數學傳播 47卷1期, pp. 45-50

2^n 在分母的級數收斂性質補遺

張進安

拙作『2^n 在分母的級數收斂性質』刊登在數學傳播 108 年 9 月第 171 期。校稿時, 本人對當分子是盧卡斯數列的結果:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b)}{2^n}=a+b,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b,c)}{2^n}=a+b+c,\ 甚至\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b,c,d)}{2^n}=a+b+c+d,$$

感到十分滿意, 而且也容易往更高階的盧卡斯數列依此類推一番。但是對於定義在自然數 N 的多項式函數, 除了 $f(n)=an+b$ 時, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(n)}{2^n}=2a+b$ 可以把 $a+b$ 看成首項, a 看成公差, 得到 $f(n)=(a+b)+a(n-1)=a_1+d(n-1)$, 再得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(n)}{2^n}=a_1+d$ 還算簡潔之外, 對於二次以上的函數如 $f(n)=an^2+bn+c$ 時, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(n)}{2^n}=6a+2b+c$; $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$ 時, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(n)}{2^n}=26a+6b+2c+d$; 雖可逐步推廣到更高次的函數, 結果也很明確。但其中對 n, n^2, n^3 項的係數, 必須各乘以一個愈來愈大的常數 2, 6, 26。如果讀者有興趣算一下, n 的 4 次方的常數是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{2^n}=150$, 就已經不太漂亮了, 一定會感覺不滿意。而且1, 2, 6, 26, 150 的數列, 似乎又找不到遞增的規則。或許隨著冪次的提高, 這個常數的變大是無可避免的, 只是希望能找到一個由數列生成元就能直接表達的收斂公式, 如果能像各階盧卡斯數列那樣, 都能表示成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{L_n(a,b,c,\ldots,k)}{2^n}=a+b+c+\cdots+k$, 就更能體現數學的簡潔之美了。

幾經思考, 終於在無意間找到一個切入點, 那是利用『定義在自然數 N 的 r 次方函數就是一個 r 階差數列』, 而 r 階差數列需要 $r+1$ 個生成元, 正和 r 次函數是由 $r+1$ 個係數決定一樣。筆者在民國 73 年第二十四屆全國中小學科學展覽中, 曾以『階差數列的代數結構及級數和』一題, 獲得教師組第三名, 時隔三十多年, 如今再用這個結果, 搭配『2^n 在分母的級數收斂性質』竟然天衣無縫。家有敝帚享之千金, 不揣淺陋的提出來和數學同好共享。

當年的研究, 我是這樣定義和表示一個 r 階數列的: 設數列 $\{a_n\}$ 經過 r 次降階得到常

數數列, 此常數即 r 階公差, 並以 d_i 表示第 i 次降階數列之首項, 再令 $d_0=a_1$, 則 r 階差數列可表示爲: $\{a_n\}=[a_1,d_1,d_2,\ldots,d_r]=[d_0,d_1,d_2,\ldots,d_r]$。舉例來說, 自然數的平方是二次函數, 也是二階等差數列, 降階如下:

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & \cdots\ n^2 \\
 & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & & \\
 & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & & \cdots \\
 & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & & & \\
 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & \cdots\ \text{二階公差等於 } 2
\end{array}
$$

顯然, $a_1=d_0=1$, $d_1=3$, $d_2=2$。所以把 $\{a_n\}=\{n^2\}$ 記爲 $\{a_n\}=[1,3,2]$, 這時候奇蹟出現了, 不知道你是否已經發現, 原來我們計算半天的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=6$, 正好就是 $[1,3,2]$ 這三個生成元的和。回頭再檢視等差數列的降階:

$$
\begin{array}{cccccccccl}
a & & a+d & & a+2d & & a+3d & & a+4d & \cdots\ a+(n-1)d \\
 & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \diagdown\!\diagup & & \\
 & d & & d & & d & & d & & \cdots\ \text{一階公差}
\end{array}
$$

所以 $\{a_n\}=\{f(n)\}=\{a+(n-1)d\}=[a,d]$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=a+d$ 再次成立。如果這不是巧合再巧合, 我們就可以大膽的預測這個漂亮的結論: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[a,b]}{2^n}=a+b$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[a,b,c]}{2^n}=a+b+c$。這不就和把盧卡斯數列放在分子時, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{L_n(a,b)}{2^n}=a+b$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{L_n(a,b,c)}{2^n}=a+b+c$, 完全一樣了嗎?

以 $[d_0,d_1,d_2,\ldots,d_r]$ 定義 r 階等差數列 $\{a_n\}$, 可以得到三個重要的定理公式, 而這三個公式, 以數學歸納法和巴斯卡三角公式不難證明都是等價的。

1. 降階公式：$d_i=\sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^j a_{i+1-j}C_j^i$,　　　(由 a_n 求 d_i)。
2. 生成公式：$a_n=\sum\limits_{j=0}^{r}d_jC_j^{n-1}$,　　　(由 d_i 求 a_n)。
3. 級數和公式: $S_n=\sum\limits_{j=0}^{r}d_jC_{j+1}^{n}$,　　　(由 d_i 求 S_n)。

爲使這些公式通用, 令 $C_0^0=1$, 且當 $n<r$ 時, $C_r^n=0$。如此一來, 請注意比較 S_n 和 a_n 的公式, 只有在組合運算符號 C 的上下標有一點點差別, 即 S_n 比 a_n 的上下標同時多 1。兩個公式長得像孿生兄弟一樣, 是這個研究的一大亮點。現在就用這個生成公式來證明

當 $\{a_n\}=[a,b,c]$ 時, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[a,b,c]}{2^n}=a+b+c$。

證明: 首先以三個生成元作爲各降階數列之首項, 將數列展開:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a & & a{+}b & & a{+}2b & & a{+}3b{+}3c & & a{+}4b{+}6c & & \cdots\ aC_0^{n-1}+bC_1^{n-1}+cC_2^{n-1} \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
& b & & b{+}c & & b{+}2c & & b{+}3c & & & \cdots \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & & & \cdots\ \text{二階公差爲常數} \\
& & c & & c & & c & & & &
\end{array}
$$

因爲

$$
\begin{aligned}
a_n =& a\cdot C_0^{n-1}+b\cdot C_1^{n-1}+c\cdot C_2^{n-1}\\
=& a+b(n-1)+c\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\\
=& \frac{c}{2}n^2+\frac{2b-3c}{2}n+a-b+c,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} =& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[a,b,c]}{2^n}=\frac{c}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}+\frac{2b-3c}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a-b+c}{2^n}\\
=& \frac{c}{2}\cdot 6+\frac{2b-3c}{2}\cdot 2+a-b+c\\
=& a+b+c.
\end{aligned}
$$

得證。

我們也可不化簡開 a_n 的一般項, 直接證明

$$\{a_n\}=[a,b,c,d] \quad \text{時,} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=a+b+c+d\text{。}$$

證明: 因爲 $\{a_n\}=[a,b,c,d]$, 所以

$$a_n = a\cdot C_0^{n-1}+b\cdot C_1^{n-1}+c\cdot C_2^{n-1}+d\cdot C_3^{n-1},$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} =& a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0^{n-1}}{2^n}+b\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1^{n-1}}{2^n}+c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_2^{n-1}}{2^n}+d\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_3^{n-1}}{2^n}\\
=& a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{b}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1^{n}}{2^n}+\frac{c}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_2^{n+1}}{2^n}+\frac{d}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_3^{n+2}}{2^n} \qquad (*)\\
=& a+\frac{b}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\frac{c}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{2^n\cdot 2!}+\frac{d}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)n}{2^n\cdot 3!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=a+\frac{b}{2}\cdot 2+\frac{c}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n}+\frac{d}{48}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{2^n}\\
&=a+b+\frac{c}{8}\cdot(6+2)+\frac{d}{48}\cdot(26+18+4)\\
&=a+b+c+d.
\end{aligned}
$$

得證。

(在 $(*)$ 的式子中, 要扣除當 $n<r$ 時, $C_r^n=0$ 的各項。)

嚴格來說, 定義在 N 的 r 次函數 $f(n)=\sum\limits_{i=0}^{r}a_in^i$, 需要 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_r$, 共 $r+1$個係數; 和用階差數列的各次降階之首項 d_i, 記爲 $\{a_n\}=[d_0,d_1,d_2,\ldots,d_r]$, 一樣要 $r+1$ 個生成元, 而且其中 a_r 和 d_r 不等於0的要求, 也是一樣相同的。這兩種表示法必然能成爲一一對應。但是在應用上, 應該各擅勝場。例如對一個未知函數關係的數列 $\{a_n\}$, 我們僅知其前幾項, 降階成:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 15 & & 26 & & 42 & & \cdots & & ?\\
& 1 & & 2 & & 4 & & 7 & & 11 & & 16 & & & & & \\
& & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & & & & \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & &
\end{array}
$$

如果對後繼各項實測不易, 或取得數據的成本太高, 就其降階情形應以判斷 $\{a_n\}$ 爲三階等差數列爲最佳考量。可用未定係數法設 $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 代入 4 個已知函數值, 解四元一次聯立方程組, 求出各項係數; 或用 $\{a_n\}=[1,1,1,1]$ 的生成公式

$a_n=1\cdot C_0^{n-1}+1\cdot C_1^{n-1}+1\cdot C_2^{n-1}+1\cdot C_3^{n-1}$, 再化簡成 $a_n=\dfrac{1}{6}n^3-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{4}{3}n$, 來確定這個數列的生成函數。但若只是要求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$, 我想以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[1,1,1,1]}{2^n}=1+1+1+1=4$, 比起代入 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{4}{3}n}{2^n}=\dfrac{1}{6}\cdot 26-\dfrac{1}{2}\cdot 6+\dfrac{4}{3}\cdot 2=4$, 必然要方便多了。

或者我們可以把 $\{a_n\}=\{n^4\}$ 做四次降階, 得到 $\{n^4\}=[1,15,50,60,24]$, 再得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1,15,50,60,24]}{2^n}=1+15+50+60+24=150,$$

就能少掉許多高次方的因式分解和化簡的問題了。

最後, 對階差級數 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 和 a_n 之間, 利用階差的關係: $S_1 = a_1$, $S_2 - S_1 = a_2$, $\ldots$, $S_n - S_{n-1} = a_n$, 我們把 S_n 也表爲數列 $\{S_n\}$, 並在 S_1 之前加一項 0, 成爲 $\{S'_n\}$。即 :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & S_1 & & S_2 & & S_3 & & S_4 & & S_5 & & \cdots \\
 & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & & \\
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & & \cdots \\
 & & \bigvee & & & & & & & & & & \\
 & & d_1 & & & \cdots & & & & & & & \\
 & & & \bigvee & & & & & & & & & \\
 & & & d_2 & & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & \bigvee & & & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & & d_r & & d_r & & \cdots\cdots & & & d_r \text{ 爲 } r+1 \text{ 階公差}
\end{array}
$$

如此一來, $\{S'_n\}$ 是 $r+1$ 階等差數列, 且可記爲 $\{S'_n\} = [0, d_0, d_1, \ldots, d_r]$。所以用原來求 a_n 的生成公式, 恰好可以求得 S_n。這也就是爲何 $a_n = \sum\limits_{j=0}^{r} d_j C_j^{n-1}$ 而 $S_n = \sum\limits_{j=0}^{r} d_j C_{j+1}^{n}$ 在組合符號 C 的上下標都要多 1 的原因了。至於求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_n}{2^n}$ 可能無法從 $[0, d_0, d_1, \ldots, d_r]$ 來處理, 但若扣除 $\{S'_n\}$ 的首項 0, 考慮

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S'_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[0, d_0, d_1, \ldots, d_r]}{2^n} = 0 + d_0 + d_1 + \cdots + d_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \text{ 。}$$

到這裡, 我們又得到一個對所有階差數列都成立的恆等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{j=0}^{r} d_j \text{ 。}$$

如果我們再把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \sum\limits_{j=0}^{r} d_j$ 用生成函數代入, 可以得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{r} d_j C_j^{n-1}}{2^n} = \sum_{j=0}^{r} d_j \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_j^{n-1}}{2^n} \Big),$$

因此可以得到一個『2^n 在分母對組合公式的恆等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{C_j^{n-1}}{2^n} = 1$』, 對任意非負整數 j 都成立。

不知道哪一位大師說過“重要的公式一定很簡單”。而我則感覺: “好的公式只要生成元, 儘量不要其他常數。” 再次復習一下 :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2^n}=c\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+(n-1)d}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[a_1,d]}{2^n}=a_1+d\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(1,1)}{2^n}=1+1\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(a,b,c,\ldots,k)}{2^n}=a+b+c+\cdots+k \qquad \text{及}\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[d_0,d_1,d_2,\ldots,d_r]}{2^n}=d_0+d_1+d_2+\cdots+d_r \quad \text{都是這樣的。}
\end{aligned}
$$

盧卡斯數列無論降階幾次都還是盧卡斯數列, 而階差數列經有限次降階就能得到公差, 是完全不同的代數性質。但是這兩種數列逐項除以 2^n, 居然都收斂到所有生成元的和, 不摻雜任何常數, 簡單得渾然天成。這一切漂亮的結果, 都拜 2^n 在分母所賜, 大家以爲如何?

後記與待解問題:

在本文校稿期間, 我又發現一個有趣的現象和一個難以解決的問題:

對於 1 的常數數列 : $1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=1$;

及 n 的自然數列 : $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2$;

之間我們很容易定義出如:

$1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,\ldots$ 的數列,

或 $1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,\ldots$ 的數列,

並以高斯符號來定義 $\{N_2(n)\}=\left[\dfrac{2-1+n}{2}\right]$, 爲每一個自然數都有 2 項的數列; 或 $\{N_3(n)\}=\left[\dfrac{3-1+n}{3}\right]$, 爲每一個自然數都有 3 項的數列, 且很容易用 $s=2s-s$ 的方法得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_2(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{2-1+n}{2}\right]}{2^n}=\frac{4}{3},\quad \text{及}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_3(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{3-1+n}{3}\right]}{2^n}=\frac{8}{7};$$

或者更一般化的定義每個自然數都有 k 項的數列：$N_k(n)=\left[\dfrac{k-1+n}{k}\right]$, 並用相同的方法得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_k(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{k-1+n}{k}\right]}{2^n}=\frac{2^k}{2^k-1}.$$

都符合本文的結論『好的公式只要生成元, 儘量不要其他常數』。

但是對於: 1 有 1 個, 2 有 2 個, 3 有 3 個, 4 有 4 個, $\ldots$, n 有 n個, $\ldots$ 看來十分平常的數列：$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\ldots$ (暫記爲 $\{N_N(n)\}$), 卻找不到一個符號式的定義公式, 最多是用分段定義的方式:

$$\text{當 } \frac{(s-1)s}{2}<n\le\frac{s(s+1)}{2}, \text{ 則 } N_N(n)=s,$$ 但如此一來, 每一項是多少反而不明顯。

如果逐項比較這四個數列:

$\{n\}$ 的自然數列：$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\ldots,$

$\{N_N(n)\}$ 數列：$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,\ldots,$

$\{N_2(n)\}$ 數列：$1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,\ldots,$

$\{N_3(n)\}$ 數列：$1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,\ldots,$

顯然 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_3(n)}{2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_2(n)}{2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_N(n)}{2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$

但用相同的方法來求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_N(n)}{2^n}$, 只能得到介於 $\dfrac{4}{3}$ 和 2 之間的

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{((n-1)n)/2}}\fallingdotseq 1.6416325606551538\cdots.$$

這級數應該收斂得很快, 可是收斂值難求又不漂亮, 這是我研究『2^n 在分母的級數收斂性質』以來, 碰到的最大挫折, 是不是難定義的級數就難求收斂值呢? 但願在拙文刊出後, 能得到各界高明的迴響以釋疑。

—本文作者爲高雄市中正高中退休教師—