數學傳播 46卷4期, pp. 103-104

三角形中線與高之間的兩個幾何不等式

丁遵標

摘要: 本文給出三角形中線與高之間關係的兩個幾何不等式。

關鍵字: 三角形、中線、高線、不等式。

本文約定: $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 a,b,c, 半周長爲 p, 面積爲 S, 外徑爲 R, 內徑爲 r, 三邊上的高依次爲 h_a、h_b、h_c, 三邊上的中線長依次爲 m_a、m_b、m_c, $\sum$ 表示迴圈和, $\prod$ 迴圈積。

匡繼昌教授在《常用不等式》一書中給出了如下的一個不等式:

$$\frac{m_a}{h_a}\geq\frac{(b+c)^2}{4bc},\ \text{僅當 } b=c \text{ 時等號成立。}$$

經過研究, 筆者現已得到這個不等式的上界估計:

定理1: $\dfrac{m_a}{h_a}\leq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}S}$。

證明: $\because$

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)^2-3a^2(2b^2+2c^2-a^2)\\
=&[(a^2+(b^2+c^2)]^2-6a^2(b^2+c^2)+3a^4\\
=&a^4+2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-6a^2(b^2+c^2)+3a^4\\
=&4a^4-4a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2=(2a^2-b^2-c^2)^2\geq 0,
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2)^2\geq 3a^2(2b^2+2c^2-a^2).$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3a^2(2b^2+2c^2-a^2)}.$$

$$\because\quad S=\frac{1}{2}ah_a\quad\therefore h_a=\frac{2S}{a}\qquad \text{又}\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$\therefore\quad \frac{m_a}{h_a}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\frac{2S}{a}}=\frac{a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{4S}=\frac{\sqrt{3a^2(2b^2+2c^2-a^2)}}{4\sqrt{3}S}$$

$$\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}S}\qquad\therefore\quad\frac{m_a}{h_a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}S}.$$

由平面幾何知識知：$m_a \geq h_a$,

這樣, 我們便可得到 Weitzenbook 不等式：$\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}S$ 的一個新的證法。

定理2: $\dfrac{9R(2R-r)}{2(5R-r)} \leq \dfrac{\sum m_a^2}{\sum h_a} \leq \dfrac{3R(2R^2+r^2)}{2(R+r)^2}$。

證明: $\because \prod a = 4Rrp, \quad h_a = \dfrac{2rp}{a}, \quad \sum ab = p^2+4Rr+r^2,$

$$\therefore \sum \frac{1}{a} = \frac{\sum ab}{\prod a} = \frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}.$$

$$\because m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2), \quad \sum a^2 = 2(p^2-4Rr-r^2),$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \frac{\sum m_a^2}{\sum h_a} &= \frac{\sum \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)}{\sum \frac{2rp}{a}} = \frac{\frac{1}{4}\sum(2b^2+2c^2-a^2)}{2rp\sum\frac{1}{a}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}\sum a^2}{2rp\cdot\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}} = \frac{\frac{3}{2}R\sum a^2}{p^2+4Rr+r^2} = \frac{3R(p^2-4Rr-r^2)}{p^2+4Rr+r^2} \\ &= \frac{3R(p^2+4Rr+r^2-8Rr-2r^2)}{p^2+4Rr+r^2} = 3R - \frac{3R(8Rr+2r^2)}{p^2+4Rr+r^2}.\end{aligned}$$

由 Gerretsen 不等式知:

$$16Rr-5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2,$$

$$\therefore \quad 3R - \frac{3R(8Rr+2r^2)}{(16Rr-5r^2)+4Rr+r^2} \leq \frac{\sum m_a^2}{\sum h_a} \leq 3R - \frac{3R(8Rr+2r^2)}{(4R^2+4Rr+3r^2)+4Rr+r^2};$$

即 $$\frac{9R(2R-r)}{2(5R-r)} \leq \frac{\sum m_a^2}{\sum h_a} \leq \frac{3R(2R^2+r^2)}{2(R+r)^2}.$$

由 Euler 不等式：$R \geq 2r$ 知

於是： $$\frac{9R(2R-r)}{2(5R-r)} = \frac{9R[(5R-r)-3R]}{2(5R-r)} = \frac{9}{2}R - \frac{27R^2}{2(5R-r)} \geq \frac{9}{2}R - \frac{27R^2}{2(5R-\frac{R}{2})} = \frac{3}{2}R.$$

於是, 我們便可得到：推論：$\dfrac{\sum m_a^2}{\sum h_a} \geq \dfrac{3}{2}R$。

參考文獻

1. 匡繼昌。常用不等式, 第 4 版。山東科學技術出版社 (M), 2010 年 10 月。

—本文作者任教中國安徽省舒城二中杭埠校區—