數學傳播 46卷4期, pp. 74-84

回響：再從垂心面積比 123 問題的另解談起

連威翔

一、前言

在數學傳播 42 卷 1 期的文章 [1] 中, 筆者介紹了自己對底下問題的另解:

問題1: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=\,?$

此問題最初的出處與解法, 請參考數學傳播 30 卷 2 期的 [2] 文。

然而, 在數學傳播 43 卷 1 期裡面, 出現了一篇回應筆者作品 [1] 的文章, 請參考 [3]。在 [3] 文中, 作者先將問題 1 巧妙地命名爲「垂心面積比 123 問題」, 接著建立其文章標題所提到的「三角形的 A.S.A. 面積公式」並給出問題 1 的另解。隨後, 作者還證明了兩個重要定理, 並給出與兩定理相關的應用, 其中的一個定理如下:

定理1: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r$, 則

$$a:b:c=\sqrt{p(q+r)}:\sqrt{q(r+p)}:\sqrt{r(p+q)}. \tag{1}$$

套用定理 1 的公式 (1), 就可以輕鬆解決問題 1。

在 [3] 文中, 作者稱定理 1 爲「垂心面積比的邊長逆向公式」, 其公式指的就是 (1) 式, 利用它可由面積比 $p:q:r$ 推得三邊長比 $a:b:c$ (註1)。作者在 [3] 文中證明定理 1 的方法, 主要是使用上面提到的「三角形的 A.S.A. 面積公式」以及該文中的另一個重要定理：「垂心面積比的正切定理」(此定理的內容亦可參考本文第四節)。

因爲受到 [3] 文的激勵, 筆者也透過相似形再次找出了對問題 1 的另解, 其過程請見第二節。除此之外, 若將問題 1 中的面積比條件一般化, 以相同手法推導還可得到定理 1 的另證, 這部分的內容將於第三節中呈現。接著在第四節中, 筆者將先介紹一個意外的發現, 而在隨後的第五節, 筆者將把第四節所發現的結果予以推廣。接近尾聲的第六節, 我們將會解一個由第五節內容所延伸出來的初等數論問題。

二、問題 1 的另解：使用相似形

筆者對問題 1 (垂心面積比 123 問題) 進行研究過後, 所找到的另解如下:

解法: 請先參考下圖:

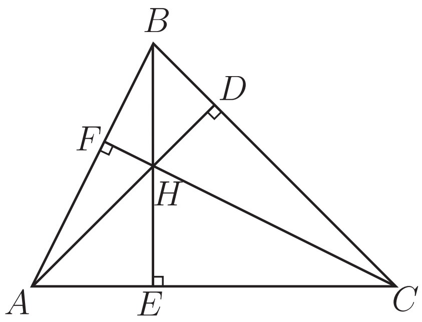

圖1

計算上圖中 $\triangle ABH$, $\triangle CBH$ 的面積時, 如果兩三角形同時以 $\overline{BH}$ 爲底, 則相應的高分別爲 $\overline{AE}$, $\overline{CE}$, 此時可列出 $\triangle ABH$, $\triangle CBH$ 的面積關係式如下:

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BH}\cdot\overline{AE}}{\frac{1}{2}\overline{BH}\cdot\overline{CE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}},$$

以上式搭配問題 1 的面積比條件, 可得

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\frac{1}{2}, \tag{2}$$

從而可寫下 $\overline{AE}$, $\overline{CE}$ 的長度表達式如下:

$$\overline{AE}=\frac{1}{1+2}\overline{AC}=\frac{1}{3}b, \tag{3}$$

$$\overline{CE}=\frac{2}{1+2}\overline{AC}=\frac{2}{3}b. \tag{4}$$

與 (2) 式同理, 觀察圖 2 後還可列出

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\triangle BCH}{\triangle ACH}=\frac{2}{3}, \qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\triangle CAH}{\triangle BAH}=\frac{3}{1},$$

從而與 (3), (4) 兩式同理, 可寫下

$$\overline{AF}=\frac{3}{2+3}\overline{AB}=\frac{3}{5}c, \tag{5}$$

$$\overline{CD}=\frac{3}{3+1}\overline{BC}=\frac{3}{4}a. \tag{6}$$

利用 AA 相似性質, 可知圖 1 中有 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ 與 $\triangle CBE \sim \triangle CAD$ 的相似關係, 由相似形對應邊長成比例的性質, 可列出底下兩式:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}},\qquad \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}.$$

將 (3), (4), (5), (6) 四式的結果代入上述兩式後, 可得

$$\frac{\frac{1}{3}b}{c}=\frac{\frac{3}{5}c}{b},\qquad \frac{\frac{2}{3}b}{a}=\frac{\frac{3}{4}a}{b},$$

兩式經整理後分別爲

$$c^2=\frac{5}{9}b^2,\qquad a^2=\frac{8}{9}b^2.$$

因此可得底下的比例式:

$$a^2:b^2:c^2=\frac{8}{9}b^2:b^2:\frac{5}{9}b^2=8:9:5,$$

故解得 $a:b:c=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}$, 至此即完成問題 1 的另解。

三、定理 1 的另證

完成問題 1 的另解後, 我們可進一步將該問題中所敘述的面積比條件一般化, 改爲

$$\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r, \tag{7}$$

並使用相同手法寫下對定理 1 的另證。令上式中 p, q, r 三數爲正數, 此時請參考下圖:

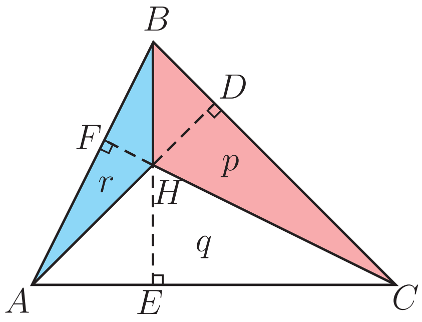

圖2

注意上圖中所標示的 p,q,r 並非指所在三角形的絕對面積, 而是相對面積 (註2)。

參考上一節中問題 1 的解法, 我們可仿照列出 (2) 式時所用的想法來列出底下三式 :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{r}{p},\qquad \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{p}{q},\qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{q}{r},$$

從而有

$$\overline{AE}=\frac{r}{r+p}\overline{AC}=\frac{r}{r+p}b, \tag{8}$$
$$\overline{CE}=\frac{p}{r+p}\overline{AC}=\frac{p}{r+p}b, \tag{9}$$
$$\overline{AF}=\frac{q}{p+q}\overline{AB}=\frac{q}{p+q}c, \tag{10}$$
$$\overline{CD}=\frac{q}{q+r}\overline{BC}=\frac{q}{q+r}a. \tag{11}$$

與圖 1 相同, 圖 2 中也有 $\triangle ABE\sim\triangle ACF$ 與 $\triangle CBE\sim\triangle CAD$ 的相似關係以及對應邊長成比例的關係式如下:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}},\qquad \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}.$$

將 (8), (9), (10), (11) 四式的結果代入上述兩式, 可得

$$\frac{\frac{r}{r+p}b}{c}=\frac{\frac{q}{p+q}c}{b},\qquad \frac{\frac{p}{r+p}b}{a}=\frac{\frac{q}{q+r}a}{b},$$

兩式經整理後分別可寫成

$$c^2=\frac{r(p+q)}{q(r+p)}b^2,\qquad a^2=\frac{p(q+r)}{q(r+p)}b^2,$$

因此可得底下的比例式:

$$a^2:b^2:c^2=\frac{p(q+r)}{q(r+p)}b^2:b^2:\frac{r(p+q)}{q(r+p)}b^2=p(q+r):q(r+p):r(p+q),$$

或者寫成

$$a:b:c=\sqrt{p(q+r)}:\sqrt{q(r+p)}:\sqrt{r(p+q)}.$$

這樣我們就完成了定理 1 的另證。

四、關於圖 1 的精確繪製

在 [3] 文中, 作者所介紹的「垂心面積比的正切定理」, 其內容如下:

定理2: 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則

$$\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=\tan A:\tan B:\tan C. \tag{12}$$

其證明也請參考 [3], 其參考圖形則可利用上節圖 2。

若讀者有仔細讀過 [3] 文, 應可發現定理 2 在該文中扮演了重要的角色。不過, 在本文的寫作過程中, 正當筆者煩惱著該如何精確繪製第二節一開始的圖 1、使其滿足問題 1 的條件

$$\triangle ABH : \triangle BCH : \triangle CAH = 1 : 2 : 3 \tag{13}$$

但卻苦無良方時, 竟意外發現定理 2 可於繪圖時提供很大的幫助。

怎麼說呢? 我們先將 (13) 式改寫爲

$$\triangle BCH : \triangle CAH : \triangle ABH = 2 : 3 : 1, \tag{14}$$

此時若以 (14) 式配合定理 2 的 (12) 式, 可得

$$\tan A : \tan B : \tan C = 2 : 3 : 1. \tag{15}$$

有了 (15) 式之後, 筆者發現只要配合另外一個定理, 就可以幫助我們精確畫出圖 1, 此定理的敘述與證明如下:

定理3: 若 $\triangle ABC$ 的三內角均不爲直角, 則其三內角正切值 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 滿足

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C. \tag{16}$$

證明: 因爲 $A + B = \pi - C$, 且 $\pi - C$ 不爲直角, 可知

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C).$$

利用正切函數的和角公式及補角關係, 可將上式改寫爲

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C, \tag{17}$$

將 (17) 式的兩邊同乘 $1 - \tan A \tan B$ 再移項整理後, 即可得 (16) 式, 證畢 (註3)。

有了定理 3 後, 我們先利用 (15) 式假設

$$\tan A = 2k, \qquad \tan B = 3k, \qquad \tan C = k,$$

因爲 (12) 式中提到的三內角 A, B, C 均爲銳角, 可知 $k > 0$。將上面三個正切值代入 (16) 式, 可得方程式 $6k = 6k^3$, 此方程式符合 $k > 0$ 條件的唯一解爲 $k = 1$, 因此就有

$$\tan A = 2, \qquad \tan B = 3, \qquad \tan C = 1.$$

注意在 [3] 文中, 作者也以「三角形的 A.S.A. 面積公式」解出了這三個正切值, 而此處筆者則是借助定理 2 與定理 3 求出。

回到原本的繪圖問題, 在解得上述三個正切值之後, 當我們使用筆與尺規或繪圖軟體繪製圖 1 時, 只要確定在畫出三角形的高 $\overline{BE}$ 之後, 它與 $\overline{AE}$, $\overline{CE}$ 兩線段滿足底下的長度比:

$$\overline{AE}:\overline{BE}:\overline{CE}=1:2:2,$$

就可得到 $\tan A=2$, $\tan C=1$。接著, 只要將 $\tan A=2$, $\tan C=1$ 代入 (16) 式, 可解得 $\tan B=3$, 因此 (15) 式成立。再將 (15) 式與定理 2 的 (12) 式配合, 即可確定我們所繪的圖符合 (14) 式的面積比條件, 從而畫出符合問題 1 條件的 $\triangle ABC$ 。

五、三內角 A,B,C 與面積比 $p:q:r$ 的關係

看完上一節的內容後, 我們還可以作進一步的探討。再次引入定理 1 的面積比條件如下：

$$\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r, \tag{18}$$

其中令 p,q,r為正數, 而 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心。以上式配合定理 2 的 (12) 式, 可得

$$\tan A:\tan B:\tan C=p:q:r, \tag{19}$$

利用上式假設

$$\tan A=pk, \tag{20}$$

$$\tan B=qk, \tag{21}$$

$$\tan C=rk, \tag{22}$$

其中仍有 $k>0$ 的條件。接著再次利用定理 3 的結論, 將上述三式代入 (16) 式可得

$$(p+q+r)k=pqrk^3,$$

上式唯一符合 $k>0$ 條件的解是

$$k=\sqrt{\frac{p+q+r}{pqr}}, \tag{23}$$

此時, 將 (23) 式代回 (20), (21), (22) 三式, 我們就得到底下的結果:

定理4: 令 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r$, 則

$$(\tan A,\tan B,\tan C)=\left(\sqrt{\frac{p(p+q+r)}{qr}},\sqrt{\frac{q(p+q+r)}{rp}},\sqrt{\frac{r(p+q+r)}{pq}}\right). \tag{24}$$

關於上述定理的結論, 我們也可使用反正切函數 $\tan^{-1} x$, 將上式改寫爲

$$(A,B,C)=\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{p(p+q+r)}{qr}},\tan^{-1}\sqrt{\frac{q(p+q+r)}{rp}},\tan^{-1}\sqrt{\frac{r(p+q+r)}{pq}}\right).$$

原本由 (18) 式的條件配合 (12) 式, 我們只知道 (19) 式中 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 三數之比爲 $p:q:r$, 但 (24) 式則進一步告訴我們 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 三數如何以 p,q,r 三數來表示, 也可說是補上了一塊拼圖。

六、一個數論問題的解

有了 (24) 式的結果後, 再回顧第四節最後所得之三個簡單的正切值:

$$\tan A=2,\qquad \tan B=3,\qquad \tan C=1.$$

此時, 筆者心中浮現了一個問題:

問題 2: 已知 p,q,r 爲正整數, 試問可使 (24) 右式三個根號內的數

$$\frac{p(p+q+r)}{qr},\qquad \frac{q(p+q+r)}{rp},\qquad \frac{r(p+q+r)}{pq}$$

均爲整數的解 (p,q,r) 共有哪些?

會考慮問題 2, 是因爲若 p,q,r 符合該問題的條件, 則此時 (24) 式的右式可化爲較簡單的表達式。不過接下來, 筆者想把條件設得更強一些, 改考慮底下的問題:

問題 3: 已知 p,q,r 三正整數的最大公因數爲 1, 試問: 可使

$$\frac{p+q+r}{qr},\qquad \frac{p+q+r}{pr},\qquad \frac{p+q+r}{pq}$$

三數均爲整數的解 (p,q,r) 共有哪些?

顯然, 符合問題 3 所求的解 (p,q,r) 都會是問題 2 的解。而問題 3 的開頭之所以比問題 2 多了「p,q,r 之最大公因數爲 1」的條件, 主要是因爲 (24) 式的結果來自於 (18) 式, 當 p,q,r 爲正整數時, 我們可先行假設 (18) 式中的 $p:q:r$ 已化爲最簡正整數比。

現在開始找尋問題 3 的解答。令正整數 p,q,r 符合問題 3 所求, 不失一般性, 可再令正整數 p,q,r 滿足

$$1\le p\le q\le r \tag{25}$$

的條件。因爲 $\dfrac{p+q+r}{qr}$ 爲正整數, 可知 qr 整除 $p+q+r$, 亦即存在正整數 k 滿足

$$p+q+r=kqr.$$

因爲 $k \geq 1$, 可知有

$$p+q+r = kqr \geq qr,$$

取上式的頭尾, 將所得之不等式改寫爲

$$qr - q - r + 1 \leq p + 1,$$

再分解因式得

$$(q-1)(r-1) \leq p+1. \tag{26}$$

此時若 $q \geq 3$, 則 $q-1 \geq 2$, 由 (26) 式可知

$$p+1 \geq (q-1)(r-1) \geq 2(r-1) = 2r-2,$$

又由 (25) 式知 $r+1 \geq p+1$, 因此就有

$$r+1 \geq p+1 \geq 2r-2.$$

取上式的頭尾, 化簡後可得 $r \leq 3$, 又因爲 $r \geq q \geq 3$, 可知 $r = q = 3$。將 $r = q = 3$ 代入 (26) 式, 得 $p \geq 3$, 又因爲 $p \leq q = 3$, 可知 $p = 3$, 此時可得解

$$(p,q,r) = (3,3,3).$$

但此解不符合問題 3 前提中 p, q, r 三數之最大公因數爲 1 的設定, 因此可知在 $q \geq 3$ 的條件下無法求得任何符合問題 3 所求的解。

所以, 接下來我們只需考慮 $q \leq 2$ 的情形, 即只需考慮 $q = 1$ 或 $q = 2$。討論如下:

(a) 若 $q = 1$, 因爲 $p \leq q \leq 1$ 且 $p \geq 1$, 知 $p = 1$。此時, 因爲 $\dfrac{p+q+r}{qr}$ 爲正整數且

$$\frac{p+q+r}{qr} = \frac{r+2}{r} = 1 + \frac{2}{r},$$

可知 $r = 1$ 或 $r = 2$, 得底下符合問題 3 條件的兩組解:

$$(p,q,r) = (1,1,1), (1,1,2). \tag{27}$$

(b) 若 $q = 2$, 因爲 $p \leq q \leq 2$, 可知 $p = 1$ 或 $p = 2$。當 $p = 1$ 時, 因爲 $\dfrac{p+q+r}{pr}$ 爲正整數且

$$\frac{p+q+r}{pr} = \frac{r+3}{r} = 1 + \frac{3}{r},$$

可知 $r = 1$ 或 $r = 3$。因爲 $r \geq q = 2$, 可確定 $r = 3$, 而得符合問題 3 條件的一組解

$$(p,q,r) = (1,2,3). \tag{28}$$

當 $p=2$ 時, 因爲 $\dfrac{p+q+r}{qr}$ 爲正整數且

$$\frac{p+q+r}{qr}=\frac{r+4}{2r}=\frac{1}{2}+\frac{2}{r},$$

可求得僅 $r=4$ 符合所求 (註4), 因此得到

$$(p,q,r)=(2,2,4).$$

但因爲此解中 p,q,r 三數的最大公因數爲 2, 故此解不符所求。

經過以上的討論, 我們於 (27), (28) 兩式得到在 $p\le q\le r$ 之設定下的三組解。由這三組解出發, 考慮排列 1, 1, 2 三數所得的三組解與排列 1, 2, 3 三數所得的六組解, 加上不須考慮排列的 1, 1, 1 之後, 就得到所有符合問題 3 所求的 10 組解 (p,q,r)。

首先, 在上述的 10 組解中, 若我們取源自於 (28) 式的解

$$(p,q,r)=(2,3,1), \tag{29}$$

利用定理 1 中的 (1) 式, 即可重現問題 1 的解如下:

$$a:b:c=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}; \tag{30}$$

又將 $(p,q,r)=(2,3,1)$ 代入上一節的 (24) 式, 可得

$$(\tan A,\tan B,\tan C)=(\sqrt{4},\sqrt{9},\sqrt{1})=(2,3,1),$$

這就是第四節後半、於問題 1 條件下所求得的 $\triangle ABC$ 三內角之正切值。

接著看源自於 (27) 式的解 $(p,q,r)=(1,1,1)$, 利用定理 1 中的 (1) 式, 可知

$$a:b:c=1:1:1, \tag{31}$$

此爲正三角形的三邊長比; 另一方面, 再利用 (24) 式可知

$$(\tan A,\tan B,\tan C)=(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),$$

這確實是正三角形三內角的正切值。

而源自 (27) 式的另一組解 $(p,q,r)=(1,1,2)$, 同樣利用 (1) 式, 可知

$$a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{3}:2, \tag{32}$$

由此邊長比知原三角形等腰, 且其中 $a=b$; 接著, 再次利用 (24) 式可知

$$(\tan A,\tan B,\tan C)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{8}),$$

因此可看出 $\angle A=\angle B$。

上面所介紹之符合問題 3 所求的三組解 (p,q,r), 代表在 (18) 式的假設下三種不同的垂心三角形面積比, 其相應的三個三角形邊長比 (31), (32), (30), 恰好分別就是 [2] 文中例 1、例 2 與例 3 所探究的三個三角形邊長比。讀者若有興趣, 不妨參考 [2] 文中的相關內容。

本文探討至此, 也即將進入尾聲, 而我們卻回到了問題 1 最初登場之 [2] 文裡的三個例子。彷彿問題 1 帶著我們歷經一場探險後又回到旅程起點, 也可將其視爲一個圓滿的結局。

七、結語

有幸拜讀 [3] 這篇作品, 發覺其內容相當有意思, 也因此啟發本文寫作的靈感。其中值得一提的, 筆者因爲看到定理 2 的結果, 才想到先前曾見過(但尚不知有何用處) 的定理 3, 兩者配合方可證出定理 4 的結果。

完成第二節中透過相似形對問題 1 的另解後, 筆者心中的感受是踏實的。因爲筆者知道, [3] 文的作者解決問題 1 的過程中所使用的三角函數理論就是建立在相似形之上, 而 [2] 文與 [1] 文先後解決問題 1 時所(間接或直接) 使用的畢氏定理, 也可用相似形來證明它。

回顧本文先前各節, 除了第二節中的另解之外, 其餘各節的內容都多少與出自 [3] 文的兩個定理(即本文中的定理 1 與定理 2) 有關。因此, 筆者在這裡要向 [3] 文的作者致上謝意, 此外也要感謝 [2] 文的作者, 若沒有他們兩位的作品, 相信也不會有本文的誕生。

最後, 若讀者對本文所探討的內容仍覺得意猶未盡, 筆者在此推薦 [3] 文作者的另一篇相關作品, 請參考 [4]。

註1: [2] 與 [1] 兩篇文章已先後告訴我們在已知 $\triangle ABC$ 三邊長爲 a,b,c 的條件下, 垂心三角形的面積比 $p:q:r$ 如何以 a,b,c 三數來表示, [3] 文中稱該結果爲「垂心面積比的邊長公式」; 然而 (1) 式則告訴我們在已知垂心三角形面積比爲 $p:q:r$ 的條件下, 三邊長比 $a:b:c$ 如何以 p,q,r 三數來表示, 因而相對而言是個「逆向公式」。

註2: 注意在圖 2 中, 筆者設定的面積比爲

$$\triangle BCH:\triangle CAH:\triangle ABH=p:q:r,$$

這個設定是源自於 [3] 文; 然而筆者在 [1] 文當中的圖 3 所設定的面積比則爲

$$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=p:q:r,$$

兩種設定方式不同, 讀者請勿混淆。而爲了回應 [3] 文, 所以本文在圖 2 之後都採用與 [3] 文相同的設定(而非 [1] 文的設定), 即 (7) 式。筆者後來發現, (7) 式應是比較好的設定方式。

此外, 若想表示出圖 2 中 $\triangle BCH$, $\triangle CAH$, $\triangle ABH$ 的絕對面積, 可先假設一個正數 d, 再把面積寫爲 pd,qd,rd 的形式。

註3: 在此對定理 3 的證明作個補充, 此處我們將會證明 (17) 左式中分式的分母

$$1-\tan A\tan B$$

不為零。已知 A, B, C 均不為直角, 因任意三角形最多只有一個鈍角, 可討論如下:

(a) 若 A, B 中有一個角為鈍角, 則另一個角為銳角, 此時 $\tan A$, $\tan B$ 異號, 可知

$$\tan A\tan B<0,$$

故 $1-\tan A\tan B>0$。

(b) 若 A, B 均為銳角, 此時如果 $1-\tan A\tan B=0$, 則有 $\tan A\tan B=1$, 這表示

$$\tan A=\frac{1}{\tan B}=\cot B=\tan(\frac{\pi}{2}-B).$$

因為 $A, \frac{\pi}{2}-B\in(0,\frac{\pi}{2})$, 而 tan 函數在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上為一一對應函數, 可知

$$A=\frac{\pi}{2}-B.$$

因此得 $A+B=\frac{\pi}{2}$, 這表示 $C=\frac{\pi}{2}$, 但此與 C 不為直角的已知條件不合, 得到矛盾。
由此可知一開始的假設不成立, 故 $1-\tan A\tan B\neq 0$。
將以上 (a), (b) 兩部分的討論結果合起來看, 我們就知道 $1-\tan A\tan B\neq 0$ 恆成立, 證明完畢。

註4: 假設 $\frac{1}{2}+\frac{2}{r}=k$, 其中 k 為正整數, 則可推得

$$r=\frac{4}{2k-1}.$$

上式中, 因 r 為正整數且 $2k-1\geq 1$, 知 $2k-1=1, 2, 4$, 但其中僅 $2k-1=1$ 可推得 k 為正整數的結果, 因此確定有 $k=1$。將 $k=1$ 代入上述 r 與 k 的關係式, 即得 $r=4$。

參考資料

1. 連威翔。一道面積比公式的另證。數學傳播季刊, 42(1), 80-84, 2018。
2. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播季刊, 30(2), 28-39, 2006。
3. 陳建燁。「一道面積比公式的另證」的回響: 用三角形的 A.S.A. 面積公式。數學傳播季刊, 43(1), 74-79, 2019。
4. 陳建燁。由垂心面積比逆求三角形邊長比。教育部高中數學學科中心電子報, 第 148 期, 2019 年 7 月。

—本文作者投稿時任職適園有限公司 (人力派遣)—