數學傳播 47卷1期, pp. 15-19

愛因斯坦對勞侖茲變換的簡單推導

張海潮

一、引言

愛因斯坦在1916年總結了他對 (廣義) 相對論探討的同時, 寫了一本小書《*Relativity: The Special and the General Theory*》(註一), 他在序言中說: 本書的目的是盡可能使那些因一般科學和哲學的觀點而對相對論感興趣、但不熟悉理論物理之數學工具的讀者, 對相對論有一個正確的認知。本書假定讀者已具備相當於大學入學考試的教育程度。(註二) 我們寫此文的目的, 並不是介紹本書的正文, 反而是引介本書的附錄一《勞侖茲變換的簡單推導》。(註三) 原來愛因斯坦在1905年發表第一篇有關 (狹義) 相對論的論文《論運動物體的電動力學》, 文中, 基於光速恆定原理, 推導出著名的勞侖茲變換。(註四)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1}$$

不過, 在 1905 年的文中, 愛氏的推導相當繁複, 因此他在 1916 年出版的這本小書的附錄一, 重新作了推導。推導時, 特別突顯了狹義相對論的基礎: 光速恆定原理。

所謂光速恆定原理, 簡單的說, 就是在任一個慣性系統量光速, 光速都是一樣的 (299792458公尺/秒), 與光源的速度無關。例如火車等速通過月台, 火車司機發出一束光, 則月台測得的光速和火車司機測得的光速是一樣的。

另外, 在此一簡化的推導中, 他引進了勞侖茲收縮, 再加上一點點對稱的論述而得到完整的勞侖茲變換。(同註三)

我們在下面對附錄一的重現, 多少加入一些輔助說明, 希望讀者能夠欣賞愛氏的想法。

二、推導過程的第一步

我們的宇宙是一個四維空間, 從觀測者的角度, 這個四維空間是由 $\{(x,y,z,t)\mid x,y,z,t$

$\in \mathbb{R}\}$ 代表, 其中任一 (x,y,z,t) 均稱爲一個事件, 即在 t 時間在 (x,y,z) 發生的一件事。現在有兩個觀測者, 月台與火車, 火車以等速通過月台, 我們要說明同一個事件從月台觀測的 (x,y,z,t) 和從火車觀測的 (x',y',z',t') 之間的轉換關係。

為了論述方便, 假設月台前的鐵軌是月台的 x 軸, 火車沿 x 軸向右以等速 v 前進, 火車本身是火車的 x' 軸, 因此 x 軸和 x' 軸重合, 進一步假設兩者的 y 和 y' 軸, z 和 z' 軸始終互相平行。並且 $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$ 時剛好是火車的 $(x',y',z',t')=(0,0,0,0)$ 如圖一所示:

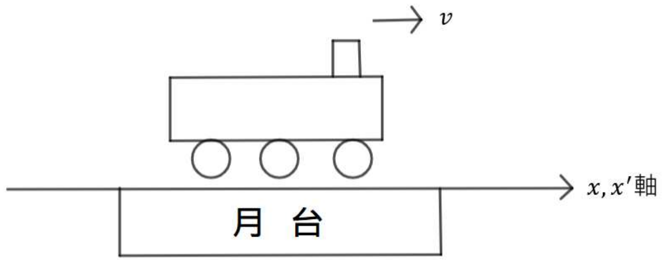

圖1

火車頭的位置永遠是 $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, $t'=t'$, 在月台看來火車頭是 $x=vt$, $y=0$, $z=0$, $t=t$。現在我們要求出 x,y,z,t 和 x',y',z',t' 之間的一個線性變換, 月台的 (0,0,0,0) 對到火車的 (0,0,0,0)。進一步我們可以先設(註五)

$$\begin{aligned} y'&=y,\\ z'&=z,\\ \begin{pmatrix} x'\\ t'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ t\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{2}$$

問題是, 如何決定 a,b,c,d ?

在這本小書的附錄一中愛因斯坦直接寫下

$$\begin{aligned} x'-ct'&=\lambda(x-ct),\\ x'+ct'&=\mu(x+ct). \end{aligned}\tag{3}$$

把 (2) 中本來要決定的四個未知數變成兩個, λ 和 μ。

爲何如此? 愛氏說因爲光速恆定原理, 若有一光線, 如圖一向右射出, 路徑將同時滿足 $x-ct=0$ 和 $x'-ct'=0$。當然, 若是向左射出, 則同時滿足 $x+ct=0$ 和 $x'+ct'=0$。(註六)

將 (3) 式, 代以火車頭的事件, $x'=0$, $t'=t'$ 及 $x=vt$, $t=t$。得到

$$\begin{aligned} -ct'&=\lambda(vt-ct),\\ ct'&=\mu(vt+ct). \end{aligned}$$

兩式相比, 得

$$-1 = \frac{\lambda(v-c)}{\mu(v+c)} \quad \text{或} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(c+v)}{(c-v)}. \tag{4}$$

因此, 還需要一個觀察, 來得到 λ, μ 另一個的關係式。

三、推導過程的第二步—勞侖茲收縮

愛因斯坦接著談到一把運動中的尺, 從靜止者看來, 長度的意義是什麼? 或者說怎麼去量一把運動的尺?

爲了方便說明, 我們來看看對月台而言, 火車的長度是什麼? 如果有旅客甲在火車上, 火車對甲是靜止的, 甲若量火車的長度, 就如同我們坐在家中, 量書桌的長度一樣單純。但是對月台上的站員乙, 若要量經過火車的長度, 乙得想一個合理的量法, 愛氏認爲合理的量法就是“同時”刻畫火車頭和火車尾在月台看到的位置。這個“同時”的操作非常重要, 在書中愛氏用“拍個快照”來形容這個“同時”刻畫火車頭尾的操作, 非常傳神。(註七)

因此我們從月台來“拍個快照”, 以 $\Delta t = 0$ 表示月台上的同時性。(註八)

從 (3) 式得到 (設 $\Delta t = 0$)

$$\begin{aligned} \Delta x' - c\Delta t' &= \lambda \Delta x, \\ \Delta x' + c\Delta t' &= \mu \Delta x. \end{aligned} \tag{5}$$

兩式相加, 得到

$$2\Delta x' = (\lambda + \mu)\Delta x,$$

或

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{2}{\lambda + \mu}, \tag{6}$$

亦即, 月台以“快照”得到火車的長度 Δx 和火車自己量的長度 $\Delta x'$ 之比爲 $\dfrac{2}{\lambda+\mu}$。(註九)

反之, 若將 (3) 式調整爲

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}(x' - ct') &= x - ct, \\ \frac{1}{\mu}(x' + ct') &= x + ct. \end{aligned}$$

現在, 火車要量月台的長度, 因此以 $\delta t' = 0$ 來表火車向月台拍快照, 即遵從火車上的同時性。

我們得到 ((5) 中的 Δ, 換成火車觀點的 δ)

$$\frac{1}{\lambda}\delta x' = \delta x - c\delta t,$$
$$\frac{1}{\mu}\delta x' = \delta x + c\delta t.$$

同理得到

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = \frac{2}{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}}. \tag{7}$$

(6) (7) 兩式都是快照 $\Delta x, \delta x'$ 與靜止長度之比, 因此, 基於對稱的考量

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{\delta x'}{\delta x},$$

或

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu},$$

而有

$$\lambda\mu = 1. \tag{8}$$

(8) 與 (4) 合併

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{c+v}{c-v}, \qquad \lambda\mu = 1,$$

解出

$$\lambda = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}. \tag{9}$$

回到 (3)

$$x' - ct' = \lambda(x - ct),$$
$$x' + ct' = \mu(x + ct).$$

兩式相加除以 2, 兩式相減除以 $2c$, 即得勞侖茲變換 (1), 計算省略。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

回到 (6)，月台快照火車長度與火車靜止長度之比$=\dfrac{2}{\lambda+\mu}$,

$$\lambda+\mu=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}+\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=\frac{2c}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

因此, 比值 $=\dfrac{2}{\lambda+\mu}=\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ 因爲 $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}<1$, 故稱此爲勞侖茲收縮。(同註九)

項武義教授常常說：任何一個論證都應反覆洗滌, 務求達到至精至簡, 如此方能顯示事物的本質。

這段話用來形容愛因斯坦對勞侖茲變換的重新證明非常貼切。

註一、中譯本名《相對論入門》, 譯者李精益, 台灣商務印書館2005, 本文有多處參照中譯本, 特此誌謝。

註二、原文本封面特別宣稱“With only a high school education, the reader can understand Albert Einstein's explanation of his epoch-making theory.”

註三、見中譯本附錄一頁 77∼82。

註四、此一論文之中譯, 見《愛因斯坦文集第二卷》新竹凡異出版社。

註五、見愛因斯坦 1905 論文(見註四), 並見《狹義相對論箚記》數學傳播, 2013 年 37 卷 1 期, 有關 (x,y,z,t) 和 (x',y',z',t') 之間爲何必須是線性變換的論述。

註六、其實從 x,t 改成 $x-ct$ 和 $x+ct$ 可以看成是一個自然的變數變換。而又配合光速恆定原理, 公式 (3) 也可想成是固有值和固有向量。

註七、見中譯本頁79。

註八、對月台異地同時的兩個事件, 對火車不會同時。比方 (5) 式中, $\Delta t=0$, 如果 $\Delta t'=0$ 則 $\dfrac{\Delta x'}{\Delta x}=\lambda$。但根據 (6) $\dfrac{\Delta x'}{\Delta x}=\dfrac{\lambda+\mu}{2}$, 又由 (9) $\lambda>\mu$。愛因斯坦很早就了解到同時性對兩個慣性系統的差異。

註九、$\dfrac{\Delta x}{\Delta x'}=\dfrac{2}{\lambda+\mu}$, 由 (9) $\lambda+\mu>2$, 因此 $\Delta x<\Delta x'$, 勞侖茲最早提出這個現象, 但只有愛因斯坦明白這個收縮的量測意義。即愛氏所稱的“快照”, 見中譯本頁 79。

—本文作者爲台大數學系退休教授—