數學傳播 47卷1期, pp. 42-44

三角比相關的不等式的一個小備註

張鎮華

中山大學應用數學系的「雙週一題」網路數學問題徵答活動歷史悠久, 深受各界好評。數學傳播季刊最近有一篇連威翔的文章 [1], 討論九十二學年度第一學期的第三題 [2], 題目如下:

$$\text{試證對所有 } \theta\in(0,\frac{\pi}{2}),\ \text{恆有 } \theta<\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}。\tag{1}$$

這是一道連結三角比與角度的不等式, 解題的起手式當然少不了下面這一個三角比與角度的最根本不等式:

$$\text{當 } \theta\in(0,\frac{\pi}{2}) \text{ 時, 恆有 } \sin\theta<\theta<\tan\theta,\tag{2}$$

其證明可由圖 1 中「$\triangle OAB$ 面積 $<$ 扇形 OAB 面積 $<$ $\triangle OBC$ 面積」的關係推得。

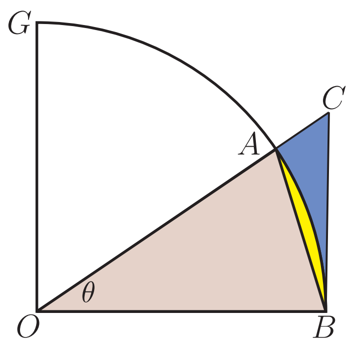

圖1: 參見 [1]。

不論是 [1] 還是 [2] 都有推導三角比公式後, 再利用 (2) 來證明的方法。以 [2] 爲例, 其推導如下。

對 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 令 $\theta=2\alpha$, 則有 $\sin\theta=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$、$\tan\theta=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,

其中 $0<\tan\theta<1$, 因此 $\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^4\alpha}>2\tan\alpha>2\alpha=\theta$。

往高一點觀點想, (2) 是用來推導三角函數導函數的基本工具, 所以三角函數的微分中也藏有這個公式。基於此, [2] 還有一個用微分解題的方法如下。

令 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}-\theta$, 則 $f'(\theta)=\dfrac{\cos\theta+\sec^2\theta}{2}-1$。利用算幾不等式, 因爲當 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 時 $\cos\theta\neq\sec^2\theta$, 所以

$$f'(\theta)>\sqrt{\cos\theta\sec^2\theta}-1=\sqrt{\sec\theta}-1>0, \tag{3}$$

由微積分的性質知道, f 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上嚴格遞增, 此時對 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 恆有 $f(\theta)>f(0)=0$, 得知 $\theta<\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}$。

我們的觀察由此開始。光是利用微分, 並沒有將微積分用到極致。微分最後的一個小終點是泰勒展開式。考慮正弦函數和正切函數的泰勒展開式如下。

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\frac{1}{7!}\theta^7+\frac{1}{9!}\theta^9-\cdots,\\ \tan\theta&=\theta+\frac{1}{3}\theta^3+\frac{2}{15}\theta^5+\frac{17}{315}\theta^7+\frac{62}{2835}\theta^9+\cdots,\end{aligned}$$

其中我們只考慮 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 的部分。如果我們只取兩項當作估計, 其實會有:

$$\begin{aligned}\sin\theta&>\theta-\frac{1}{3!}\theta^3,\\ \tan\theta&>\theta+\frac{1}{3}\theta^3。\end{aligned}$$

由此可以很容易看出來

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}>\theta+\frac{1}{12}\theta^3>\theta。$$

由 $\theta+\dfrac{1}{12}\theta^3$ 中多出來的 $\dfrac{1}{12}\theta^3$, 也可以看出來, 其實會有一個更強的不等式

$$\frac{2\sin\theta+\tan\theta}{3}>\theta, \tag{4}$$

注意到 $\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}>\dfrac{2\sin\theta+\tan\theta}{3}$。

如果回到只用微分來證明 (4), 幾乎和 [2] 一樣的證明如下所示。

令 $g(\theta)=\dfrac{2\sin\theta+\tan\theta}{3}-\theta$, 則 $g'(\theta)=\dfrac{2\cos\theta+\sec^2\theta}{3}-1$。利用算幾不等式, 因爲當 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 時 $\cos\theta\neq\sec^2\theta$, 所以

$$g'(\theta)>\sqrt[3]{\cos\theta\cos\theta\sec^2\theta}-1=1-1=0, \tag{5}$$

由微積分的性質知道, g 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上嚴格遞增, 此時對 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 恆有 $g(\theta)>g(0)=0$, 得知 $\theta<\dfrac{2\sin\theta+\tan\theta}{3}$。

在此我們可以看到, 利用算幾不等式時, (5) 的推導比 (3) 更自然。在此, 我們徵求, 不用微積分的證明方法。利用泰勒展開式, 我們還可以看到餘弦函數的公式

$$\cos\theta=1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\frac{1}{6!}\theta^6+\frac{1}{8!}\theta^8-\cdots,$$

這看起來和正弦函數及正切函數不是一個等級, 因爲其第 1 項是 1, 不是 θ。不過我們可以做一個小變動, 考慮

$$\theta\cos\theta=\theta-\frac{1}{2!}\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^5-\frac{1}{6!}\theta^7+\frac{1}{8!}\theta^9-\cdots。$$

由此也可以看出如下的不等式:

$$\frac{2\theta\cos\theta+3\tan\theta}{5}>\theta。\tag{6}$$

我們邀請讀者用各種方法來證明 (6)。

參考文獻

1. 連威翔。從一道三角函數不等式的證明談起。數學傳播季刊, 46(3), 69-78, 2022。
2. 「雙週一題」網路數學問題徵答, 第三題, 中山大學應用數學系, 九十二學年度第一學期 (92 年 10 月 17 日公布)。`https://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2003f/ans2_3.jpg` 。

—本文作者爲臺灣大學數學系名譽教授—