數學傳播 46卷4期, pp. 91-96

關於雙曲線與橢圓的兩個命題

戴立輝 · 蘇化明 · 陳　翔

設 AB 爲拋物線的弦, 分別過 A, B 作拋物線的切線相交於 P。$\triangle APB$ 的底邊 AB 上的中線與拋物線相交於 C。若 $S_{弓}$ 表示弦 AB 與拋物線所圍成拋物線弓形的面積, $S_{\triangle ACB}$, $S_{\triangle APB}$ 分別表示 $\triangle ACB$, $\triangle APB$ 的面積, 可以證明 (可參閱文獻 [1], [2], [3])

$$S_{\triangle ACB}=\frac{3}{4}S_{弓}=\frac{1}{2}S_{\triangle APB}, \tag{1}$$

其中 $S_{弓}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle APB}$ 即著名的阿基米德定理, 而 $\triangle ACB$ 是以 AB 爲底邊、頂點在曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上所有三角形面積的最大者。

受式 (1) 的啟發, 我們對雙曲線與橢圓進行了研究, 得到如下結果。

命題1: 設 A,B 爲雙曲線 (其中一支) 的弦, 分別過 A,B 作雙曲線的切線相交於 P。若 $S_{弓}$ 表示弦 AB 與雙曲線所圍成雙曲線弓形的面積, $S_{\triangle APB}$ 表示 $\triangle APB$ 的面積, $\triangle ACB$ 是以 AB 爲底邊而頂點在曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上所有三角形面積的最大者, 其值爲 $S_{\triangle ACB}$, 則有

$$S_{\triangle ACB}>\frac{3}{4}S_{弓}>\frac{1}{2}S_{\triangle APB}. \tag{2}$$

證明: 首先考慮雙曲線 $xy=1$ $(x>0,y>0)$ 的情形。

設 A,B 兩點的座標分別爲 $A(a,\dfrac{1}{a})$, $B(b,\dfrac{1}{b})$, 曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上動點 T 的座標爲 $T(x,\dfrac{1}{x})$, 其中 $0<a\le x\le b$。仍用 S 表示面積, 則

$$S_{\triangle ATB}=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1\\ x & \frac{1}{x} & 1\\ b & \frac{1}{b} & 1\end{vmatrix}.\ 記\ f(x)=\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1\\ x & \frac{1}{x} & 1\\ b & \frac{1}{b} & 1\end{vmatrix}\ (0<a\le x\le b),\ 則$$

$$f'(x)=\begin{vmatrix} a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{x^2} & 0 \\ b & \dfrac{1}{b} & 1 \end{vmatrix}=(b-a)\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{ab}\Big).$$

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=\sqrt{ab}$ 爲 $f(x)$ 當 $0<a\le x\le b$ 時的唯一駐點。

又 $f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}(b-a)<0$, 故 $x=\sqrt{ab}$ 爲 $f(x)$ 的唯一極大值點也是最大值點, 所以當 T 點座標爲 $\Big(\sqrt{ab},\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\Big)$ 時,

$$S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ \sqrt{ab} & \dfrac{1}{\sqrt{ab}} & 1 \\ b & \dfrac{1}{b} & 1 \end{vmatrix}=\frac{b-a}{2ab}\Big(\sqrt{b}-\sqrt{a}\Big)^2. \tag{3}$$

易知, 曲線 $xy=1$ 過點 $C\Big(\sqrt{ab},\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\Big)$ 的切線與弦 AB 平行。

由於過 A,B 兩點的直線方程爲

$$\frac{y-\dfrac{1}{a}}{x-a}=\frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{b-a} \qquad \text{或} \qquad y=-\frac{1}{ab}x+\frac{a+b}{ab},$$

從而

$$S_{弓}=\int_a^b\Big(-\frac{1}{ab}x+\frac{a+b}{ab}-\frac{1}{x}\Big)dx=\frac{b^2-a^2}{2ab}-\ln\frac{b}{a}. \tag{4}$$

由 $xy=1$ 知 $y=\dfrac{1}{x}$, $y'=-\dfrac{1}{x^2}$, 從而 $y=\dfrac{1}{x}$ 過 A,B 兩點的切線方程分別爲

$$\begin{aligned} y-\frac{1}{a}&=-\frac{1}{a^2}(x-a),\\ y-\frac{1}{b}&=-\frac{1}{b^2}(x-b). \end{aligned}$$

解此聯立方程組得兩條切線交點 P 的座標爲 $\Big(\dfrac{2ab}{a+b},\dfrac{2}{a+b}\Big)$, 從而

$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ \dfrac{2ab}{a+b} & \dfrac{2}{a+b} & 1 \\ b & \dfrac{1}{b} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2(a+b)}\begin{vmatrix} a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ 2ab & 2 & a+b \\ b & \dfrac{1}{b} & 1 \end{vmatrix},$$

經簡單計算知

$$S_{\triangle APB}=\frac{(b-a)^3}{2ab(a+b)}. \tag{5}$$

由式 (3), (4) 知不等式 $S_{\triangle ACB}>\frac{3}{4}S_{弓}$ 等價於

$$\frac{b-a}{2ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2>\frac{3}{4}\Big(\frac{b^2-a^2}{2ab}-\ln\frac{b}{a}\Big),$$

或

$$\frac{b-a}{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2-\frac{3}{4}\frac{b^2-a^2}{ab}+\frac{3}{2}\ln\frac{b}{a}>0,$$

或

$$\frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}}\Big(\sqrt{\frac{b}{a}}-1\Big)^2-\frac{3}{4}\frac{(\frac{b}{a})^2-1}{\frac{b}{a}}+\frac{3}{2}\ln\frac{b}{a}>0. \tag{6}$$

令 $\frac{b}{a}=x$, 則 $x\geq 1$ 且不等式 (6) 即爲

$$\frac{x-1}{x}(\sqrt{x}-1)^2-\frac{3}{4}\frac{x^2-1}{x}+\frac{3}{2}\ln x>0, \tag{7}$$

或

$$x-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln x>0,$$

即

$$x-\frac{1}{x}-8\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}+6\ln x>0. \tag{8}$$

令 $g(x)=x-\frac{1}{x}-8\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}+6\ln x (x\geq 1)$, 則

$$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{6}{x}=\frac{1}{x^2}(\sqrt{x}-1)^4.$$

故當 $x>1$ 時 $g'(x)>0$, $g(x)$ 單調遞增。又 $g(1)=0$, 所以當 $x>1$ 時 $g(x)>0$, 從而不等式 (8) 成立, 因此有

$$S_{\triangle ACB}=\frac{3}{4}S_{弓}. \tag{9}$$

由式 (4), (5) 知不等式 $\frac{3}{4}S_{弓}>\frac{1}{2}S_{\triangle APB}$ 等價於

$$\frac{3}{4}\Big(\frac{b^2-a^2}{2ab}-\ln\frac{b}{a}\Big)>\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{2ab(a+b)},$$

或

$$\frac{b^2-a^2}{2ab}-\frac{(b-a)^3}{3ab(a+b)}-\ln\frac{b}{a}>0. \tag{10}$$

令 $\dfrac{b}{a}=x$, 則 $x\geq 1$, 且不等式 (10) 即爲

$$\frac{x^2-1}{2x}-\frac{(x-1)^3}{3x(x+1)}-\ln x>0, \tag{11}$$

或

$$\frac{1}{6x(x+1)}(x^3+9x^2-9x-1)-\ln x>0. \tag{12}$$

令 $h(x)=\dfrac{1}{6x(x+1)}(x^3+9x^2-9x-1)-\ln x\ (x\geq 1)$, 則

$$h'(x)=\frac{1}{6x^2(x+1)^2}(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)=\frac{(x-1)^4}{6x^2(x+1)^2},$$

故當 $x>1$ 時 $h'(x)>0$, $h(x)$ 單調遞增。又 $h(1)=0$, 所以當 $x>1$ 時 $h(x)>0$, 從而不等式 (12) 成立, 因此有

$$\frac{3}{4}S_{弓}>\frac{1}{2}S_{\triangle APB}. \tag{13}$$

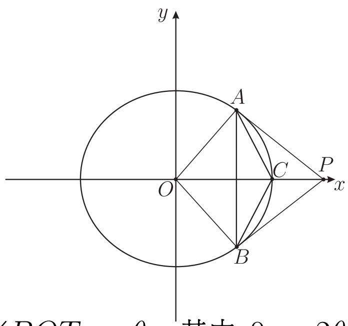
由式 (9), (13) 知, 當雙曲線爲 $xy=1$ 時不等式 (2) 成立。

利用坐標軸的旋轉變換：$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$ 可將方程 $xy=1$ 變換爲 $\dfrac{x'^2}{2}-\dfrac{y'^2}{2}=1$。再作座標壓縮變換：$\dfrac{x'}{x''}=\dfrac{\sqrt{2}}{p}$, $\dfrac{y'}{y''}=\dfrac{\sqrt{2}}{q}$ $(p>0,q>0)$, 則 $\dfrac{x'^2}{2}-\dfrac{y'^2}{2}=1$ 變換爲 $\dfrac{x''^2}{p^2}-\dfrac{y''^2}{q^2}=1$。注意到這兩種座標變換均爲可逆的, 而且這兩種變換不會改變直線和曲線的相切關係, 也不會改變兩個圖形之間的面積關係, 故由前面的證明知, 當雙曲線方程爲 $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=1$ 時命題 1 成立。

命題2: 設 AB 爲橢圓的弦, 分別過 A,B 作橢圓的切線相交於 P。若 $S_{弓}$ 表示弦 AB 與橢圓劣弧 (注) $\overset{\frown}{AB}$ 所圍成橢圓弓形的面積, $\triangle ACB$ 是以 AB 爲底邊而頂點在曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上所有三角形面積的最大者, 其值爲 $S_{\triangle ACB}$, 則有

$$S_{\triangle ACB}<\frac{3}{4}S_{弓}<\frac{1}{2}S_{\triangle APB}. \tag{14}$$

注: 橢圓劣弧即弧長小於橢圓半周長的弧。



證明: 首先考慮橢圓爲單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的情形。

如圖, 由圓的對稱性, 不妨設圓上的兩點 A, B 關於 x 軸對稱 ($\overparen{AB}$ 爲劣弧)。由平面幾何知識知, AB 上的動點 T 位於弧 $\overparen{AB}$ 的中點時, $\triangle ABT$ 的面積最大。

事實上, 設 $\angle AOB = 2\theta =$ 定值, $\angle AOT = \theta_1$, $\angle BOT = \theta_2$, 其中 $0 < 2\theta < \pi$, $\theta_1 + \theta_2 = 2\theta$, 則有

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABT} &= \frac{1}{2}\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\sin\theta_2 - S_{\triangle AOB} \\ &= \sin\theta\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta\cos\theta, \end{aligned}$$

由於 $S_{\triangle AOB}$ 爲定值, 故當且僅當 $\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ 最大時 $S_{\triangle ABT}$ 最大, 亦即 $\theta_1 = \theta_2$ 時 $S_{\triangle ABT}$ 最大, 亦即當且僅當 T 爲 AB 的中點時 $S_{\triangle ABT}$ 最大, 從而有

$$S_{\triangle ACB} = \sin\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin\theta(1 - \cos\theta). \tag{15}$$

經簡單計算知

$$S_{弓} = \theta - \sin\theta\cos\theta, \tag{16}$$

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}. \tag{17}$$

由式 (15), (16) 知不等式 $S_{\triangle ACB} < \frac{3}{4}S_{弓}$ 等價於

$$\sin\theta - \sin\theta\cos\theta < \frac{3}{4}\theta - \frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta,$$

亦即

$$\frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta - \sin\theta > 0. \tag{18}$$

令 $u(\theta) = \frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 則

$$u'(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2,$$

故當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $u'(\theta) > 0$, $u(\theta)$ 單調遞增. 又 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} u(\theta) = 0$, 從而當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $u(\theta) > 0$, 即不等式 (18) 成立, 因此

$$S_{\triangle ACB} < \frac{3}{4}S_{弓}. \tag{19}$$

由式 (16), (17) 知不等式 $\frac{3}{4}S_{弓} < \frac{1}{2}S_{\triangle APB}$ 等價於

$$\theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{2}{3}\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} < 0. \tag{20}$$

令 $v(\theta) = \theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{2}{3}\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 則

$$v'(\theta) = 1 - \cos 2\theta - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}(3\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta},$$

故當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $v'(\theta) < 0$, $v(\theta)$ 單調遞減。又 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} v(\theta) = 0$, 從而當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時 $v(\theta) < 0$, 即不等式 (20) 成立, 因此

$$\frac{3}{4}S_{弓} < \frac{1}{2}S_{\triangle APB}. \tag{21}$$

由式 (19), (21) 知當橢圓爲單位圓時不等式 (14) 成立。

對於橢圓 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ $(m > 0, n > 0)$, 作座標壓縮變換: $\frac{x}{x'} = m$, $\frac{y}{y'} = n$, 則橢圓 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 變換爲 $x'^2 + y'^2 = 1$. 由於座標壓縮變換不會改變直線與曲線的相切關係, 也不會改變兩個圖形之間的面積關係, 故由前所證知, 當橢圓方程爲 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 時命題 2 成立。

最後還要指出, 可以證明, 不等式 (2), (14) 中的常數 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 均爲最佳的, 亦即不可能再作改進 (證明過程這裏略去)。

參考文獻

1. 蘇化明, 黃有度。一個歷史名題的注記[J]。數學傳播季刊, 34(2), 76-81, 2010。
2. H. 德裏。100個著名的初等數學問題 [M]。上海: 上海科學技術出版社, 264-268, 1982。
3. 劉連璞。平面解析幾何方法與研究 (第二卷) [M]。哈爾濱: 哈爾濱工業大學出版社, 72-74, 2015。

—本文作者爲戴立輝, 陳翔任教中國閩江學院數學與數據科學學院, 蘇化明任教中國合肥工業大學數學學院—