, 其 SASAS 圖樣外的所有邊長依序相乘爲 $V_7V_8 \cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1V_2V_3$, 所以組合起來的此規律項必定爲 $V_7V_8 \cdots V_{n-2}V_{n-1}V_1V_2V_3V_5 \sin(A_5 - A_6)$。而其餘各項皆可依此規律操作法而逐一被完整地尋獲。

I.2 圓內接偶數邊數 n 邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式 $n = 2k + 2$

現在要應用到“在整個自然數範圍內都成立的數學歸納法” 來證明下列方程式必正確成立:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin A_1}{V_nV_1} + \frac{\sin A_3}{V_2V_3} + \frac{\sin A_5}{V_4V_5} + \cdots + \frac{\sin A_{n-5}}{V_{n-6}V_{n-5}} + \frac{\sin A_{n-3}}{V_{n-4}V_{n-3}} + \frac{\sin A_{n-1}}{V_{n-2}V_{n-1}}\\ &\quad = \frac{\sin A_2}{V_1V_2} + \frac{\sin A_4}{V_3V_4} + \frac{\sin A_6}{V_5V_6} + \cdots + \frac{\sin A_{n-4}}{V_{n-5}V_{n-4}} + \frac{\sin A_{n-2}}{V_{n-3}V_{n-2}} + \frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n}.\end{aligned} \tag{10.5}$$

數學歸納法證明: 圓內接偶數邊數 n 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $n = 2k + 2$,

(i) 當 $n = 4$、6、8, 前述之 B 與 D 及 F 這三部份各自系列申論內文中所專屬的 (4.11) 式、(6.5) 式、(8.5) 式等方程式推演過程皆已證明完全成立。

(ii) 接下來, 令 $n = 2k + 2 \ge 10$ 時, k 爲正整數, 下列方程式成立:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin A_1}{V_{2k+2}V_1} + \frac{\sin A_3}{V_2V_3} + \cdots + \frac{\sin A_{2k-3}}{V_{2k-4}V_{2k-3}} + \frac{\sin A_{2k-1}}{V_{2k-2}V_{2k-1}} + \frac{\sin A_{2k+1}}{V_{2k}V_{2k+1}}\\ &\quad = \frac{\sin A_2}{V_1V_2} + \frac{\sin A_4}{V_3V_4} + \cdots + \frac{\sin A_{2k-2}}{V_{2k-3}V_{2k-2}} + \frac{\sin A_{2k}}{V_{2k-1}V_{2k}} + \frac{\sin A_{2k+2}}{V_{2k+1}V_{2k+2}}.\end{aligned} \tag{10.I1}$$

(iii) 則當 $n = 2k+4$ 時, 見下圖 23 連接兩頂點 A_1 與 A_{2k+2} 成一直線段將此多邊形分割成四邊形 $A_1A_{2k+2}A_{2k+3}A_{2k+4}$ 與另一個 $2k+2$ 邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{2k}A_{2k+1}A_{2k+2}$。直線段又將頂角 A_1 分割出 2 個分角, 使 $A_1 = \theta + \phi$。同時又將另一頂角 A_{2k+2} 分

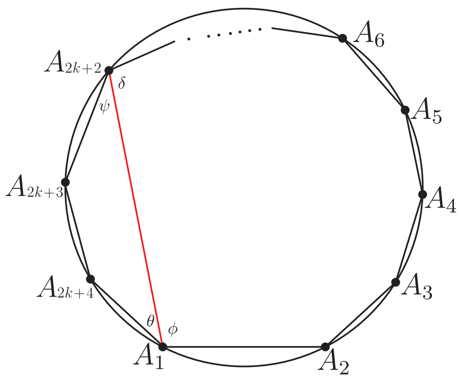

圖 23

割出 2 個分角, 使 $A_{2k+2}=\psi+\delta$。對四邊形 $A_1A_{2k+2}A_{2k+3}A_{2k+4}$ 言, 可得下式:

$$\text{令直線段 } d=\overline{A_1A_{2k+2}} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{V_{2k+4}d}+\frac{\sin A_{2k+3}}{V_{2k+2}V_{2k+3}}=\frac{\sin\psi}{dV_{2k+2}}+\frac{\sin A_{2k+4}}{V_{2k+3}V_{2k+4}}. \quad (10.\text{I}2)$$

又對另一個 $2k+2$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2k+1}A_{2k+2}$ 言, 仿效 (10.I1) 式可得下列方程式:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\phi}{dV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\cdots+\frac{\sin A_{2k-3}}{V_{2k-4}V_{2k-3}}+\frac{\sin A_{2k-1}}{V_{2k-2}V_{2k-1}}+\frac{\sin A_{2k+1}}{V_{2k}V_{2k+1}}\\ &\quad=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\cdots+\frac{\sin A_{2k-2}}{V_{2k-3}V_{2k-2}}+\frac{\sin A_{2k}}{V_{2k-1}V_{2k}}+\frac{\sin\delta}{V_{2k+1}d}.\end{aligned} \quad (10.\text{I}3)$$

再接著, 將 (10.I2) 式與 (10.I3) 式兩式相加, 即得下式 (10.I4) 式;

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\theta}{V_{2k+4}d}+\frac{\sin A_{2k+3}}{V_{2k+2}V_{2k+3}}+\frac{\sin\phi}{dV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\cdots+\frac{\sin A_{2k-3}}{V_{2k-4}V_{2k-3}}+\frac{\sin A_{2k-1}}{V_{2k-2}V_{2k-1}}+\frac{\sin A_{2k+1}}{V_{2k}V_{2k+1}}\\ &=\frac{\sin\psi}{dV_{2k+2}}+\frac{\sin A_{2k+4}}{V_{2k+3}V_{2k+4}}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\cdots\frac{\sin A_{2k-2}}{V_{2k-3}V_{2k-2}}+\frac{\sin A_{2k}}{V_{2k-1}V_{2k}}+\frac{\sin\delta}{V_{2k+1}d}.\end{aligned} \quad (10.\text{I}4)$$

見下圖 24, 令 $d_{2(2k+2)}=\overline{A_2A_{2k+2}}$, $d_{2(2k+4)}=\overline{A_2A_{2k+4}}$, $d_{(2k+2)(2k+4)}=\overline{A_{2k+2}A_{2k+4}}$,

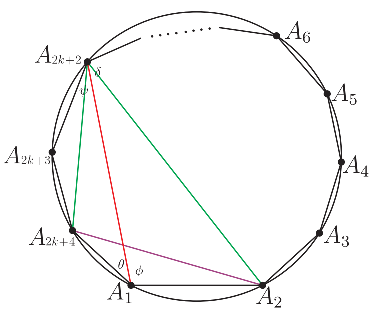

圖 24

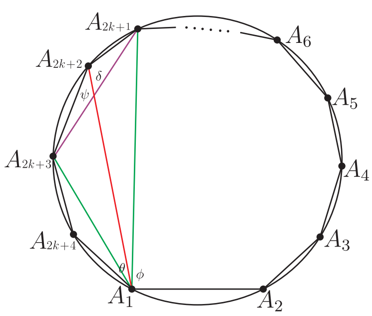

圖 25

對四邊形 $A_1A_2A_{2k+2}A_{2k+4}$ 言, 應用引理 5 圓內接四邊形托勒密定理知, 必有下式:

$d\cdot d_{2(2k+4)}=V_{2k+4}d_{2(2k+2)}+V_1d_{(2k+2)(2k+4)}$, 再應用引理 4 圓周角的正弦定理, 得

$$d\sin A_1=V_{2k+4}\sin\phi+V_1\sin\theta\Rightarrow\frac{\sin A_1}{V_{2k+4}V_1}=\frac{\sin\theta}{V_{2k+4}d}+\frac{\sin\phi}{dV_1}.\qquad(10.\text{I}5)$$

又見圖 25, 令 $d_{1(2k+1)}=\overline{A_1A_{2k+1}}$, $d_{1(2k+3)}=\overline{A_1A_{2k+3}}$, $d_{(2k+1)(2k+3)}=\overline{A_{2k+1}A_{2k+3}}$, 對四邊形 $A_1A_{2k+1}A_{2k+2}A_{2k+3}$ 言, 仿效對四邊形 $A_1A_2A_{2k+2}A_{2k+4}$ 的操作法, 得下式; $d\cdot d_{(2k+1)(2k+3)}=V_{2k+2}d_{1(2k+1)}+V_{2k+1}d_{1(2k+3)}$, 再應用引理4圓周角的正弦定理, 得

$$d\sin A_{2k+2}=V_{2k+2}\sin\delta+V_{2k+1}\sin\psi\Rightarrow\frac{\sin A_{2k+2}}{V_{2k+1}V_{2k+2}}=\frac{\sin\delta}{V_{2k+1}d}+\frac{\sin\psi}{dV_{2k+2}}.\quad(10.\text{I}6)$$

現在將 (10.I5) 式與 (10.I6) 式的結果同步代入 (10.I4) 式中, 再移項整理後, 得下式:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin A_1}{V_{2k+4}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots+\frac{\sin A_{2k-1}}{V_{2k-2}V_{2k-1}}+\frac{\sin A_{2k+1}}{V_{2k}V_{2k+1}}+\frac{\sin A_{2k+3}}{V_{2k+2}V_{2k+3}}\\&=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots+\frac{\sin A_{2k}}{V_{2k-1}V_{2k}}+\frac{\sin A_{2k+2}}{V_{2k+1}V_{2k+2}}+\frac{\sin A_{2k+4}}{V_{2k+3}V_{2k+4}}.\quad(10.6)\end{aligned}$$

以上 $n=2k+4$ 時 (10.6) 式也證明出此整列方程式完全精準正確成立; 同時, 由 $n=2k+4=2(k+1)+2$, 再從上述 (i)(ii)(iii) 演繹推理驗證成立的過程即證明出對所有的正偶數 $n=2k+2\geq 4$, 方程式 (10.5) 式必定恆成立且型態工整完美對稱。(10.5) 式即爲圓內接偶數邊數 $n=2k+2$ 邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。

I.3 仿效圓內接六邊形之 D.3 步驟, 移動 (10.5) 式等號兩側的項式再整合成下式

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_nV_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\cdots+\frac{\sin(A_{n-3}-A_{n-2})}{V_{n-4}V_{n-2}}+\frac{\sin(A_{n-1}-A_n)}{V_{n-2}V_n}=0,$$

及

$$\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\cdots+\frac{\sin(A_{n-2}-A_{n-1})}{V_{n-3}V_{n-1}}+\frac{\sin(A_n-A_1)}{V_{n-1}V_1}=0.$$

將此兩式分別依序乘以 $V_2V_4\cdots V_{n-4}V_{n-2}V_n$ 及 $V_1V_3\cdots V_{n-5}V_{n-3}V_{n-1}$, 再整理, 得

$$\begin{aligned}&V_4V_6V_8\cdots V_{n-6}V_{n-4}V_{n-2}\sin(A_1-A_2)+V_6V_8V_{10}\cdots V_{n-4}V_{n-2}V_n\sin(A_3-A_4)+\cdots\\&+V_nV_2V_4\cdots V_{n-8}V_{n-6}\sin(A_5-A_6)+V_2V_4V_6\cdots V_{n-6}V_{n-4}\sin(A_7-A_8)=0,\ (10.7)\end{aligned}$$

及同型態的另一式

$$\begin{aligned}&V_5V_7V_9\cdots V_{n-5}V_{n-3}V_{n-1}\sin(A_2-A_3)+V_7V_9V_{11}\cdots V_{n-3}V_{n-1}V_1\sin(A_4-A_5)+\cdots\\&+V_1V_3V_5\cdots V_{n-7}V_{n-5}\sin(A_6-A_7)+V_3V_5V_7\cdots V_{n-5}V_{n-3}\sin(A_8-A_1)=0.\ (10.8)\end{aligned}$$

(10.5) 式、(10.7) 式、(10.8) 式俱爲圓內接偶數邊數 $n=2k+2$ 邊形各邊長與頂角正弦值關係方程式。

I.4 下圖 26 中, 見到 n 個頂角的各頂角弦長示意圖; 頂角 A_1 的頂角弦長爲 d_{n2},

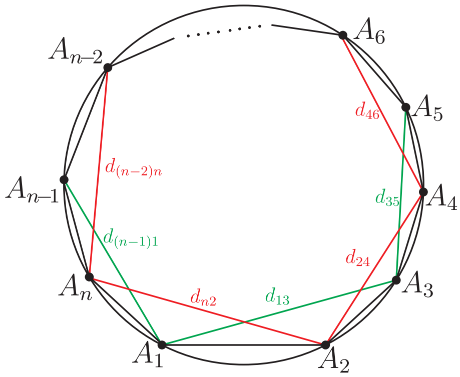

圖 26

A_2 的頂角弦長爲 d_{13}, A_3 對應 d_{24}, A_4 對應 d_{35}, A_5 對應 d_{46}, $\cdots$, 頂角 A_{n-1} 的頂角弦長爲 $d_{(n-2)n}$, A_n 的頂角弦長爲 $d_{(n-1)1}$, 應用圓周角的正弦定理代入 (10.5) 式中, 化簡, 消除分母, 得

$$\begin{aligned}
& d_{n2}V_2V_3V_4\cdots V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1} + d_{24}V_4V_5V_6\cdots V_{n-1}V_nV_1 + d_{46}V_6V_7V_8\cdots V_{n-1}V_nV_1V_2V_3 \\
& \quad + \cdots + d_{(n-6)(n-4)}V_{n-4}V_{n-3}\cdots V_nV_1V_2\cdots V_{n-9}V_{n-8}V_{n-7} \\
& \quad + d_{(n-4)(n-2)}V_{n-2}V_{n-1}V_nV_1V_2\cdots V_{n-7}V_{n-6}V_{n-5} + d_{(n-2)n}V_nV_1V_2\cdots V_{n-5}V_{n-4}V_{n-3} \\
& = d_{13}V_3V_4V_5\cdots V_{n-2}V_{n-1}V_n + d_{35}V_5V_6V_7\cdots V_{n-1}V_nV_1V_2 \\
& \quad + d_{57}V_7V_8V_9\cdots V_{n-1}V_nV_1V_2V_3V_4 + \cdots + d_{(n-5)(n-3)}V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1}V_nV_1V_2\cdots V_{n-7}V_{n-6} \\
& \quad + d_{(n-3)(n-1)}V_{n-1}V_nV_1V_2\cdots V_{n-6}V_{n-5}V_{n-4} + d_{(n-1)1}V_1V_2V_3\cdots V_{n-4}V_{n-3}V_{n-2}. \qquad (10.9)
\end{aligned}$$

(10.9) 式即爲圓內接偶數邊數 $n = 2k + 2$邊形各邊長與頂角弦長關係方程式! 此 (10.9) 式的各項結構也如同 (6.8) 式、(8.8) 式一樣都具高度規律性! 同樣地, 其尋求各項規律性的乘積操作方法也和 (6.8) 式的解說內容完全相同。

參、結論

1. 終於輪到要論述標題主文： SASAS 正弦型方程式對比三角形正弦定理; 歷經詳盡思考演練, 作者發現應用三角形正弦定理也能推展證明出 SASAS 定理, 請看圖 27 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 連接兩頂點 A_2 與 A_4 形成直線段 $\overline{A_2A_4} = d$, 對三角形 $\triangle A_2A_3A_4$ 言, 由三角形正弦定理知

$$\frac{d}{\sin A_3} = \frac{V_2}{\sin(A_4-\theta)} = \frac{V_3}{\sin(A_2-\phi)},$$

$$\text{且}\quad V_1\cos\phi + V_4\cos\theta = d \quad \text{與} \quad V_1\sin\phi = V_4\sin\theta,$$

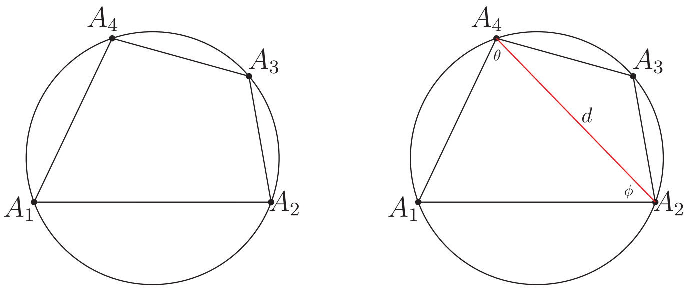

圖 27

接著開始推導演算,

$$
\begin{aligned}
& V_2 \sin A_3 = d\sin(A_4-\theta) = (V_1\cos\phi + V_4\cos\theta)(\sin A_4\cos\theta - \cos A_4 \sin\theta) \\
= \; & V_1 \sin A_4 \cos\phi\cos\theta - V_1\cos A_4\cos\phi\sin\theta + V_4\sin A_4\cos^2\theta \\
& -V_4\cos A_4\cos\theta\sin\theta \\
= \; & V_1 \sin A_4 \cos\phi\cos\theta - V_1\cos A_4\cos\phi\sin\theta + V_4\sin A_4 - V_4\sin A_4\sin^2\theta \\
& -V_4\cos A_4\cos\theta\sin\theta \\
= \; & V_1 \sin A_4 \cos\phi\cos\theta - V_1\cos A_4\cos\phi\sin\theta + V_4\sin A_4 - V_1\sin A_4\sin\theta\sin\phi \\
& -V_1\cos A_4\cos\theta\sin\phi \\
= \; & V_1\sin A_4\cos(\phi+\theta) - V_1\cos A_4\sin(\phi+\theta) + V_4\sin A_4 \\
= \; & V_1\sin A_4\cos(\pi-A_1) - V_1\cos A_4\sin(\pi-A_1) + V_4\sin A_4 \\
= \; & -V_1\sin A_4\cos A_1 - V_1\cos A_4\sin A_1 + V_4\sin A_4 = -V_1\sin(A_4+A_1) + V_4\sin A_4 \\
\Rightarrow \quad & V_2\sin A_3 = -V_1\sin(A_4+A_1) + V_4\sin A_4 \\
\Rightarrow \quad & V_2\sin(\pi-A_1) = -V_1\sin(\pi-A_2+A_1) + V_4\sin(\pi-A_2) \\
\Rightarrow \quad & V_2\sin A_1 = V_1\sin(A_1-A_2) + V_4\sin(A_2) \\
\Rightarrow \quad & V_1\sin(A_1-A_2) = V_2\sin A_1 - V_4\sin A_2.
\end{aligned}
$$

SASAS定理證明完成。同樣地, 應用 SASAS 定理也能逆向推展證明出三角形正弦定理! 所以, 對比這兩定理實已關係緊密, 相輔相成, 可資應用在衆多圓內接多邊形領域的情況中, 產生出更多方效能, 共享競合殊榮。

2. 總結以上精實完整的敘述證明後, 知悉: 正弦定理僅在圓內接奇數邊數多邊形中獨有。相對地, SASAS 定理較具有普遍性, 完全適合任意圓內接多邊形, 無論是奇數邊形或是偶數邊形都能找到此邊角正弦型一般化方程式。此方程式在邊長與內角的分佈次序上呈現特定的規律分佈。最棒的是被證明出的所有方程式都呈現出規律對稱性！ 這樣的特徵使得在證明

及敘述表達這些方程式內涵時即能體驗出堅定明確的認同感。

3. 本文研究內容中所證明尋獲的各類不同數學型態的邊角正弦方程式、頂角弦長關係方程式, 皆能完美地描述出圓內接多邊形的性質, 並極其完整的將其一般化公式詮釋表達出來, 有趣的是比較奇數邊數形與偶數邊數形所得之方程式的結果各有異同; 偶數邊數形公式較多且兩者都有唯一完全相同的 SASAS 定理引領得的方程式。偶數邊數形與奇數邊數形之差異性質在本文的理論推證過程中至爲明顯; 兩者中完全相異的方程式皆各有其奧妙獨特之處。

4. 內心裡總是深深覺得, 或許圓內接多邊形, 及平面凸多邊形中還有許多不同於本文所提出的邊角正弦型方程式, 以及邊角餘弦型方程式。像圓內接 n 邊形的面積, 其公式內容必與被選定的邊長及頂角有關。無論如何那許多未知的關係式皆需要大家共同來探索發掘, 希望本文的提出, 能得到大衆熱烈的迴響。

参考文獻

1. 李輝濱。圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理。數學傳播季刊, 37(4), 84-93, 2013。
2. 李輝濱。預測與驗證平面凸多邊形面積公式。科學教育月刊, 398、399期, 2017年5、6月出版發行。
3. 蔡聰明。數學拾貝—星空燦爛的數學。三民書局, 2010。
4. 黃武雄。中西數學簡史。人間文化事業公司, 1980。
5. 世部貞市郎。幾何學辭典。九章出版社, 1988。
6. 林聰源。數學史—古典篇。凡異出版社, 1995。
7. 項武義。基礎幾何學。五南圖書出版公司, 2006。
8. 項武義。基礎分析學。五南圖書出版公司, 2008。
9. E.W. Hobson, *A treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Dover, 1957.
10. Z.A. Melzek, *Invitation to Geometry*, John Wiley and Sons, 1983.

—本文作者爲嘉義市私立輔仁中學退休教師—