數學傳播 46卷4期, pp. 56-73

數學證明錯誤類型

陳韋仰・温嫰純

摘要: 數學證明是高等數學的重要學習指標, 證明除了有解釋以及交流溝通的功能之外, 在數學系所的實務課堂中, 不管是教學、作業、或是考試, 證明佔有的比例都相當高。本文介紹數學證明中可能出現的錯誤, 並依照其特點進行分類, 共有十個子類型並分成三大類型。於文中所展示之實例均盡可能使用現有文獻曾出現過的範例。希望透過這些類別的介紹, 能提高證明學習初學者對證明的理解, 也可以讓專業的數學教師編寫出更好的證明文本。

關鍵字: 數學證明、證明錯誤。

一、緒論

長期以來, 數學證明一直被視爲數學的中心和數學教育的重點 [5, 12], 同時也是專業數學實務的核心要素 [21]。數學證明在數學的教與學中扮演相當重要的角色, 例如證明可用於驗證數學猜想 [12, 23]。除此之外, 證明還扮演其他角色: 解釋 [23] 和交流 [4, 6, 16, 23]。從解釋的角度來看, 數學家使用證明來解釋定理爲什麼是正確的 [21], 除此之外, 證明可以用來說服他人也能說服自己 [9]。而從交流的角度來看, 證明可作爲數學家之間傳遞數學知識的工具 [4, 6] 以及與數學領域同儕思想交流的功能 [12]。也就是說, 數學家可以通過證明與同儕或學生溝通 [16]。在學習方面, 證明可以使學生產生有意義的數學經驗 [26], 除了讓學生能相信該定理是正確的, 也能使學生獲得數學書寫技能以及增加對證明的內容理解 [28, 31]。如果聚焦在大學數學系的課堂中, 證明更是教學解釋的主要形式 [14, 15]。

由於證明在數學教育的重要性, 課程設計者也會強調證明在數學課程中的作用。數學教育研究人員認爲, 在中學數學的課程中持續接觸證明內容可以使大多數學生保持連貫性與一致性 [19, 27], 也能使學生未來在大學數學證明密集課程較易獲得成就 [27]。實際上, 世界各國的課程標準也同時強調了推理和證明的重要性, 以美國爲例, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM, [18]] 提倡使用推理和證明結構作爲數學理解的一部分。NCTM [18] 還建議學生應具備以下四項能力: 體認推理證明爲數學中必要且重要的部分; 提出猜想並檢查

猜想是否成立; 發展且評價數學論證與數學證明; 以及選擇適當的推理形式和證明方法。在台灣, 國家教育研究院 [1] 提出除了數學知識外, 將符號使用, 操作, 推理和證明四種能力的培養也納入十二年國民教育數學領域的主軸。國家教育研究院 [1] 還特別強調數學領域內容應提及證明學習, 例如 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明以及數學歸納法證明。

綜上所述, 以及參考國內外的國家級教育單位所明列之推行政策, 可窺得數學證明的理解與學習實在是扮演數學教育中舉足輕重之地位, 其重要性可見一斑。同樣地, 數學證明錯誤類型的分類也相當重要, 原因有以下三個:

(1) 在書寫數學證明時能少犯錯誤

了解數學證明錯誤類型的人可以在自己編寫數學證明時防止出錯, 因爲他們已經知道可能出現哪些類型的錯誤, 在檢查時也能依照分類去檢視, 避免自己在書寫證明時犯下錯誤。

(2) 爲大學教師提供確認學生證明的參考

在高等教育的課堂中, 教師需要確認學生所寫的證明, 例如考試、作業中的證明題。除此之外, 教師需要深入了解數學證明的不同過程, 以便解釋和回應學生的論點 [25]。因爲證明可能沒有唯一解法, 不一定要寫成最佳解答才是正確, 所以當學生寫出不正確的證明時, 錯誤的理由不應該是其與最佳解答不同, 而是必須指出學生的答案錯誤在哪, 爲何不是有效證明。了解數學證明錯誤類型的教師可以增加他們發現錯誤的可能性, 因爲他們已經知道可能出現哪些類型的錯誤。因此, 了解數學證明錯誤類型可以提高教師發現學生證明錯誤的能力。

(3) 提供大學教師設計教材作爲參考

確認證明有效或無效是學生的一項重要能力, 在學生確認證明時, 要去決定論述是否能接受可以帶給學生對於證明理解的不同觀點 [8]。爲了培養學生的這種能力, 教師可以設計一些有錯誤的證明讓學生進行確認。對於有錯誤的證明, 設計者希望在證明中安排何種錯誤類型便是證明確認任務中的關鍵。如果有錯誤類型的分類可供參考, 設計者就可以更容易以及更有效地設計出錯誤的數學證明, 用以訓練學生證明確認之能力。

然而, 目前的文獻並沒有提供數學證明錯誤類型較完整之分類, 大多數研究只介紹了一些證明錯誤類型。以下是現有文獻提及證明錯誤類型的介紹: 許介彥 [2] 以示例呈現在數學歸納法中可能出現的錯誤, 包含歸納步驟不適用於基底步驟、基底步驟漏掉某些情況、以特例當成證明; Selden 與 Selden [22] 的研究材料出現三種錯誤: 大量錯誤、認知差距、證明方向相反; Inglis, Mejia-Ramos, Weber 與 Alcock [11] 以較宏觀的觀點將錯誤分成兩類: 行與行之間的推論錯誤、解釋不夠清楚的認知差距; Ko 與 Knuth [13] 將研究工具所使用題目的錯誤分類, 同樣是以宏觀的觀點分成兩類: 整體結構的錯誤、行與行之間的推論錯誤; Wheeler 與 Champion [30] 聚焦於 one-to-one 與 onto 性質的證明, 於編碼表中列出學生犯的錯誤: 符號錯誤使用、無法理解的證明、變數混淆使用、認知差距、計算錯誤、變數未宣告、對於 one-to-one 的定義

不清楚、假設結論正確、對實數性質不理解、弄混 one-to-one 與 onto 之定義、以特例當成證明; Stavrou [24] 列出四種可能出現的錯誤: 以特例當成證明、假設結論正確、充要條件的驗證沒有雙向證明、對於數學定義的不瞭解。其中 Inglis 等 [11] 以及 Ko 與 Knuth [13] 雖然用宏觀的角度來區分錯誤類型, 但缺乏了細微之描述說明。而許介彥 [2]、Selden 與 Selden [22] 以及 Stavrou [24] 雖然有列出較明確之敘述, 但仍有未提及之錯誤類型。雖然 Wheeler 與 Champion [30] 已提到較多的錯誤類型, 但該文對於錯誤類型之描述專注於 one-to-one 與 onto 之證明, 缺乏出現於其他證明情形的錯誤類型。

由於尚未有文獻提供較完整分類錯誤的類型, 可能會導致數學讀者不清楚數學證明中可能出現的錯誤類型。有鑑於此, 作者專門對數學證明錯誤類型進行了分類, 且有別於上述介紹之文獻, 本分類兼具宏觀性與微觀性, 在三大分類之下還有細分不同子類型, 以便未來對設計證明驗證任務感興趣的讀者可以更方便地進行錯誤類型說明和文本設計。在本文中, 我們將介紹證明錯誤的類型, 如表 1 所示。將錯誤類型分成三大類: 迷思概念、推導錯誤、其他。其中迷思概念有五種錯誤子類型, 推導錯誤有三種錯誤子類型, 其他有兩種錯誤子類型。迷思概念類型包含錯誤起因是對證明方法、證明架構、數學定義或符號有迷思概念; 推導錯誤類型主要探討行與行之間推論的錯誤; 而其他類型則是用以補足上述兩類型之外, 但又確實常見於學生答案之狀況。本文的下一節將更詳細地介紹這些內容。

表1: 證明錯誤類型、子類型以及相對定義

證明錯誤類型	子類型	定義
迷思概念	出現未宣告變數	出現一個以上的變數未宣告
	以特例做爲證明	只考慮有限例子
	假設結論正確	在證明一開始就假設結論正確
	特殊的證明架構不清楚	對於某些特殊的證明方法不熟悉
	對定義的誤解	對於定義或符號的不理解
推導錯誤	認知差距	前面一行(或多行) 推到此行的理由需要更詳細的解釋說明
	性質或定理誤用	錯誤使用性質或定理
	考量情況未完整	分類討論時漏掉某些情況
其他	無邏輯性推論錯誤	看起來毫無邏輯的推導過程
	筆誤、計算錯誤	因爲筆誤或計算錯誤導致證明不完全正確

二、數學證明錯誤類型

如表 1 所示, 十種證明錯誤類型分爲三類, 根據需要又分爲一些子類型。其中大多數錯誤類型的例子都可以在現有的實證研究中找到, 以下是證明錯誤類型的介紹:

(一) 迷思概念類型

迷思概念類型的證明錯誤內含五種子類型, 前四類爲對證明的迷思概念, 第五類爲對定義的迷思概念。對證明的迷思概念意指不清楚何謂證明或不了解特殊的證明架構, 包含: 不知道使用的變數需宣告、把舉例當成是有效證明、在證明一開始即假設結論爲真、不懂充要條件的證明需證明雙向、不清楚證明方法的架構。對定義的迷思概念意指對於證明當中會使用到的定義不夠清楚, 錯誤的使用而導致證明不正確。迷思概念所造成的書寫證明錯誤, 幾乎只發生在證明的初學者 (大學生以下), 由於數學家 (指專業研究人員或大學教師) 的迷思概念較少, 因此鮮少發生在數學家所寫之證明。對於子類型的詳述如下:

1. 出現未宣告變數

此錯誤類型乃是指在證明書寫過程中, 出現了未加定義或無宣告說明的變數。被歸類在迷思概念類型之中, 是因爲書寫證明的作者不清楚使用變數需宣告, 對於證明中的變數使用有迷思概念。由於數學語言常常會使用符號, 因此對於每一個出現的變數都必須加以說明敘述, 才能讓讀者清楚了解該變數的定義爲何。對於數學證明的非初學者而言, 宣告變數可算是習以爲常, 因此這類型錯誤較常出現在尚未將變數宣告當成習慣或是沒把變數宣告當成有效證明之必要條件的證明初學者。雖然有時未宣告的變數僅僅是證明錯誤中的「小瑕疵」, 但有時也會導致初學者產生錯誤的理解, 圖 1 是文獻中發現有「出現未宣告變數」的錯誤例子:

質數有無窮多個。
證明:
1 採用矛盾證法
2 假設只有有限個質數
3 令 $P = p_1p_2p_3 \dots p_n + 1$
4 因為 $P > 1$,所以 P 可被某個 p_k 整除
5 結合 $p_k | p_1p_2p_3 \dots p_n$ 與 $p_k | P$,可得 $p_k | P - p_1p_2p_3 \dots p_n$
6 則 $p_k | 1$
7 $\quad \Rightarrow p_k = 1$ $(\rightarrow\leftarrow)$
8 故質數有無窮多個

圖 1: 錯誤類型 —「出現未宣告變數」之例

在圖 1 中, 這個命題的目標是證明「質數有無窮多個」, 這是一個衆所周知的證明。然而, 8 行證明之中沒有宣告 p_1、p_2、p_3、$\cdots$、p_n 爲何, 在證明的第3行便出現了 p_1、p_2、p_3、$\cdots$、p_n。除了變數本來就應該宣告說明的原則之外, 變數定義的缺漏會讓讀者更難跟隨證明的思考模式, 特別是在一個證明中出現很多變數的時候。

2. 以特例做為證明

此錯誤類型是指在證明過程中, 僅僅舉了有限個例子便以爲是正式證明 (非指舉反例的否證)。被歸類在迷思概念類型之中, 是因爲書寫證明的作者不淸楚可形成證明之條件, 具有舉例可當成證明的迷思概念。由於證明需滿足所有可能的狀況, 而常見的自然數、實數或是數線與平面上的點都有無窮多個元素, 因此只有舉部分的例子, 是無法符合數學強調的一般性。Inglis 與 Alcock [10] 提到用畫圖形當成證明其實也是用特例的一種, 因爲畫出來的圖形只是舉出的一種情況而已, 所以或許還有其他的可能性。但在 Weber 與 Czocher [29] 的研究中, 大多數參與者都知道數學家之間對視覺證明的有效性存在分歧。參與者認爲情境對於判斷證明的有效性尤爲重要。也就是說, 參與者聲稱視覺證明在某些情況下是有效的, 而在其他情況下則聲稱它是無效的, 例如 62% 的參與者認爲 Weber 與 Czocher [29] 研究中使用的視覺證明是有效的。但是, 在另一種情況下, 如果我們想證明 $y=0$ 是 $y=1/x$ 的漸近線, 我們無法通過繪製兩條曲線來證明。因爲 $y=0$ 和 $y=1/x$ 這兩條曲線會隨著 $x>0$ 變大而越來越接近。使用圖形只能表現它們越來越接近, 但不能解釋爲什麼兩條曲線最後不會有交點。由此例可見, 畫圖不適用於某些情況, 並不是所有情況都能用畫圖解釋。總而言之, 正式的數學證明還是必須顧及所有可能情形。這類型錯誤幾乎只出現在證明初學者, 特別是那些對於正式證明有迷思概念, 還不曉得舉例無法當成證明的學生。圖 2 是舉文獻中發現有「以特例做爲證明」的錯誤例子:

試證明以下定理：對於所有整數 m, n, p ，若 m 為 n 的因數且 m 為 p 的因數，則 m 為 $n+p$ 的因數。

證明：

1　存在 m, n, p 為整數且滿足 若 m 為 n 的因數且 m 為 p 的因數，則 m 為 $n+p$ 的因數

2　舉例來說，當 $m=2$、$n=6$、$p=12$

3　$\frac{n}{m}=\frac{6}{2}=3$

4　$\frac{p}{m}=\frac{12}{2}=6$

5　$\frac{n+p}{m}=\frac{18}{2}=9$

6　由此可知定理正確

圖2: 錯誤類型 —「以特例做爲證明」之例 [5, p.114]

在圖 2 之中, 此題目標是證明「若 m 是 n 的因數且 m 是 p 的因數, 則 m 是 $n+p$ 的因數」, 證明過程僅僅舉了一組合乎此關係的數字便認爲得證, 可看出學生含有舉例可做爲正式證明的迷思概念。

3. 假設結論正確

此錯誤類型乃是指在證明過程的最開始便假設結論正確, 這在一個有效的證明中是絕計不會看到的, 把 $p \Rightarrow q$ 的證明目標證成 $q \Rightarrow q$ 或是 $q \Rightarrow p$。有別於常見的反證法, 因爲邏輯上 $p \Rightarrow q$ 等價於 $\sim q \Rightarrow \sim p$, 反證法是由 $\sim q$ 起始證明, 這與此錯誤類型由 q 起始是完全不同的。被歸類在迷思概念類型之中, 是因爲正確的證明方法(直接證明法、矛盾證法、反證法、$\cdots$) 都不會出現此錯誤類型, 書寫出此錯誤類型證明的作者可能尚不清楚證明的常用方法有哪些, 對於要如何形成證明有迷思概念。這類型錯誤常見於對證明架構不夠了解的證明初學者, 而其中可再分爲兩種子類別, 以下是子類別的說明與舉例:

(1) 結論同時為證明的起點與終點

此錯誤類型即把 $p \Rightarrow q$ 的證明目標證成 $q \Rightarrow q$, 一開始先假設結論正確, 最終自然會發現結論是對的。在沒有其他錯誤發生之情況, 這樣的證明若只看推論過程, 會發現是沒有推論錯誤的, 但不符合命題要求而已。圖 3 是文獻中發現有「結論同時爲證明的起點與終點」的錯誤例子:

若 x 與 y 均為正偶數，則試證 $x+y$ 為偶數。
證明：
1　若 $x+y$ 為偶數，則 $x+y$ 為 2 的倍數
2　則存在某個正整數 k ，使得 $x+y=2k$
3　因為 $x+y=2k$
4　則 $x+y$ 為偶數

圖3: 錯誤類型 —「結論同時爲證明的起點與終點」之例 [24, p.4]

圖 3 中, 此題目標是證明「若 x, y 均爲正偶數, 則 $x+y$ 爲偶數」, 證明過程一開始便假設 $x+y$ 爲偶數, 最後當然會得證 $x+y$ 爲偶數, 但並不是一個合乎命題的有效證明。

(2) 證明方向相反

此錯誤類型即把 $p \Rightarrow q$ 的證明目標證成 $q \Rightarrow p$, 原始目標要證明 q 爲真, 卻證成 p 爲真, 自然是錯誤的證明。此類型與前一類「結論同時爲證明的起點與終點」相當類似, 但仍不盡相同。除了結論部分一爲 q、一爲 p 之外, 前一類型的推論過程多半無誤, 但此類型則不一定, 因爲 $p \Rightarrow q$ 並不等價於 $q \Rightarrow p$, 即便 $p \Rightarrow q$ 正確, 也不保證 $q \Rightarrow p$ 正確。圖 4 是文獻中發現有「證明方向相反」的錯誤例子:

若 m 與 n 整數且滿足 mn 為奇數，則試證 m 為奇數且 n 為奇數。
證明：
1 假設 m 為奇數且 n 為奇數
2 則存在某整數 h 與 k ，使得 $m = 2h + 1$ 且 $n = 2k + 1$
3 則 $mn = (2h + 1)(2k + 1)$
4 $\quad = 4hk + 2h + 2k + 1$
5 $\quad = 2(2hk + h + k) + 1$
6 因為是某個整數的 2 倍再加 1，得證 mn 為奇數

圖4: 錯誤類型 —「證明相反方向」之例 [20, p.510]

圖 4 中, 此題目標是證明「若 m, n 均爲整數且 mn 爲奇數, 則 m 爲奇數且 n 爲奇數」, 證明過程一開始便假設 m 爲奇數且 n 爲奇數, 最後得證 mn 爲奇數。因爲兩奇數相乘爲奇數爲真, 此題證明過程的邏輯推論無誤, 但不符命題要求, 不爲有效證明。

4. 特殊的證明架構不清楚

此錯誤類型乃是指學生對於一些特殊的證明手法不熟悉, 不清楚證明架構, 以致於無法正確寫出證明。數學證明的特殊方法都有其自己的架構, 例如: 數學歸納法、矛盾證法、反證法、等價敘述證明, 此類型錯誤常見於對特殊證明架構不夠了解的證明初學者, 針對較常見的錯誤可再分爲兩種子類別, 以下是子類別的說明與舉例:

(1) 等價敘述的證明方法不清楚

此錯誤類型即不清楚如何證明等價敘述。被歸類在迷思概念類型之中, 是因爲書寫出此錯誤類型證明的作者對於要如何完成等價敘述之證明有迷思概念。等價敘述的要求, 即滿足若某一敘述成立, 要能推得其他敘述成立。舉例來說: 若要證明三敘述 A, B, C 爲等價敘述, 正確的證明方式大致有兩種, 一爲環狀式的證明, 分別證明「$A \Rightarrow B$」、「$B \Rightarrow C$」、「$C \Rightarrow A$」, 另一是證明兩兩敘述爲充要條件「$A \Leftrightarrow B$」、「$B \Leftrightarrow C$」(若這兩關係成立,「$A \Leftrightarrow C$」已隱含在其中, 故不需再證明)。Stavrou [24] 曾提到充要條件的證明常有學生只證明單方向, 而沒有證明另一方向。其實充要條件的證明即等價敘述證明的特例, 充要條件便是兩個敘述爲等價敘述, 故在此分類中, 將充要條件放寬至等價敘述, 更能符合實際狀況。圖 5 是線性代數的「等價敘述的證明方法不清楚」之例:

令 $A \in F^{n\times n}$ ，則下列敘述為等價敘述。

(1) A 為 invertible

(2) $\forall \vec{b} \in F^{n\times 1}$ ， $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解

(3) $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解

證明：

1 (1→2) 因為 A 為 invertible

2 所以 A^{-1} 存在

3 令 $\overrightarrow{x_0} = A^{-1}\vec{b}$

4 則 $A\overrightarrow{x_0} = AA^{-1}\vec{b} = \vec{b}$ ，即 $\overrightarrow{x_0}$ 為 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解

5 若 $\overrightarrow{x_1} \in F^{n\times 1}$ 滿足 $\overrightarrow{x_1}$ 也為 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解

6 則 $\overrightarrow{x_1} = (A^{-1}A)\overrightarrow{x_1} = A^{-1}(A\overrightarrow{x_1}) = A^{-1}\vec{b} = \overrightarrow{x_0}$

7 故得證 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有唯一解

8 (2→3) 因為 $\vec{0} \in F^{n\times 1}$ ，所以 $A\vec{x} = \vec{0}$ 有唯一解

9 又因為已知 $A\vec{0} = \vec{0}$

10 所以 $A\vec{x} = \vec{0}$ 只有零解

圖5: 錯誤類型 —「等價敘述的證明方法不清楚」之例

圖 5 中, 雖然成功證明了「$1 \Rightarrow 2$」、「$2 \Rightarrow 3$」, 但這 10 行的證明並不是此等價敘述性質的完整證明, 因爲等價敘述證明需符合若某一敘述成立, 要能推得其他敘述成立。在此示例中, 僅完成當敘述 (1) 成立時, 可以推得敘述 (2)、(3) 成立, 以及當敘述 (2) 成立時, 可以推得敘述 (3) 成立。若是敘述 (3) 成立時, 並沒有辦法以此證明得到敘述 (1)、(2) 成立 (也無法說明敘述 (2) 推到敘述 (1))。另一種常見於初學者對於等價敘述證明的迷思概念, 會誤以爲要直接證明個別敘述爲真, 圖 6 是線性代數中等價敘述之命題, 可依此例來說明若學生誤以爲等價敘述證明是要直接證明個別敘述, 在證明過程中會遇到何種困難:

令 V 為 vector space over F，W_1、W_2 皆為 V 的 subspace，則下列敘述為等價敘述。

(1) $W_1 \cup W_2$ 為 V 的 subspace

(2) $W_1 \subset W_2$ 或 $W_2 \subset W_1$

圖6: 等價敘述之命題

圖 6 是等價敘述之命題, 目標應證明當敘述 (1) 成立時, 敘述 (2) 也會成立, 以及當敘述 (2) 成立時, 敘述 (1) 也會成立。如果有學生誤以爲要證明「下列兩敘述均成立」, 此命題將變

成錯誤之命題。因爲只有在 V 沒有 non-trivial subspace 時 (即 V 的 subspace 只有零空間與自己), 敘述 (1)、(2) 才會一定成立, 若 V 有 non-trivial subspace, 則挑出來的 subspace W_1、W_2 就不一定會同時滿足敘述 (1)、(2)。既然命題是錯誤的, 學生再如何嘗試證明也不可能得到正確之證明, 更有可能誤以爲找到反例, 但其實是自己對等價敘述的證明方法有迷思概念。

(2) 數學歸納法的初始狀態無法迭代推論

數學歸納法具有獨特的兩階段證明結構: 基底步驟 (basis step) 和歸納步驟 (inductive step)。其中, 歸納步驟是迭代推理, 目的是希望通過這個過程, 能讓證明目標從起始值滿足所有情況。如果除了起始值之外的歸納步驟正確, 便會出現這種類型的錯誤。這種錯誤類型的謬誤經常出現在流行的數學文章中, 作者的意圖是透過這樣的矛盾和趣味結果來震撼讀者的邏輯思維。被歸類在迷思概念類型之中, 是因爲看不出此類錯誤的讀者對於數學歸納法之操作模式不夠瞭解, 尚有些許迷思概念。圖 7 是文獻中發現有「數學歸納法的初始狀態無法迭代推論」的錯誤例子:

任意 n 人在同一房間內，都會有相同的生日。
證明：
1 使用數學歸納法
2 當 $n=1$ 時，房間裡只有 1 人，很明顯地，符合房間裡所有人生日相同
3 假設此敘述在 $n=k$ 時成立，接著考慮當 $n=k+1$
4 目前房間裡有 $k+1$ 人
5 令最後進入房間的人為 L
6 在 L 進入房間前，房間內只有 k 人
7 根據假設，得知這 k 人會有相同生日
8 因此 L 是唯一可能不同生日的人
9 現在讓 L 留在房間內，另選一人 M 離開房間
10 包含 L 在內，現在房間裡有 k 人
11 根據假設，目前房間裡所有人生日相同(包含 L)
12 因此房間裡 $k+1$ 人的生日都相同

圖7: 錯誤類型 —「數學歸納法的初始狀態無法迭代推論」之例 [7, p.41]

在圖 7 之中, 此題目標是證明「任意 n 個人, 生日都同一天」。很明顯地, 這是個錯誤的命題, 因此, 證明過程中必定有誤。在第一步驟起始值的部分沒問題, 因爲一個人的生日當然只有一種。在數學歸納法的歸納步驟中, 這個推理也是正確的, 但必須建立在 $k\geq 2$ 的前提下。如果「任意兩個人的生日是同一天」成立, 自然會推導出「任意三個人的生日是同一天」。但是很明顯地,「任何兩個人的生日都是同一天」是錯誤的, 因爲在第 3 行中, 如果將 k 替換爲 1, 可

以看出敘述是不合理的。從「任何一個人的生日都是同一天」不能推斷出「任何兩個人的生日都是同一天」。因此, 本例的歸納步驟不適用於 $n=1$ 至 $n=2$。

5. 對定義的誤解

此錯誤類型乃是指學生對於證明中用到的數學定義存在迷思概念, 可能是對於符號不清楚或是對定義不了解, 例如不會區分「屬於 $\in$」與「包含於 $\subset$」、不了解自然數的定義、搞混 one-to-one 與 onto 性質 $\cdots$。此類型強調的是對符號或定義內容的迷思概念, 而非前四類對證明的迷思概念, 這類型錯誤較容易出現在證明初學者, 因爲初學者的符號、定義迷思概念較非初學者多。圖 8 是文獻中發現有「對定義的誤解」的錯誤例子:

令 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 為 $f(x)=\frac{x+5}{7}$,試證 f 為 onto。

證明:

1 令 $f(a_1)=f(a_2)$,其中 $a_1,\ a_2\in\mathbb{Q}$

2 $\frac{a_1+5}{7}=\frac{a_2+5}{7}$

3 $a_1+5=a_2+5$

4 $a_1=a_2$

5 $\therefore$ 此函數為 onto

圖8: 錯誤類型 —「對定義的誤解」之例 [30, p.1115]

圖 8 中, 此題目標是證明「函數 f 爲 onto」。但學生卻證成「函數 f 爲 one-to-one」(最後一行表示學生以爲這是 onto 的證法), 可看出這位學生將 one-to-one 與 onto 的定義混淆, 不清楚專有名詞的定義, 自然無法寫出正確的證明。

(二) 推導錯誤類型

推導錯誤內含三種子類型, 雖然有三種子類型, 但主因均爲推導有誤, 被歸類在推導錯誤類型之中, 是因爲行與行之間的推論錯誤(包含解釋不夠清楚)。一言以蔽之, 即證明中前一行或前幾行的論述並不能推得下一行 [11]。推導錯誤則是不論在初學者或數學家的證明均有可能發生, 對於子類型的詳述如下:

6. 認知差距

「認知差距」意指證明過程中從上一行推到下一行, 被認爲需更加詳細說明。「認知差距」的特色是若單看邏輯推論過程, 是正確的, 也會符合題目要求, 被認爲「錯誤」的原因是兩行之間的關連若無解釋是不夠清楚的。因此, 若有的讀者認爲兩行之間關連是不需解釋也可以明顯推

得, 那麼該讀者便不會認爲有「錯誤」。「認知差距」是少數讓有些讀者會覺得錯誤、有些讀者會覺得正確的類型, 端看該讀者認定行與行之間的推導關係有無交代清楚。然而, 寫出「認知差距」的作者不同, 是學生抑或是學者, 其背後的原因也不太一樣。學生寫出讓教師認爲有「認知差距」的內容, 多半是教師覺得學生這句推論解釋得不夠清楚, 或是學生證明到一半, 發現不知如何推到結論, 便直接將結論寫在下一行, 形成一個看起來邏輯無誤的證明。若是學者寫出的「認知差距」, 通常有兩種原因, 一是在課本中爲了使讀者多動腦思考, 讓讀者對於證明文本更有參與感 [17]; 另一是學者本身認爲此推論是顯而易見的。Inglis 等 [11] 認爲「認知差距」常常出現在課本或是期刊中, 便是此緣故。而本研究所探討的「認知差距」專指由學生產生的, 圖 9 是文獻中發現有「認知差距」的錯誤例子:

若 n^2 為 3 的倍數，則 n 為 3 的倍數。
證明：
1 令 n 為整數使得 $n^2 = 3x$ ，其中 x 為整數
2 則 $3|n^2$
3 因為 $n^2 = 3x$ ，即 $nn = 3x$
4 則 $3|n$
5 因此若 n^2 為 3 的倍數，則 n 為 3 的倍數

圖9: 錯誤類型 —「認知差距」之例 [22, p.17]

在圖 9 之中, 此題目標是證明「若 n^2 爲 3 的倍數, 則 n 爲 3 的倍數」。證明過程僅由「$nn = 3x$」便得到「$3|n$」。雖然由邏輯推論的觀點是正確的, 然而, 此命題要考的即爲說明如何從「$3|n^2$」得到「$3|n$」, 但學生卻沒有把原因詳細說出, 故此題錯在解釋不夠清楚。前一段落提過「認知差距」類型的錯誤可能會有讀者覺得正確, 文獻的實徵資料也印證了這個觀點。由於樣本若爲證明確認能力較不足的學生, 在結果印證上可能會較存疑, 有可能被認爲是能力不足而將此類型錯誤判斷成正確, 因此只尋找專家樣本的資料。在 Inglis 與 Alcock [10] 的研究中, 找了 12 位數學家對於此證明進行證明確認, 竟有 5 位認爲此證明有效, 7 位認爲無效。可見此類型錯誤, 即便是數學家, 也可能因人而異地有不同判斷。

7. 性質或定理誤用

「性質或定理誤用」意指證明過程中推論到某一行是錯誤的, 其推論的因果關係不成立, 原因爲錯誤使用性質或定理。「性質或定理誤用」與「認知差距」的差別在於:「認知差距」的推論正確, 但需要詳述的理由沒有寫出, 而「性質或定理誤用」是推論錯誤。雖然有錯誤出現, 便能以迷思概念來解釋, 此處可看成對於性質或定理的迷思概念, 但有別於前面所提專指定義或證明架構的迷思概念類型, 此處強調的是推論上的錯誤。圖 10 是文獻中發現有「性質或定理誤用」的錯誤例子:

試證 $\sqrt{n} \to \infty$ 當 $n \to \infty$。
證明：
1 我們知道 $a < b \Rightarrow a^m < b^m$
2 則 $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
3 因為 $n < n+1$ ，可得 $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ ，對於所有 n 都成立
4 得證 $\sqrt{n} \to \infty$ 當 $n \to \infty$

圖10: 錯誤類型 —「性質或定理誤用」之例 [3, p.128]

圖 10 中, 此題目標是證明「當 n 趨近於無窮大時, $\sqrt{n}$ 也會趨近於無窮大」。證明過程在出現「性質或定理誤用」之前有包含其他錯誤, 例如: 第一行「$a < b \Rightarrow a^m < b^m$」, 此式並非總是正確, 需要對於 a, b, m 定義清楚, 爲「出現未宣告變數」類型錯誤; 對於第三行的 n, 未說明屬於哪個集合, 也是「出現未宣告變數」類型錯誤。雖然前三行的推論有瑕疵, 但第三行的性質「$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$」是正確的, 而在第三行「$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$」推論到第四行「當 n 趨近於無窮大時, $\sqrt{n}$ 也會趨近於無窮大」時, 便出現「性質或定理誤用」。因爲「$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$」僅能說明 $\sqrt{x}$ 在自然數定義域上是遞增函數, 但遞增不一定發散(例如令 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$。f 在 R^+上爲遞增函數, 但並不會發散至無窮大, 而是收斂到 0), 因此爲「性質或定理誤用」。迷思概念類型的錯誤是強調連定義都不了解, 而「性質或定理誤用」是對於性質、定理的錯誤使用, 以此例來說, 便是學生誤以爲有「遞增函數一定發散」的性質, 導致錯誤推論。

8. 考量情況未完整

「考量情況未完整」意指證明過程中推論到某一行是錯誤的, 其推論的因果關係不成立, 原因爲在推論時以分類討論, 但卻漏了某些情況而導致推導錯誤。「考量情況未完整」與「性質或定理誤用」的差別在於:「性質或定理誤用」強調推論過程使用了錯誤的性質或定理, 而在推論過程若有分類且有遺漏的情況, 則屬於「考量情況未完整」, 此處特別強調是分類不夠完整。圖 11 是「考量情況未完整」之例:

圖 11 是「考量情況未完整」之例。在第5行中,「k, $k+2$, $k+4$ 並非都是質數」是指 k, $k+2$, $k+4$ 中至少有一個不是質數, 但是在第 6、7 和 8 行中, 學生認爲至少有一個是質數, 缺少考慮「k, $k+2$, $k+4$ 都是合數」。雖然可能會有讀者認爲該學生錯誤解讀「k, $k+2$, $k+4$ 並非都是質數」。若是至少有一個不是質數, 在分類時應該是分別討論 k 不是質數、$k+2$ 不是質數、$k+4$ 不是質數, 而非該學生分類的 k 爲質數、$k+2$ 爲質數、$k+4$ 爲質數。然而, 我們可以試想一種情境, 如果今天是學生拿著這份答案來詢問爲何有錯? 單純只回答「因爲學生想法解讀有誤」, 好像不是一個準確的回答。就好像要如何說命題是錯的, 舉反例是最直接指出錯誤的方法, 通常不會去質疑錯誤命題的想法。因此, 對於圖 11 之例, 要如何回應學生的

若 n 為大於 3 的正整數，則試證 $n, n+2, n+4$ 不可能都是質數。
證明：
1 使用數學歸納法
2 當 $n=4$ 時， 4, 6, 8 都不是質數，成立
3 假設此敘述在 $n=k\geq 4$ 時成立，接著證明 $n=k+1$ 的情況
4 當 $n=k+1$ 時
5 因為根據假設， $k, k+2, k+4$ 並非都是質數
6 若 $k\geq 4$ 為質數，則 $k+1$ 為偶數並非質數
7 若 $k+2$ 為質數，則 $k+3$ 為偶數並非質數
8 若 $k+4$ 為質數，則 $k+5$ 為偶數並非質數
9 $\Rightarrow k+1, k+3, k+5$ 不會都是質數
10 因此對於 $n>3$ ， $n, n+2, n+4$ 不可能都是質數

圖 11: 錯誤類型 —「考量情況未完整」之例

錯誤何在? 單純要找證明內容出現的瑕疵, 最直接的就是「這樣的分類討論會少討論到 $k, k+2, k+4$ 都是合數」, 這也是研究者將此例作爲「考量情況未完整」範例之原因。

當然, 若是從教學的角度思考, 在提出此證明錯誤之處後, 就可以再跟學生提醒犯錯的起源：學生解讀敘述「$k, k+2, k+4$ 並非都是質數」的錯誤。這樣一來學生就能知道, 從證明內容來看, 爲什麼這不是一個正確的證明 (因爲某些情況沒有討論到), 以及爲什麼會導致這樣的內容出現 (因爲解讀敘述錯誤)。

(三) 其他類型

其他一類意指較不合適使用迷思概念或是推導錯誤來解釋證明錯誤發生之原因, 考量到學生所書寫出的證明, 的確有發生這類錯誤之可能性, 故研究者特別建此分類。其他類型的證明錯誤內含兩種子類型, 對於子類型的詳述如下:

9. 無邏輯性推論錯誤

「無邏輯性推論錯誤」意指證明過程出現推論錯誤, 但其推論所使用的因果關係異於一般會出現的理由, 甚至可說是將毫無關連的兩件事當成因果。此類型錯誤常見於學生在不會書寫證明時, 只好隨意將不相干的事實或性質湊在一起。「無邏輯性推論錯誤」與「性質或定理誤用」、「考量情況未完整」的差別在於:「性質或定理誤用」是誤用了不合適的定理或是錯誤的性質, 而「考量情況未完整」專指證明過程中分情況討論, 卻遺漏了某些狀況沒提及, 但「無邏輯性推論錯誤」則是文中呈現的因果關係悖離合理性, 甚至會讓讀者覺得作者亂寫。圖 12 是文獻中發現有「無邏輯性推論錯誤」的錯誤例子:

若 n^2 為 3 的倍數，則 n 為 3 的倍數。
證明：

1　若 n^2 為正奇數且能被 3 整除
2　即 $n^2 = (3n+1)^2$
3　$= 9n^2 + 6n + 1$
4　$= 3n(3n+2) + 1$
5　因此 n^2 可被 3 整除
6　若 n^2 為正偶數且能被 3 整除
7　即 $n^2 = (3n)^2$
8　$= 9n^2$
9　$= 3n(3n)$
10　因此 n^2 可被 3 整除
11　將 $n^2 = 9n^2$ 分解，可得 $3n(3n)$
12　代表 n 為 3 的倍數

圖 12: 錯誤類型 —「無邏輯性推論錯誤」之例 [22, p.12]

在圖 12 之中, 此題目標是證明「若 n^2 為 3 的倍數, 則 n 為 3 的倍數」。在證明敘述的第一行提及「假設 n^2 為可被 3 整除的正奇數」, 但在第二行卻忽然寫出「$n^2 = (3n+1)^2$」的敘述。其一是這兩行無法對應, 第二行與第一行存在矛盾; 其二是第二行的敘述沒有解釋為何 n 可以被 $3n+1$ 取代。突然出現第二行的式子, 會讓讀者摸不著頭緒, 因為「$n^2 = (3n+1)^2$」使用了同樣的變數 n, 一般會出現這樣的式子只有兩種可能(合理的): 一是探討數學的方程式, 另一是寫程式時的敘述。但在此處, 都與這兩種可能相去甚遠, 因此被歸類於「無邏輯性推論錯誤」。而此例在後續的討論也是犯了同樣的錯誤, 在「假設 n^2 為可被 3 整除的正偶數」的情況中, 寫到「$n^2 = (3n)^2$」, 一樣會讓人摸不著頭緒, 而之後的「因為 $n^2 = (3n) \times (3n)$, 推得 n 為 3 的倍數」, 都是無邏輯性也是悖離合理性的錯誤。

10. 筆誤、計算錯誤

「筆誤、計算錯誤」意指證明過程中發生錯誤的原因來自筆誤或計算錯誤, 雖然證明較著重邏輯推導關係正不正確, 但筆誤或是計算錯誤也可能是導致證明出錯的原因。此類型錯誤常見於計算類型的證明之中, 例如圖 8 之例需對函數做計算, 在移項或是處理分母時, 便有出現計算錯誤的可能。而「筆誤、計算錯誤」與其他類型錯誤的差別在於:「筆誤、計算錯誤」有可能只是整篇證明中的小瑕疵, 經過簡單修正之後或許能得到正確的證明, 而其他類型錯誤的修正可能需要大幅度更動, 例如「認知差距」需要多加解釋;「性質或定理誤用」需要改用正確的性質或定理;「考量情況未完整」需要補足當初漏掉的情況。如果只探討證明有誤的情形 (命題正確), 表示證明書寫的結果看似會符合命題 (但過程有瑕疵),「筆誤、計算錯誤」在此處算是小錯誤。但如果是探討命題可能有誤的情形, 當覺得命題錯誤時需在書寫過程提出反例, 那「筆誤、

計算錯誤」就會是很嚴重的錯誤。因爲反例只要一個就能推翻命題, 而筆誤或計算錯誤可能會產出一個自以爲是反例的結果。

三、結論與建議

本文介紹並分類了不同類型的證明錯誤。對於讀者或數學教育工作者來說, 了解證明錯誤類型的好處在於: 在書寫數學證明時更不容易犯錯, 並且可以爲大學教師確認學生的證明和設計教材提供參考。例如證明確認的學習任務, 證明確認即判斷證明的正確性 [17], 給定一個命題與已經寫好的證明過程, 但證明過程正確與否爲未知。任務參與者需在閱讀證明過程後, 去進行判斷, 確認該證明過程是否正確符合證明命題, 可否爲證明命題之證明 [22]。如果教師想設計一個證明確認的學習任務, 並且題材預設是無效證明, 教師就可以從這些錯誤類型介紹中選擇自己希望出現在試題中的錯誤類別, 然後再設計任務的證明內容。

需特別注意的是, 在使用本文的分類審查證明錯誤時, 讀者需要注意在證明中發生的錯誤可能包含一種或多種錯誤類型。例如圖 13 是文獻中一個證明有兩個錯誤的說明:

令 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 為 $f(x)=10x-7$ ，試證 f 為 one-to-one。
證明：
1 令 $f(a_1)=f(a_2)$
2 $10a_1-7=10a_2-7$
3 $10a_1=10a_2$
4 $a_1=a_2$
5 令 $a_1=3,\ a_2=7$
6 $10(3)-7=10(7)-7$
7 $30-7=70-7$
8 $23\neq 63$
9 $\therefore f(x)$ 不為 one-to-one

圖13: 一個證明中出現兩種錯誤類型之例 [30, p.1114]

在圖13之中, 此命題的目標是證明「函數 f 爲 one-to-one」。第 1 行的 a_1 和 a_2 出現時沒有宣告, 此例恰能表現出學生對於未宣告變數的錯誤理解, 進而導致證明不正確。如果有宣告, 其實此例停在第 4 行就可以得證函數 f 爲 one-to-one。但從第 5 行開始的書寫過程, 可看出學生並不清楚 a_1 和 a_2 的含意, 反而將數字代入而得到函數 f 不爲 one-to-one 的錯誤結論。單純由此例看來, 這位學生可能不知道如何證明一個函數是 one-to-one。因此, 本例中出現了兩種錯誤類型:「出現未宣告變數」、「對定義的誤解」。

本文提供相對於過往文獻較完整分類之證明錯誤類型介紹, 同時兼具宏觀性與微觀性, 在三大分類之下還細分不同子類型, 希望能提供給讀者更方便地進行錯誤類型說明和文本設計。表 2 是將緒論中提及過往文獻曾描述之錯誤類型歸類至本文分類, 顯示本文之分類考量的確涵蓋這些文獻之錯誤類型。

表 2: 證明錯誤類型與過往文獻曾提及錯誤對照表

本文分類	許介彥[2]	Selden 與 Selden [22]	Inglis 等 [11]	Ko 與 Knuth [13]	Wheeler 與 Champion [30]	Stavrou [24]
(一) 迷思概念				整體結構的錯誤		
1. 出現未宣告變數					變數混淆使用、變數未宣告	
2. 以特例做爲證明	以特例當成證明				以特例當成證明	以特例當成證明
3. 假設結論正確		證明方向相反			假設結論正確	假設結論正確
4. 特殊的證明架構不清楚	歸納步驟不適用於基底步驟					充要條件的驗證沒有雙向證明
5. 對定義的誤解					符號錯誤使用、對於one-to-one 的定義不清楚、弄混 one-to-one 與 onto 之定義	對於數學定義的不瞭解
(二) 推導錯誤			行與行之間的推論錯誤	行與行之間的推論錯誤		
6. 認知差距		認知差距	解釋不夠清楚的認知差距		認知差距	
7. 性質或定理誤用					對實數性質不理解	
8. 考量情況未完整	基底步驟漏掉某些情況					
(三) 其他						
9. 無邏輯性推論錯誤		大量錯誤			無法理解的證明	
10.筆誤、計算錯誤					計算錯誤	

值得一提的是, 本文所提供的證明錯誤分類, 僅僅以證明成品來分類, 不一定能完全反映寫證明作者之想法, 不宜過度推論。例如遇到可能對應多種類別的錯誤時, 其產生原因只有原作者知道, 需要進一步訪談才能確定真正的原因爲何。而對於未來的相關研究方面, 今後可進一步對錯誤分類進行研究, 比較不同類型的錯誤, 探討面對不同錯誤類型, 學生的表現有無不同? 或是從學習的角度切入, 對產生不同類型錯誤的學生提出相關的學習建議。

参考文獻

1. 國家教育研究院。十二年國民基本教育課程綱要: 數學領域。新北市: 國家教育研究院, 2018。
2. 許介彥。數學歸納法使用上易犯的錯誤。數學傳播季刊, 26(1), 77-82, 2002。
3. L. Alcock and K. Weber, Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants, *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2005), 125-134.
4. D. Alibert and M. Thomas, Research on mathematical proof, in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.215-230). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.
5. S. K. Bleiler, D. R. Thompson, D. R., and M. Krajcevski, Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2014), No.2, 105-127.
6. M. De Villiers, *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*, Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 1999.
7. R. Friedberg, *An Adventurer's Guide to Number Theory*, New York, NY: Dover Publications, 1968.
8. P. O. Haavold, Impediments to mathematical creativity: Fixation and flexibility in proof validation, *The Mathematics Enthusiast*, 18(2021), No.1, 139-159.
9. G. Harel and L. Sowder, Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, in F. K. Lester, Jr. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.805-842). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.
10. M. Inglis and L. Alcock, Expert and novice approaches to reading mathematical proofs, *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(2012), No.4, 358-390.
11. M. Inglis, J. P. Mejia-Ramos, K. Weber, and L. Alcock, On mathematicians' different standards when evaluating elementary proofs, *Topics in Cognitive Science*, 5(2013), No.2, 270-282.
12. Y.-Y. Ko, Mathematics teachers' conceptions of proof: Implications for educational research, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(2010), No.6, 1109-1129.
13. Y.-Y. Ko and E. J. Knuth, Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors, *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2013), No.1, 20-35.
14. Y. Lai and K. Weber, Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs, *Educational Studies in Mathematics*, 85(2014), 93-108.
15. Y. Lai, K. Weber, and J. P. Mejia-Ramos, Mathematicians' perspectives on features of a good pedagogical proof, *Cognition and Instruction*, 30(2012), No.2, 146-169.

16. K. Lew, T. P. Fukawa-Connelly, J. P. Mejia-Ramos, and K. Weber, Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey, *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2016), 162-198.
17. N. Marco, A. Palatnik, and B. B. Schwarz, Mind the gaps: Gap-filling in proving activities, *For the Learning of Mathematics*, 41(2021), No.2, 21-25.
18. National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM, 2000.
19. National Council of Teachers of Mathematics, *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*, Reston, VA: NCTM, 2009.
20. R. A. Powers, C. Craviotto, and R. M. Grassl, Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41 (2010), No.4, 501-514.
21. A. Samkoff and K. Weber, Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension, *The Journal of Mathematical Behavior*, 39(2015), 28-50.
22. A. Selden and J. Selden, Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (2003), No.1, 4-36.
23. B. Shongwe, Learners' beliefs about the functions of proof: Building an argument for validity, *Educational Studies in Mathematics*, 107(2021), 503-523.
24. S. G. Stavrou, Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates, Retrieved January 19, 2022, from http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/stavrou01/article.pdf, 2014.
25. J. C. Stockton and N. Wasserman, Forms of knowledge of advanced mathematics for teaching, *The Mathematics Enthusiast*, 14(2017), 575-606.
26. G. J. Stylianides, A. J. Stylianides, and K. Weber, Research on the teaching and learning of proof: taking stock and moving forward, in J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp.237-266). Reston, VA: NCTM, 2017.
27. D. A. Stylianou, M. L. Blanton, and E. J. Knuth, Introduction, in D. A. Stylianou, M. L. Blanton, and E. J. Knuth (Eds), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp.1-12). New York, NY: Routledge, 2009.
28. K. Weber, Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 43(2012), 463-482.
29. K. Weber and J. Czocher, On mathematicians' disagreements on what constitutes a proof, *Research in Mathematics Education*, 21(2019), No.3, 251-270.
30. A. Wheeler and J. Champion, Students' proofs of one-to-one and onto properties in introductory abstract algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(2013), No.8, 1107-1116.
31. D. A. Yopp, How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics, *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2011), No.2, 115-130.

—本文通訊作者温媺純任教於國立彰化師範大學科學教育研究所, 第一作者陳韋仰爲該所博士生—