數學傳播　47卷1期, pp. 20-41

Wallis 積分與無窮乘積

林琦焜

1. 約翰–沃利斯 — 微積分之先驅與皇家學會的創立者

『Foreshadowings of the principles and even of the language of [the infinitesimal] calculus can be found in the writings of Napier, Kepler, Cavalieri, Pascal, Fermat, Wallis, and Barrow. It was Newton's good luck to come at a time when everything was ripe for the discovery, and his ability enabled him to construct almost at once a complete calculus.』

— W.W.R. Ball In History of Mathematics (3rd Ed., 1901), 366. —

圖 1: John Wallis: 英國數學家與牧師

在牛頓、Leibniz 之前將分析方法引入數學界而導致微積分的創世紀, 其中貢獻最突出的是英國數學家約翰–沃利斯 (John Wallis, 1616~1703)。沃利斯可以說是英國在牛頓之前最重要的數學家, 但是在 1631 年之前他基本上沒有接受過任何數學的正規教育, 而是那一年的聖誕節從他在貿易商工作主要做算術與會計的弟弟身上學到數學。按沃利斯自己的話:『這是我第一次了解數學也是唯一上過的數學課。』他也意外發現自己在數學上的天分, 基本上沃利斯所有的數學知識全靠自修取得。雖然不是正式的學習卻是閒暇時一種愉快的娛樂, 但這閒暇時的

娛樂最後成爲他一輩子的工作。

沃利斯於 1632 年進入劍橋大學的 Emmanuel[1] 學院就讀, 這是一個專門訓練基督教新教牧師的神學院。所以沃利斯另一個身分是基督教教會的牧師, 他甚至還擔任過倫敦西敏寺宗教會議的秘書。西敏寺 (代表倫敦) 與劍橋、牛津是英國學術風氣最盛的地方, 1645 年起沃利斯就參加倫敦一群對自然科學有興趣的知識分子所舉行的聚會, 這個團體就是英國皇家學會的前身, 它是世界上歷史最長而又從未中斷過的科學學會。有別於當時席捲歐洲大陸的笛卡兒理性哲學, 英國皇家學會則傾向於法蘭西斯 — 培根 (Francis Bacon, 1561∼1626) 的實證哲學 (主義), 以避免理性哲學藉由數學所造成的驕傲、偏狹與獨斷。沃利斯是皇家學會創始會員中唯一的數學家, 爲解決這個問題, 他將數學發展爲實驗數學, 如此不僅能有力且有效地輔佐科學也可以成爲寬容與中庸的典範, 再也不是獨斷與嚴格的範例。而這個新數學的核心正是無窮小 (infinitesimal) 的概念。

沃利斯在 1649 年成爲牛津大學幾何學的 Savilian 講座[2]。他憑著自身的努力在這個職位一待就是 50 年。沃利斯在 1656 年出版拉丁文版的《無窮算術》(Arithmetica Infinitorum), 他大膽運用分析的方法處理無限, 苦心孤詣地確定無窮小分割原理並通過內插法與外插法再加上他對於數學的直觀從而得出我們今天用微積分得到的結果。在此書也首次出現以他爲名的 Wallis 無窮乘積 (Wallis infinite product), 將圓周率 π 表示爲正整數的無窮乘積

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

這個公式給出了正整數與圓周率 π 之間最異乎尋常的關係。他的工作特別是《無窮算術》影響了牛頓、J. Gregory 還有其他數學家, 後來導致微積分的發明。有趣的是沃利斯稱他的方法爲《算術》, 牛頓則稱之爲《分析》。是他引進 ∞ 這個符號[3]來表示無窮大或無限大而 $\frac{1}{\infty}$ 則代表無窮小 (infinitesimal)。

沃利斯另一個重要的工作是在伽利略的影響下堅持數學理論同實驗結合之原則研究力學, 並在 1670年出版《力學或論幾何運動》(Mechanica, sive Tractatus de Motu Geometricus)。這是在牛頓的《自然哲學的數學原理》之前關於力學最詳盡的論著。沃利斯的著作激起人們對力學的興趣, 在之後的兩百年間幾乎每一位了不起的數學家都在力學上發揮過他們的才華。

---

[1] Emmanuel 或 Immanuel(希伯來文與聖經的拼法), 通常翻成《以馬內利》意思是: 上帝與我們同在。「以馬內利」這名詞在《聖經》中, 總共出現三次, 其中二次在《舊約聖經》「賽七 14, 八 8」, 另一次在《新約聖經》「太一 23」。按 馬太福音 第一章, 記載天使在夢中向約瑟指出馬利亞將由聖靈懷孕, 就是應驗先知以賽亞所說過的這個預言, 所以基督教後來就用「以馬內利」一詞來代表「耶穌基督」。此外, 在教會間信件、信徒間信件中最喜用「以馬內利」一詞作結尾語, 來表示祝福與致其敬意。巴黎、牛津、劍橋、哈佛 ··· 這些著名大學都是從神學院開始, 大學的前身是修道院, 真正而言大學是基督教嶄新的發明。

[2] 英國近代最著名數學家, 1966 年費爾茲獎得主阿蒂亞 (Michael F. Atiyah, 1929∼2019) 就曾擔任過這個講座。另一個更出名但偏物理的是劍橋大學三一學院的盧卡錫 (Lucas) 講座, 著名的人物有牛頓、Paul Dirac、霍金 ··· 等人。

[3] 象徵 (symbol) 與符號 (sign) 有一個相同的特點, 它們都超過了本身而指著另一件事。字母、數字或文字也是如此, 它們都超過圖案本身指出聲音與意義。數學符號有一個特性 — 它們展現出結構, 除了數學之外使用象徵與符號最多的就屬宗教。

2. 球體積 — Wallis 積分之起源

我們規定 $V_n(r)$ 表示半徑爲 r 之 n 維空間的球體積, $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ 則表示其表面積, (這裡的上指標 $n-1$ 代表球面之維數 !) 而 $\Omega_n = V_n(1)$ 表示單位球體積, $\omega_n = \mathbb{S}^{n-1}(1)$ 表示 n 維單位球表面積, 利用積分順序變換與 Beta 函數還有球的均勻性 (homogenity)

$$V_n(r) = r^n V_n(1) = r^n \Omega_n, \qquad \mathbb{S}^{n-1}(r) = r^{n-1}\mathbb{S}^{n-1}(1) \triangleq r^{n-1}\omega_n. \tag{2.1}$$

我們可以計算 n 維球之體積與表面積。爲了方便討論我們先介紹 Beta 函數。

定義 2.1. Beta 函數 $B(x,y)$ 定義爲

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x>0, \quad y>0. \tag{2.2}$$

Beta 函數最開始是稱爲 Euler 第一類積分! 事實上歐拉 (L. Euler; 1707∼1783) 是研究這個積分的第一人。這個瑕積分 (improper integral) 沒有太胖的問題但卻有太高的問題, $t=0,1$ 這兩點需要討論, 藉由量綱分析 (dimensional analysis) 可以直觀地看出來 $x,y>0$。首先將積分拆成兩部分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

分開討論

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \approx [t]^{x-1}[dt] = [t]^x, \quad ([t]\to 0) \quad \Longrightarrow \quad x>0,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \approx [1-t]^{y-1}[dt] = [1-t]^y, \quad ([1-t]\to 0) \quad \Longrightarrow \quad y>0.$$

定理 2.2. n 維單位球之體積爲

$$\Omega_n = V_n(1) \triangleq \int\cdots\int_{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_1dx_2\cdots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{2.3}$$

證明: 對於 n 重積分, 基本上我們需要先導出遞迴 (或遞推) 公式。

$$\begin{aligned}
\Omega_n = V_n(1) &= \int\cdots\int_{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_1dx_2\cdots dx_n \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int\cdots\int_{0\le x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\le 1-x_n^2} dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\right)dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} V_{n-1}\big(\sqrt{1-x_n^2}\big)dx_n \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1}(1)dx_n \qquad \text{(均勻性)} \\
&= V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1}t^{\frac{1}{2}-1}dt, \qquad (t=x_n^2).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) 最後出現的瑕積分就是著名的 Beta 函數

$$\begin{aligned}
B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1}t^{\frac{1}{2}-1}dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta, \qquad (t=\cos^2\theta).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

如此就得到我們所期望的遞迴公式

$$\Omega_n = V_n(1) = V_{n-1}(1)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \Omega_{n-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta. \tag{2.6}$$

它告訴我們n維與$n-1$維球體積之間相差一個 Beta 函數。利用這個遞迴公式可得

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= V_{n-1}(1)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= V_{n-2}(1)B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= V_1(1)B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

與

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= V_{n-1}(1)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta \\
&= V_{n-2}(1)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= V_1(1)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\cdots\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

因爲

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = 1 \quad\Longrightarrow\quad V_1(1) = 2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = B\Big(\frac{1+1}{2},\frac{1}{2}\Big),$$

我們可以刻意將 (2.7) 與 (2.8) 表示爲

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= B\Big(\frac{1+1}{2},\frac{1}{2}\Big)\cdots B\Big(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\Big)B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\cdots\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\cdots\cdot\int_0^{\pi}\sin^n\theta d\theta \\
&= \prod_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\sin^k\theta d\theta.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

所以單位球體積 $\Omega_n = V_n(1)$ 是一串 Beta 函數或 Wallis 積分的乘積。最後再藉由著名的 Euler 等式

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\qquad x,y>0,\tag{2.10}$$

可以將單位球體積 $V_n(1)$ 表示爲常見的形式

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= B\Big(\frac{1+1}{2},\frac{1}{2}\Big)\cdots B\Big(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\Big)B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\cdots\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \\
&= \frac{\big[\Gamma(\frac{1}{2})\big]^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

□

由於 Beta 函數或 Γ-函數的出現, 遞迴公式 (2.6) 或體積公式 (2.3) 告訴我們單位球體積之間是一個複雜的關係式, 而且奇數維與偶數維有極大的差異。與此對應的是波動方程的解, 二維、三維行爲大不同。這是研究波動方程最應注意與花心思的地方。然而如果奇數維與偶數維分開討論, 我們可以得到簡單的遞迴關係。

定理 2.3. n 維單位球體積 $V_n(1)=\Omega_n$ 滿足遞迴關係

$$\Omega_n = \frac{2\pi}{n}\Omega_{n-2}, \qquad n>2. \tag{2.12}$$

證明: 我們仍然仿定理 2.1 的方法先導出遞迴公式然後藉由極座標可得

$$\begin{aligned}
\Omega_n = V_n(1) &= \int\cdots\int\limits_{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_n dx_{n-1}\cdots dx_1 \\
&= \iint\limits_{0\le x_1^2+x_2^2\le 1}\Bigg(\int\cdots\int\limits_{0\le x_3^2+\cdots+x_n^2\le 1-x_1^2-x_2^2} dx_n dx_{n-1}\cdots dx_3\Bigg) dx_2 dx_1 \\
&= \iint\limits_{0\le x_1^2+x_2^2\le 1} V_{n-2}\Big(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\Big) dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 V_{n-2}\left(\sqrt{1-r^2}\right) r dr d\theta \qquad (\text{極座標}) \\
&= V_{n-2}(1)\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} r dr d\theta.
\end{aligned}$$

但是

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} r dr d\theta = \frac{2\pi}{n} \quad\Longrightarrow\quad \Omega_n = \frac{2\pi}{n}\Omega_{n-2}. \qquad \square$$

定義 2.4. Wallis 積分 W_n 定義爲

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{2.13}$$

藉由 Wallis 積分, 單位球體積 (2.9) 可以重新表示爲

$$\Omega_n = V_n(1) = 2^n W_1 W_2\cdots W_n. \tag{2.14}$$

由 (2.5) 與 (2.13) 可得

$$W_n = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{2.15}$$

所以本質上 Wallis 積分是特殊的 Beta 函數。

定理 2.5. Wallis 積分 W_n 具有底下性質

(1) $\{W_n\}$是一非負的遞減數列。

(2) W_n滿足遞迴關係(差分方程)

$$W_n=\frac{n-1}{n}W_{n-2},\qquad W_0=\frac{\pi}{2},\qquad W_1=1,\qquad n\geq 2. \tag{2.16}$$

這個關係式其實是 (2.12) 的孿生姊妹。

(3) 如果分開奇數與偶數則 $(p\geq 0)$

$$\begin{cases} W_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p}\cdot\dfrac{2p-3}{2p-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot W_0=\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, \\ W_{2p+1}=\dfrac{2p}{2p+1}\cdot\dfrac{2p-2}{2p-1}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot W_1=\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases} \tag{2.17}$$

(4) 漸近行爲: 當 $n\to\infty$ 時 $W_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ 意即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}W_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.18}$$

證明:

(1) 因爲$\sin x$在$[0,\pi/2]$是非負的, 所以W_n也是一非負的實數。另外

$$W_n-W_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin x)dx\geq 0.$$

這就證明了$\{W_n\}$是一遞減的數列。或者更直接地說 (因爲$x\in[0,\pi/2]$)

$$0\leq\sin x\leq 1\implies\{\sin^n x\}\text{是一遞減數列}\implies\{W_n\}\text{是一遞減數列。}$$

(2) 這直接是分部積分的應用

$$\begin{aligned} W_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x \\ &=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\sin^{n-1}x \\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}xdx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx \\ &=(n-1)W_{n-2}-(n-1)W_n, \end{aligned}$$

因此

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

(3) (2.17) 直接是 (2.16) 之推論, 我們留給讀者練習。

(4) 由 (2.17) 可以觀察到 Wallis 積分的特殊結構, 假設$n = 2p$則

$$W_n W_{n+1} = W_{2p} W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}.$$

兩邊乘 n 後取極限就是 (2.18)

$$\lim_{n\to\infty} nW_n^2 = \lim_{n\to\infty} nW_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad \square$$

註解:

(a) Wallis 積分 W_n 滿足二階差分方程 (2.16) 這相當於二階微分方程, 因此需要兩個 (初始) 值 W_0, W_1 以決定所有的 W_n。

(b) 由 (2.15) 可得特殊的 Wallis 積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}. \tag{2.19}$$

函數 $\sin^{2n} x$ 在區間 $[0,\pi]$ 的平均值是 $1, 2, \ldots, 2n$ 中所有奇數之乘積與所有偶數之乘積相除的分數。正整數的相乘、除竟然可以得出超乎想像的結果! 更且這裡面也隱含了無窮乘積 (infinite product)。

(c) (2.16) 告訴我們 W_n 是以 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的速率衰減。這個事實由 Wallis 積分的定義 (2.13) 並不容易看出來 (如果利用量綱分析只能猜到 $\dfrac{1}{n}$), 而是透過奇、偶相乘彼此互相抵消 (cancellation) 才得到這個量。

3. 高斯 — Poisson 積分與球表面積

考慮一個著名的瑕積分

$$A \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{3.1}$$

通常我們會利用分部積分 (integration by parts)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} de^{-t} = \cdots = ? \tag{3.2}$$

你會發現已經在滾雪球, 但不用沮喪, 雖然無法得到解答, 但塞翁失馬焉知非福, 學習數學並非只求一個答案, 對數學而言過程遠比答案來得重要。如果你夠堅強的話, 其實你已經在處理出名的 Γ-函數。關於這個積分, 若只停留在一維空間, 你將無法逃出巫婆的魔咒, 青蛙永遠無法變回王子。正統的方法是利用重積分 (double integral)。

定理 3.1 (高斯–Poisson 積分). [4]

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}. \tag{3.3}$$

證明: 由極坐標與 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
A^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta=\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}2\pi rdr\\
&= \pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}dr^2=\pi,
\end{aligned}$$

故

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}. \qquad \square$$

嚴格證明: 高斯–Poisson 積分是一個瑕積分, 我們考慮正方形區域 S 介於半徑等於 R 與 $\sqrt{2}R$ 的兩個圓 D_1, D_2 之間

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x^2+y^2\le R^2\},\\
D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x^2+y^2\le 2R^2\},\\
S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|-R\le x\le R,-R\le y\le R\}.
\end{aligned}$$

因為 $D_1\subset S\subset D_2$ 且 $e^{-(x^2+y^2)}>0$ 所以

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\le\iint_{S} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\le\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

[4]第一個推得這個積分是瑞士數學家歐拉 (Euler), 後來法國數學家 Laplace 重新發現。但是最後變得舉世聞名則是由於高斯 (Gauss) 藉由最小二乘方預測穀神星 (Ceres) 的位置時這個積分扮演了決定性的角色。

仿前面的計算

$$\int_0^R 2\pi r e^{-r^2} dr \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \int_0^{\sqrt{2}R} 2\pi r e^{-r^2} dr.$$

$$\pi\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right).$$

令 $R \to \infty$ 得

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \qquad \square$$

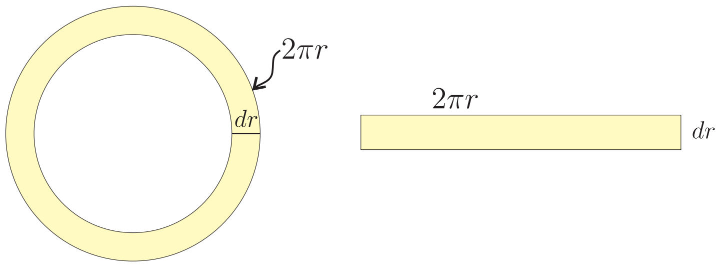

圖 2:　極座標積分的幾何意義

這個方法是由法國數學家 Siméon Denis Poisson(1781∼1840) 所提的, 因此稱這個積分爲《高斯–Poisson 積分》而不僅僅是《高斯積分》是比較公正且符合歷史事實。相同的手法也出現在證明 Beta 函數的 Euler 等式 (2.18)。從上述的證明我們領悟到高斯–Poisson 積分是二維的產物, 意思是只憑一維的積分是不可能得此結果。雖然也可以利用複變的積分與微分方程來計算。但複變的積分就是線積分正是二維的!就算是微分方程本質上也是二維的。爲什麼? 微分方程的解是平面上的一條曲線 (雖然是一維但卻是存在於二維, 也就是在二維空間才看得到!)。這些都說明高斯–Poisson 積分的困難, 而其中一個根本原因是: 它不是基本函數而是一個特殊的超越函數 (transcendental function)。我們介紹 Γ-函數

定義 3.2. Γ-函數[5] 定義爲

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0. \tag{3.4}$$

Γ-函數最開始是稱爲 Euler 第二類積分。這個瑕積分 (improper integral) 有《太胖》與《太高》的問題, $t = 0, \infty$ 這兩點需要討論, 藉由量綱分析 (dimensional analysis) 可以直觀

[5]是法國數學家 Adrien-Marie Legendre(1752∼1833) 以希臘字母 Γ 來表示 Gamma 函數, 並將冪函數刻意寫爲 t^{x-1} 而不是 t^x 爲的是讓定義域是 $(0,\infty)$ 而不是 $(-1,\infty)$。

地看出來 $x>0$。首先將積分拆成兩部分 (這是處理瑕積分的典型手法)

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

然後分開討論 (不要被 1 這個數綁架了, 在數學中 1 代表任何一個有限的數!)。首先是太胖的情形, 當 $t\to\infty$ 時根據 L'Hospital 法則 e^{-t} 把所有冪函數 t^s 都吃掉, 選取最熟悉的 t^2 (p-級數) 來比較

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^2}=0,$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt<\infty \quad\Longrightarrow\quad \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt<\infty.$$

其次是太高的情形, 由於 $e^{-t}\le 1$

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt\le\int_0^1 t^{x-1}dt\approx[t]^{x-1}[dt]=[t]^x,\quad([t]\to 0)\quad\Longrightarrow\quad x>0.$$

高斯–Poisson 積分就是 Γ-函數, 所以定理 3.1 可以重新表示爲

定理 3.3 (高斯–Poisson 積分)**.**

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac12-1}dt=\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\pi}. \tag{3.5}$$

我們現在要問的是球體積與球表面積之關係如何? 先看二維三維的情形

$$n=2 \quad 時 \quad V_2(r)=\pi r^2,\qquad \mathbb{S}^1(r)=2\pi r,$$
$$n=3 \quad 時 \quad V_3(r)=\frac43\pi r^3,\quad \mathbb{S}^2(r)=4\pi r^2.$$

由這兩個關係式我們如此猜測 (類比法): 球體積對半徑的微分等於球表面積

$$\frac{d}{dr}V_n(r)=\mathbb{S}^{n-1}(r). \tag{3.6}$$

也可用極座標之概念來看。先看 $n=2$, 通常求積分是以長方形來逼近, 但實際上可以不必如此受侷限, 由定理 3.1 的證明得出關係式

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^\infty e^{-r^2}2\pi r dr,$$

其意思是我們用無窮多個同心圓來鋪滿整個平面。根據這個想法求圓面積我們可用圓周沿著半徑一圈一圈積分而得

$$V_2(a)=\int_0^a 2\pi r dr=\pi a^2. \tag{3.7}$$

半徑等於 r 的環狀區域剪開差不多就是長等於 $2\pi r$ 寬爲 dr 的長方形 (請參考圖 2), 這就是 (3.7) 的意義。對n維球亦然[6], 即

$$V_n(a) = \int_0^a \mathbb{S}^{n-1}(r)dr = \mathbb{S}^{n-1}(1)\int_0^a r^{n-1}dr = \frac{\mathbb{S}^{n-1}(1)}{n}a^n. \tag{3.8}$$

利用上述這種對稱性 (symmetry) 可以將 n 重積分直接轉化成單純的一維積分。

例題 3.4. 已知 $f(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|) = f(r)$ 是一半徑函數 (radial function) 則

$$\underset{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2}{\int\cdots\int} f(\boldsymbol{x})dx_1dx_2\cdots dx_n = \mathbb{S}^{n-1}(1)\int_0^a f(r)r^{n-1}dr. \tag{3.9}$$

解: 因爲被積分函數 f 只與半徑有關

$$f(\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|) = f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right) = f(r),$$

因此我們可利用極座標來計算積分 (利用 $d\boldsymbol{x} = dV_n(r) = \mathbb{S}^{n-1}(r)dr = \mathbb{S}^{n-1}(1)r^{n-1}dr$)

$$\begin{aligned}&\underset{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2}{\int\cdots\int} f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)dx_1dx_2\cdots dx_n\\ &\qquad = \int_0^a f(r)\mathbb{S}^{n-1}(r)dr = \mathbb{S}^{n-1}(1)\int_0^a f(r)r^{n-1}dr.\end{aligned}$$

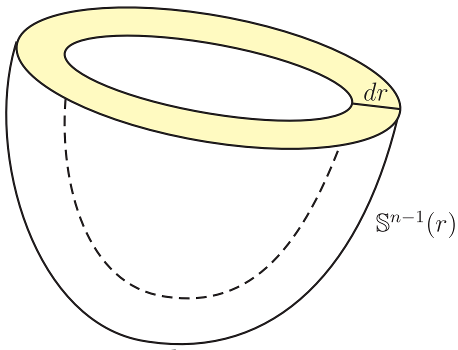

圖 3: $\dfrac{d}{dr}V_n(r) = \mathbb{S}^{n-1}(r)$

定理 3.5. $\mathbb{R}^n$ 上的單位球表面積爲

$$\omega_n \triangleq \mathbb{S}^{n-1}(1) = n\cdot\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{3.10}$$

[6]讀者有興趣可以買一顆洋蔥切開就可以理解實心的洋蔥是由一層一層的表面沿著半徑方向累積而成。球體積的微分是表面積, 也就是這個緣故在 $\mathbb{R}^n$ 上的有界區域 Ω 其邊界是以 $\partial\Omega$ 來表示, 這裡 ∂ 當然是偏微分。

而半徑等於 a 之球表面積則爲

$$\mathbb{S}^{n-1}(a)=\mathbb{S}^{n-1}(1)a^{n-1}=\omega_n a^{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}a^{n-1}. \tag{3.11}$$

證明: 考慮函數

$$f(\boldsymbol{x})=f(|\boldsymbol{x}|)=f(r)=e^{-r^2}=e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}.$$

由高斯–Poisson 積分與 Fubini 定理得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n=\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_k^2}dx_k=\pi^{\frac{n}{2}}.$$

但由例題 3.4 之分析知

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n=\int_0^{\infty}e^{-r^2}\mathbb{S}^{n-1}(r)dr\\&=\mathbb{S}^{n-1}(1)\int_0^{\infty}e^{-r^2}r^{n-1}dr=\mathbb{S}^{n-1}(1)\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt\\&=\mathbb{S}^{n-1}(1)\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big).\end{aligned}$$

比較上面這兩個等式得單位球表面積

$$\omega_n=\mathbb{S}^{n-1}(1)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

□

圖 4:　紙鈔上的高斯

註解:

(a) 如果與定理 2.2 比較, 感覺上定理 3.5 並不是直接得到單位球體積 (或表面積)。這樣的認知不完全是正確的! 對於圓應該有的常識 (common sense)

『有圓就有 π、有 π 就有圓。』

定理 3.1 在計算 高斯–Poisson 積分的過程 (用了極座標) 還有最後的答案 $\sqrt{\pi}$, 都告訴我們這裡面有圓, 所以高斯–Poisson 積分本質上是圓面積的一種表現 (representation), 也就是:『高斯–Poisson 積分是圓的化身』, 同時也再次說明高斯–Poisson 積分是二維的。同理n 維高斯–Poisson 積分是n維球體積 (表面積) 的一種表現。實際上 (3.5) 或 (3.10) 說明高斯–Poisson 積分與球體積 (表面積) 是藉由 Γ-函數連繫在一起。

(b) 由單位球表面積 (3.10) 可得單位球體積

$$\Omega_n = V_n(1) = \frac{\omega_n}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{3.12}$$

這裡我們刻意表示爲$\frac{n}{2}$之形式除了對稱之外, 最主要目的是要顯示n是奇數與偶數的差異, 由此也可以看出奇數與偶數 Wallis 積分本質上的區別。藉由(2.9) 與 (3.12) 可以將單位球表面積表示爲 Wallis 積分

$$\omega_n = n\Omega_n = n2^n W_1 W_2 \cdots W_n. \tag{3.13}$$

(c) Wallis 積分 (2.13) 可以藉由單位球表面積重新表示爲

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{\Omega_n}{2\Omega_{n-1}} = \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}. \tag{3.14}$$

(d) 由 Wallis 積分可以回頭推得高斯–Poisson 積分。首先由 Taylor 級數或直接微分有不等式

$$1 - t \le e^{-t}, \quad 1 + t \le e^t, \qquad 0 \le t < \infty,$$

也就是

$$1 - t \le e^{-t} \le \frac{1}{1+t}, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{3.15}$$

再考慮變數變換 $t = \frac{x^2}{n}, n \in \mathbb{N}$, 將 (3.15) 改寫爲

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \le e^{-x^2} \le \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}, \tag{3.16}$$

然後在區間 $[0, \sqrt{n})$ 上積分

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \le \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx. \tag{3.17}$$

(3.17) 左右兩個積分可以透過三角變數變換轉換爲 Wallis 積分

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}\int_0^1 \cos^{2n+1} t dt = \sqrt{n} W_{2n+1}, \qquad x=\sqrt{n}\sin t, \\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n}\int_0^1 \cos^{2n-2} t dt = \sqrt{n} W_{2n-2}, \qquad x=\sqrt{n}\tan t, \end{cases}$$

並重新表示爲

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \le \sqrt{n} W_{2n-2}. \tag{3.18}$$

利用 (2.16) 計算極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.19}$$

根據三明治夾擠定理由 (3.18) 取極限可得高斯–Poisson 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

所以 (3.19) 可以重新表示爲

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{3.20}$$

最後提醒讀者 註解 (d) 的處理手法也出現在 Γ-函數與其它極限問題是分析的重要方法, 其最原始的想法可追溯到 Euler 以二項展開式來逼近指數函數。

(e) 以高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777∼1855) 爲頭像的 10 德國馬克是我最愛的紙鈔之一 (另一張是歐拉 (Leonhard Euler, 1707∼1783) 的 10 瑞士法郎, 隨時都放在皮夾裡。) 這張鈔票有兩個看點: 正面除了高斯之外還印有高斯的常 (正) 態分配, 背面則有測量的工具與三角形形成的丈量區域 (這就是著名的單形法 (simplex method) 構成了微分幾何之逼近理論)。天才就是天才連做測量這個無聊的工作也可以創出一門學問 (非歐幾何與微分幾何)。

4. n 維球座標

從幾何的觀點三維空間的球座標表示爲

$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 ρ 是半徑, φ 是高低角 (由北極到南極) 而 θ 則是水平角 (旋轉一圈)

$$0 \le \rho < \infty, \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

這裡我們刻意寫爲 $z \to x \to y$ 的順序 (仍然是右手法則), 事實上在推導球座標時正是這個順序。此時三維無窮小方塊的三個邊長爲

$$ds_1 = d\rho, \qquad ds_2 = \rho d\varphi, \qquad ds_3 = \rho \sin\varphi d\theta. \tag{4.2.a}$$

體積元 (volume element) 與球面上的面積元 (area element) 則是

$$\begin{aligned} dV &= dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta, \\ dS_\rho &= \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta, \qquad \rho = \text{常數。} \end{aligned} \tag{4.2.b}$$

與球面有密切關係的是立體角

$$d\Omega = \frac{dS_\rho}{\rho^2} = \sin\varphi d\varphi d\theta. \tag{4.2.c}$$

關於球座標的詳細討論讀者可以參考 [12, 14]。我們想把 (4.1) 推廣到 $\mathbb{R}^n$, 首先必須擺脫幾何的束縛 (n 維空間不知如何畫圖), 從代數的觀點重新理解 (4.1)

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \\ \Longrightarrow \quad & z = \rho\cos\varphi, \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\varphi, \\ \Longrightarrow \quad & z = \rho\cos\varphi, \qquad x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

由此容易判斷高低角 φ 之範圍

$$\sqrt{x^2+y^2} \ge 0, \quad \rho \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin\varphi \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

然後按類比法逐次將極座標作用到 n 維球面上 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ 可推得

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1, \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

$$0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \theta_k \le \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-2, \qquad 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi.$$

可以將 $\theta_k, k=1,2,\ldots,n-2$ 視爲(所有的) 高低角, 是 k-軸的北極到南極因此範圍是 $[0,\pi)$, 而最後的角度 θ_{n-1} 則是水平角必須繞一圈才可覆蓋整個球面所以範圍是 $[0,2\pi)$。此時 n 維無窮小方塊的邊長爲

$$\begin{cases} ds_1 = dr, \\ ds_2 = r d\theta_1, \\ ds_3 = r\sin\theta_1 d\theta_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ ds_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}. \end{cases} \tag{4.5}$$

因爲球座標是一正交系統所以體積元是全部邊長的乘積

$$\begin{aligned} dV_n &= dx_1dx_2\cdots dx_n = ds_1ds_2\cdots ds_n \\ &= (r^{n-1}dr)(\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1)(\sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2)\cdots(\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2})(d\theta_{n-1}) \\ &= \frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{n-1} \\ &= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,drd\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

我們利用 (4.6) 重新得單位球體積

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \underset{0\le x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1}{\int\cdots\int} dV_n \\ &= \int_0^1 r^{n-1}dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1\cdot\int_0^\pi\sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1} \\ &= \frac{2\pi}{n}2^{n-2}W_1W_2\cdots W_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\Omega_{n-2} = \Omega_n. \end{aligned} \tag{4.7}$$

換句話說, Wallis 積分隨著球座標自然而然就出現。同理令 $r=1$ 由 (4.6) 也可以將單位球表面積表示爲 Wallis 積分之乘積

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{n-1}(1) &= \underset{x_1^2+\cdots+x_n^2=1}{\int\cdots\int} d\mathbb{S}^{n-1} \\ &= \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1\cdot\int_0^\pi\sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1} \\ &= 2\pi\cdot 2^{n-2}W_1W_2\cdots W_{n-2} = n\Omega_n = \omega_n. \end{aligned} \tag{4.8}$$

除了體積元 (4.6) 之外與 n 維球面上的面積元則是

$$dS_r = r^{n-1}(\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1)(\sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2)\cdots(\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2})(d\theta_{n-1}), \tag{4.9}$$

此時 n 維球面的立體角是

$$d\Omega = \frac{dS_r}{r^{n-1}} = (\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1)(\sin^{n-3}\theta_2 d\theta_2)\cdots(\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2})(d\theta_{n-1}). \tag{4.10}$$

如果把球面視爲圓錐體則 (4.10) 對整個球面積分就是 (4.8) , 我們也可以這麼說: n維球面的立體角是 Wallis 積分的乘積。

5. Wallis 無窮乘積

定理 5.1 (Wallis 無窮乘積)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots. \tag{5.1}$$

證明: 當 $0 < x < \pi$ 時 $0 \le \sin x \le 1$ 所以

$$\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x \quad\Longrightarrow\quad W_{2n+1} \le W_{2n} \le W_{2n-1}.$$

不等式兩邊同時除以 W_{2n+1}

$$1 \le \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \le \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$

取極限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k}\right) = 1. \tag{5.2}$$

由此再取倒數就是 Wallis 無窮乘積 (5.1) 。 □

與 Wallis 無窮乘積直接關聯的就是 Euler 著名的正弦函數之無窮乘積;

定理 5.2 (Euler 1748)**.**

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \tag{5.3}$$

如果令 $x = \frac{\pi}{2}$ 則由正弦函數的無窮乘積 (5.3) 可得 Wallis 無窮乘積;

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots = \frac{2}{\pi}.$$

左邊可以再分解爲

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots=\frac{2}{\pi},$$

或者

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

這個數的倒數就是 Wallis 無窮乘積。實際上 Euler 正弦函數的無窮乘積遠比 Wallis 無窮乘積來得更一般也更實用詳細的討論請參考 [11]。

註解:

(a) 藉由分部積分推得 Wallis 積分滿足遞迴公式, 我們觀察到不同次數的 Wallis 積分相差一個常數, 所以分部積分這個動作相當於乘積(product)。所以不難想像 Wallis 無窮乘積是 Wallis 積分經過無窮多次的分部積分而來的結果, 同樣的論證也出現在將瑕積分形式的 Γ-函數轉化爲高斯形式的無窮乘積。

(b) 細心觀察 Wallis 無窮乘積各項爲

$$\frac{2}{1},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{6}{5},\quad \frac{6}{7},\quad \cdots,$$

分別是大於 1、小於 1 交錯出現而且第 n 項趨近於 1, 這可以類比於交錯級數只要第 n 項趨近於 0 就可保證級數收斂。

(c) Wallis 無窮乘積可以表示爲

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}. \tag{5.4}$$

這相當於

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot2n}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=(-1)^n\binom{-1/2}{n}\approx\frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \tag{5.5}$$

(5.5) 有漂亮的機率解釋: 假設丟硬幣正面、反面的機率都是 $1/2$。當 n 相當大則丟 $2n$ 次硬幣剛好出現 n 次正面 n 次反面的機率趨近於 $\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$;

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\approx\frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

(d) 由 Wallis 乘積可以推得高斯–Poisson 積分。考慮函數 e^{-x^2} 的 n 次矩 (n-th moment)

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx, \tag{5.6}$$

則由分部積分可得遞迴關係

$$2I_n = (n-1)I_{n-2}\,, \qquad n \geq 2. \tag{5.7}$$

因為 $I_1 = \frac{1}{2}$ 所以由 (5.7) 可得

$$2^k I_{2k} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)I_0\,, \qquad 2I_{2k+1} = k!\,, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5.8}$$

但是

$$I_n^2 < I_{n-1}I_{n+1} \qquad \text{或} \qquad 2I_n^2 < nI_{n-1}^2,$$

則由 (5.8) 可得

$$\frac{(k!)^2}{4k+2} = \frac{2}{2k+1}I_{2k+1}^2 < I_{2k}^2 < I_{2k-1}I_{2k+1} = \frac{(k!)^2}{4k},$$

所以

$$I_{2k}^2 = \frac{(k!)^2}{4k+2}(1+\varepsilon_k)\,, \qquad 1 < \varepsilon_k < \frac{1}{2k},$$

所以再次由歸納法可得

$$2I_0^2 = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)]^2}{[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)]^2}(1+\varepsilon_k).$$

因為 $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ 所以由 Wallis 無窮乘積 (5.1) 可結論

$$2I_0^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{或} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

參考文獻

1. Amir Alexander, Infinitesimal: How a Dangerous Mathematics Theory Shaped the Modern World, Oneworld Publications, 2014.
   中譯本: 無限小; 一個危險的數學理論如何形塑現代世界。麥慧芬譯, 商周出版, 2015。
2. E. Artin, *The Gamma Function*, Dover Publications; Reprint edition, Jan. 28, 2015。

   看一本書一定要從《前言》(preface) 開始。E. Artin 在這本書的前言提到:

   《I feel that this monograph will help to show that the gamma function can be thought of as one of the elementary functions, and that all of its basic properties can be established using elementary methods of the calculus.》

有鑑於大部分的數學文獻與教科書將Γ-函數只是粗略的介紹而後是一大串複雜的計算, Emil Artin (1898∼1962) 特別從微積分的角度將Γ-函數視為基礎函數 (elementary function) 而非超越函數 (trancendental function) 並以不到 40 頁的篇幅將 Γ-函數作完整的介紹。我個人覺得 Artin 把寫作當成藝術, 這或許與他的家庭背景有關 (父親是藝術經銷商而母親是歌劇演唱家!)。讀者可以在這本小書體會數學與藝術的合一, 除了瞭解數學接受數學思想的薰陶之外更感受數學文化的魅力。這本書的前身 (德文版) 於 1931 在德國漢堡出版但要等到1964 年才有英譯本。Emil Artin 與 Emmy Noether (1882∼1935) 是現代抽象代數 (Abstract Algebra) 的創始人, 諷刺的是這兩位大師與 R. Courant(1888∼1972) 一樣因為其猶太背景 (Artin 的太太是猶太人), 受納粹壓迫不得不離開德國移民前往美國, Artin 與 Emmy Noether 都是哥廷根 (Göttingen) 傳統的代表性人物。一個不重視人才迫害知識分子的政權終必滅亡, 但是哥廷根優良的學術傳統將一去不返永遠離開德國。

3. Richard Courant and Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, II, Springer-Verlag New-York, Inc, 1989.
4. Peter Duran, *Invitation to Classical Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts; Vol. 17, American Mathematical Society, 2012.

   一開始接觸這本書就愛上它了, 作者隨時隨地會對相關的數學之歷史做簡短地介紹, 如果沒有一定的功力是絕對做不到。這本書與 [6]一樣都強調 Classical Analysis, 所謂古典分析一般是涵蓋歐拉的 Γ 與 Beta 函數、Euler-Maclaurin 公式、Stirling 公式、高斯的算術幾何平均(AMG) 與橢圓函數等通常數學分析或高等微積分教不到的主題。這些都非常有趣且重要, 我通常是藉由通俗演講與寫作來介紹這些主題並告訴學生除了 $\epsilon-\delta$ 之外、分析的世界遠遠有趣得多。

5. Laurent Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Hermann Paris, 1966.

   本書作者正是大名鼎鼎法國數學家 Laurent Schwartz (1915∼2002), 第二屆費爾茲獎 (Fields Medal) 得主。*Schwartz* 是一個典型猶太人的姓, Laurent Schwartz 出身書香門第, 其家族在醫學與科學上都有重要貢獻, 他的岳父是機率 (概率) 大師 Paul Lévy。Laurent Schwartz 主要貢獻就是廣義函數論 (generalized function) 或 distribution 理論。所以這本書主要是從廣義函數的角度來討論 Fourier 級數與 Fourier 變換, 另外書末還談 Γ-函數與 Bessel 函數。這是我第一次對這兩個特殊函數有特別情感的開始。這本書從頭到尾幾乎都是精華沒有贅言連習題都是精心選取, 我只能說這本書寫得非常法國 (高貴且優雅), 我所認識的幾位著名法國數學家對這本書都有極高之評價。Laurent Schwartz 曾於1980 年代訪問台灣, 他會來台灣是因為《台灣的蝴蝶谷》主要是他晚年也研究蝴蝶。他那時候的演講內容我完全忘了, 但是可以跟學生誇口的是:『我聽過 Laurent Schwartz 的演講!』

6. O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2007.
7. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998。中譯本: 毛起來說三角。鄭惟厚譯。天下文化出版, 2000。
8. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1962.

   第一次接觸到這本書一定會被書名的 Modern 所誤導, 實際上翻開一看比我所理解的古典 (Classical) 還要古典。無窮級數、Bessel 函數、Γ-函數、Beta 函數等一大堆特殊

函數, 說來好笑這些反而是數學系最陌生的主題。自己有很深刻的感觸似乎數學系已經被 ϵ–δ還有定義、定理、證明這種三段式的論證玩弄成半個白癡。這本書 1902 年就已面世, 以現在的眼光實在不能稱之爲 modern analysis, 我寧可稱它爲《*Hard Analysis*》。就我所知那些了不起的數學家年少的時候都有堅實的 Hard Analysis 之訓練也因此他們的研究生命特別長。甚至有不少物理學家 (諾貝爾獎得主) 也是深受此書的影響, 讀者若有志數學或物理之研究不妨嘗試這本書以培養自己《Hard Analysis》的功力。我保證絕對不吃虧, 這個賭注之期望值永遠大於 0。

9. 李文林。數學珍寶 — 歷史文獻精選。九章出版社, 2000。
10. 林義雄與林紹雄。理論分析 (上、下)。正中書局, 1982.

    正如 Bernoulli 兄弟、作者也是兄弟檔數學家。這是我所看過中文數學分析教科書最好的一套書, 本文所談的 Γ-函數與 Beta 函數在理論分析 (下) 有非常詳盡的論述, 並且附有豐富的習題。讀者有興趣研讀這個主題, 我會強烈推薦這套書。

11. 林琦焜。關於Euler 級數的幾個觀點。數學傳播季刊, 36(1), 16-36, 2012。
12. 林琦焜。圖解梯度、散度與旋度。數學傳播季刊, 39(2), 30-55, 2015。
13. 林琦焜。歷史轉折點的函數。數學傳播季刊, 45(3), 33-54, 2021。
14. 林琦焜。向量分析(第二版)。滄海書局 , 2022。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—