數學傳播 46卷4期, pp. 85-90

托勒密-歐拉定理的向量代數證明

林開亮 · 陳見柯

在平面幾何中有著名的托勒密定理 (以古希臘數學家、天文學家托勒密命名):

定理 1 (托勒密定理)**.** 設四邊形 $ABCD$ 的四頂點 A,B,C,D 共圓, 則有

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC\ . \tag{1}$$

它通常用文字描述爲: 圓內接四邊形對角線的乘積等於兩組對邊的乘積之和。人們可以借助它得到三角函數正、餘弦的加 (減) 法公式、畢達哥拉斯定理等一系列的三角恒等式 [8, p.83]。蔡聰明教授在 [3] 中分享了新的觀察: 作者分別從畢氏定理、三角函數加 (減) 法公式和餘弦定理三個角度猜測托勒密發現定理 1 的過程, 並發出這樣的感慨:

> 對於(6) 式 [筆者注: 即本文的 (1) 式] 之猜測, 我們可以提出證明, 從而建立了定理 2 之托勒密定理。特別地, 畢氏定理是托勒密定理的特例, 但卻是生出托勒密定理的種子。一般數學書都只將畢氏定理看成是托勒密定理的腳註, 甚爲可惜!

[4] 和 [5] 從多個角度討論平面幾何中若干基本定理的內在聯繫。給定半徑爲 60 的圓, 托勒密通過三角函數的正餘弦加 (減) 法公式完成了以圓心角 0.5° 的細密度做出從 0° 到 180° 的弦表 [2], [8, pp.82-85]。托勒密定理的逆命題也成立: 如果一個四邊形的對角線的乘積等於兩組對邊的乘積之和, 則該四邊形內接於一個圓。一千多年以後, 偉大的歐拉又重新發現、並推廣了上述結果 [11, p.65]。

定理 2 (托勒密-歐拉定理)**.** 若 A,B,C,D 是平面上四個點, 則

$$AC\cdot BD\le AB\cdot CD+AD\cdot BC\ . \tag{2}$$

等式成立當且僅當 A,B,C,D 四點 (依此順序) 共圓或共線。

時至今日, 已有許多托勒密-歐拉定理的經典證明: 基於相似三角形、Simson 直線 [10, pp.225–228]、反演變換 [11, pp.154–156] 和複數[1]。爲了本文的需要, 我們給出基於反演變換和複數的證明。

[1] 在我們能夠查到的文獻裡, 儘管後續版本 (至少是從第三版) 的敘述略有不同, 哈代已經將基於複數的證明收錄在其 1908 年、第一版的經典著作 [12, p.102]中。

(i) (反演變換) 考慮以 D 為中心、以 r 為半徑的反演變換 (事實上 r 的大小並不要緊)。記 A', B', C' 依次為 A, B, C 的反演點。

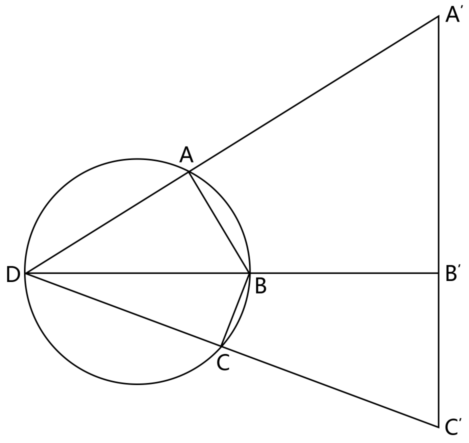
若 A, B, C 中任意兩點均不與 D 共線, 根據反演變換的定義, $\triangle DAB \sim \triangle DB'A'$, 此時有 $\dfrac{DA}{DB'} = \dfrac{DB}{DA'} = \dfrac{AB}{A'B'}$, 因此

$$A'B' = \frac{AB \cdot DA'}{DB} = \frac{AB \cdot DA' \cdot DA}{DB \cdot DA} = \frac{r^2 \cdot AB}{DA \cdot DB}\ .$$

類似地, 還可得到$A'C' = \dfrac{r^2 \cdot AC}{DA \cdot DC}$ 和 $B'C' = \dfrac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC}$。在 $\triangle A'B'C'$ (可能退化) 中, 由 $A'C' \leq A'B' + B'C'$ 可知[2]

$$\frac{r^2 \cdot AC}{DA \cdot DC} \leq \frac{r^2 \cdot AB}{DA \cdot DB} + \frac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC}\ .$$

即 $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$。等式成立當且僅當 A', B', C' 共線。此時, 由 $\angle A' = \angle ABD$ 和 $\angle C' = \angle CBD$ 可知 $\angle ADC + \angle ABC = \pi$, 即 A, B, C, D 四點共圓。



考慮退化情形, 不妨設 D, A, B 共線, 則 DAB 不能構成三角形。此時只需將上述 $A'B'$ 的計算做如下修改即可, 事實上

$$A'B' = DA' - DB' = \frac{r^2}{DA} - \frac{r^2}{DB} = \frac{r^2 \cdot AB}{DA \cdot DB}\ .$$

等式成立當且僅當 C', B', A' 共線。根據反演變換的性質以及 D, A, B 共線的假設, 這等價於 D, A, B, C 共線。

[2]若採用其它形式的三角不等式 (例如 $A'B' \leq A'C' + C'B'$), 則可以得到相應的不等式表述 (例如 $AB \cdot CD \leq AC \cdot BD + AD \cdot BC$); 但它們均與定理 2 等價。

(ii) (複數) 將平面上 A, B, C, D 依次記爲複平面上 z_1, z_2, z_3, z_4。注意到代數恒等式

$$(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3). \tag{3}$$

由三角不等式可知,

$$\begin{aligned} |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \\ &\leq |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|. \end{aligned}$$

從而

$$|z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4| \leq |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3|. \tag{4}$$

下面刻畫等式成立的條件。注意到

$$\begin{aligned} \text{等式 (4) 成立 } &\Leftrightarrow \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right)}{\left(\dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right)} \in \mathbb{R}^-, \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) - \arg\left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \equiv \pi \pmod{2\pi}, \\ &\Leftrightarrow z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ (依此順序) 共圓或共線。} \end{aligned}$$

若忽略點與點的相對位置關係、單純考慮複平面上四點共圓 (共線) 的問題, 正如 [11, 推論2.2.2] 所指明的, 點 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 共圓 (共線) 當且僅當交比

$$(z_2, z_4; z_1, z_3) = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \in \mathbb{R}。$$

1940 年, Schoenberg 在 [15] 中指出, 托勒密-歐拉定理可以推廣到一般的歐氏空間, 即

定理 3 (歐氏空間的托勒密-歐拉定理)**.** 設 z_1, z_2, z_3, z_4 是 n 維歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 中的四個向量, 則

$$\|z_1 - z_3\| \cdot \|z_2 - z_4\| \leq \|z_1 - z_2\| \cdot \|z_3 - z_4\| + \|z_1 - z_4\| \cdot \|z_2 - z_3\| . \tag{5}$$

等式成立當且僅當四點 z_1, z_2, z_3, z_4 (依此順序) 共圓或共線。

這個結果目前至少有三個證明, Apostol [7] 和 Schoenberg [15] 給出的幾何證明(將高維空間情形歸結爲平面情形), 以及 Klamkin 和 Meir [14] 所指引的不依賴於空間維數的向量證明。回顧平面情形的兩種證明, 不難發現, 基於反演變換的證明可以推廣至高維情形(僅有的區別是, 平面情形裡, 不過反演點的直線和過反演點的圓之間的互換, 變成了高維情形裡, 不過反演點的平面和過反演點的球面的互換。Dieudonné 將定理 3 作爲問題收錄於 [9, 問題 6.2.4], 並給出基於單位球面上反演變換的提示。

下面給出一個其它證明, 它完全平行於上述定理 2 的基於複數的證明, 但加入了新的元素。我們的出發點仍然是那個神奇的代數恒等式 (3)。若 z_1, z_2, z_3, z_4 是歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 的向量, 恒等式 (3) 通常來說不再成立, 因爲向量之間沒有恰當的乘法。爲此, 需要將 (3) 中的複數乘法視作內積運算, 並注意到 $(z_2-z_4)^T z_3 = z_3^T(z_2-z_4)$ 和 $z_2^T z_4 = z_4^T z_2$, 此時有

$$(z_1-z_3)^T(z_2-z_4) = (z_1-z_2)^T(z_3-z_4) + (z_1-z_4)^T(z_2-z_3)\ .$$

此處 $(z_1-z_3), (z_2-z_4)$ 均爲行向量(其它類似), $(z_1-z_3)^T$ 表示 (z_1-z_3) 的轉置。考慮到等式成立僅需運算的交換性, 故可將這種構造推廣至如下情形:

$$(z_1-z_3)^T S(z_2-z_4) = (z_1-z_2)^T S(z_3-z_4) + (z_1-z_4)^T S(z_2-z_3)\ . \tag{6}$$

此處 S 是一個 n 階實對稱矩陣。現在可以對歐氏空間中的托勒密 - 歐拉定理給出一個證明。

證明: 爲證明定理 3, 需要選擇恰當的 S。注意到, 我們期望有

$$|(z_1-z_3)^T S(z_2-z_4)| = \|z_1-z_3\|\cdot\|z_2-z_4\|\ .$$

根據歐氏空間數量積的 Cauchy–Schwarz 不等式, 這個 S 需要滿足以下條件: 將 z_2-z_4 映射到 z_1-z_3 的一個標量倍[3], 而且 S 保持向量的長度不變。這樣的 S 有一個自然的選擇。令 $\alpha = \dfrac{z_2-z_4}{\|z_2-z_4\|}, \beta = \dfrac{z_1-z_3}{\|z_1-z_3\|}$。若 $\alpha=\beta$, 只需令 $S=\mathbf{I}$, 其中 $\mathbf{I}$ 爲 n 階單位矩陣; 若 $\alpha\neq\beta$, 則可取 S 爲歐氏空間的一個鏡面反射:

$$S = \mathbf{I} - 2\eta\eta^T\ ,$$

其中 $\eta = \dfrac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}$。容易驗證 S 是 n 階正交矩陣 (從而保持向量的長度), S 對稱, 而且$S\alpha=\beta$。

對 (6) 式兩邊取絕對值, 有

$$\begin{aligned}|(z_1-z_3)^T S(z_2-z_4)| &= |(z_1-z_2)^T S(z_3-z_4) + (z_1-z_4)^T S(z_2-z_3)|\\ &\le |(z_1-z_2)^T S(z_3-z_4)| + |(z_1-z_4)^T S(z_2-z_3)|.\end{aligned} \tag{7}$$

根據 Cauchy–Schwarz 不等式以及S的保長性, 有

$$\|z_1-z_3\|\cdot\|z_2-z_4\| \le \|z_1-z_2\|\cdot\|z_3-z_4\| + \|z_1-z_4\|\cdot\|z_2-z_3\|\ . \tag{8}$$

下面考慮等式成立的條件。注意到

$$\text{等式 (7), (8) 成立} \Leftrightarrow \begin{cases} S(z_2-z_3) = \dfrac{\|z_2-z_3\|}{\|z_1-z_4\|}(z_1-z_4),\\ S(z_3-z_4) = \dfrac{\|z_3-z_4\|}{\|z_1-z_2\|}(z_1-z_2),\end{cases}.$$

[3]爲了簡化下面的討論, 我們要求 $S(z_2-z_4)$ 與 (z_1-z_3) 同向。事實上, 這裡只需要 $S(z_2-z_4)$ 與 (z_1-z_3) 線性相關。

由 $(z_2 - z_4) = (z_2 - z_3) + (z_3 - z_4)$ 可知,

$$\frac{\|z_2 - z_4\|}{\|z_1 - z_3\|}(z_1 - z_3) = \frac{\|z_2 - z_3\|}{\|z_1 - z_4\|}(z_1 - z_4) + \frac{\|z_3 - z_4\|}{\|z_1 - z_2\|}(z_1 - z_2)\ .$$

這意味著$(z_1 - z_3)$可被$(z_1 - z_4)$和$(z_1 - z_2)$線性表示, 即 z_1, z_2, z_3, z_4 共面。結合等式的數量關係可知, 等式 (5) 成立, 等價於按照 z_1, z_2, z_3, z_4 (依此順序) 共圓或共線。證畢。

就上述構造, 我們給出兩點補充說明:

(1) 鏡面反射是歐氏空間裏一類常見的正交變換: 給定單位向量 η, 鏡面反射 $S = \mathbf{I} - 2\eta\eta^T$ 將與 η 平行的向量反向, 將與 η 垂直的向量保持不動 (即: 在與 η 垂直的超平面上爲恒等變換)。關於鏡面反射的一個基本的結果是: 給定歐氏空間中任意兩個單位向量 α, β, 正如證明中的構造, 總存在一個鏡面反射 S, 使得 $S(\alpha) = \beta$ (可參考 [1])。另外, 給定某線性變換, 若其在某個超平面上爲恒等變換, 並將某個向量反向; 若再添加適當的條件, 人們可以期待此線性變換就是鏡面反射; 爲此, 一個基本的結果可見於 [13, 引理 9.1]。

(2) 定理 3 及其證明可以推廣至一般的內積空間。

(3) 1983 年, 臺灣中央研究院數學所的許振榮教授曾用了大量篇幅尋求托勒密不等式的三維推廣的解析證明, 但未得到滿意的結果。在其文章 [6] 結尾, 他寫道: “到現在爲止, 筆者還未得到四點爲一四面體之頂點時托勒密不等式的直接(即不利用關於在一平面上的四點的托勒密不等式的) 且簡單的解析證明。如果能得到這樣的證明, 相信必爲相當有趣。” 我們這個證明, 可以看作是對許教授文章的一個回應。

参考文獻

1. 北京大學數學系前代數小組 (編), 王萼芳、石生明 (修訂)。高等代數 (第四版)。高等教育出版社, 北京, 2016。
2. 蔡聰明。星空燦爛的數學 (I) —— 托勒密如何編製弦表? 數學傳播季刊, 23(2), 57–67, 1999。
3. 蔡聰明。星空燦爛的數學 (II) —— 托勒密定理。數學傳播季刊, 24(1), 44–55, 2000。
4. 蔡聰明。五合一定理。數學傳播季刊, 41(4), 60-68, 2017。
5. 連威翔。回響: 托勒密定理的證明補充。數學傳播季刊, 43(2), 80-83, 2019。
6. 許振榮。關於 Ptolemy 的定理。數學傳播季刊, 27, 15-29, 1983。
7. T. M. Apostol, Ptolemy's inequality and the chordal metric, *Mathematics Magazine*, 40, 233-235, 1967.
8. M. R. Cohen and I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science*. Harvard University Press, 1948.
9. J. Dieudonné, *Éléments D'analyse, Fondements de L'analyse Moderne* (*Tome I*). Chez Academic Press, 1979.
10. Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol.2 (Books III-IX) (Translated by Heath T. L.), Cambridge University Press, Cambridge, 1908.

11. L. S. Hahn, *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.
12. G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
13. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (Third Printing, Revised), GTM 9. Spring-Verlag, 1980. 中譯本 陳志傑 (譯) 曹錫華 (校)《李代數及其表示理論導引》上海科學技術出版社, 1981.
14. M. S. Klamkin and A. Meir, Ptolemy's inequality, chordal metric, multiplicative metric. *Pacific Journal of Mathematics*, 101, 389-392, 1982.
15. I. J. Schoenberg, On metric arcs of vanishing Menger curvature, *Annals of Mathematics*, 41, 715-726, 1940.

—本文作者林開亮任教西北農林科技大學理學院, 陳見柯任教中國傳媒大學數據科學與智能媒體學院—