數學傳播 46卷4期, pp. 43-55

複數極式的主輻角對卡當公式與電腦繪圖的影響

李政豐

壹、楔子

直線有斜率, 於是可以定義斜角 θ, 它是由 x 軸正向逆時針方向轉到直線的夾角, $0^\circ \le \theta < 180^\circ$ 且 $\theta \neq 90^\circ$, 斜率 $= \tan\theta$。
108課綱的數甲, 條目 N12 甲-3 複數:
複數平面, 複數的極式, 複數的四則運算與絕對值及其幾何意涵, 棣美弗定理, 複數的n次方根。
課程手冊 P.461有如下的相關約定:
當 $z = a + bi$, a、$b \in \mathbb{R}$, 且 $[r,\theta]$ 為 z 在座標平面的極座標, 複數的絕對值 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, 則 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 為 z 的極式, 其中 $r = |z|$, θ 稱為輻角, θ 值不唯一。

當 $0 \le \theta < 2\pi$ 時, θ 稱為 z 的主輻角 $\mathrm{Arg}(z)$。 定義 (1)

這種定義在複數的乘法 $r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 有它的優勢。
但是, 如圖 (1):

數學軟體 GeoGebra 定義複數的主輻角是 $-\pi < \theta \le \pi$。 定義 (2)

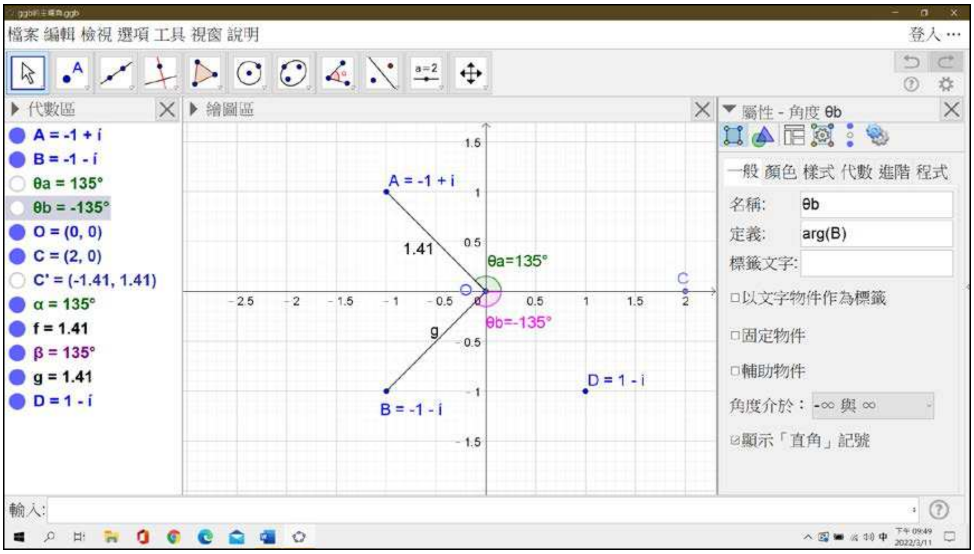

圖1

小提醒:

GeoGebra 要計算複數平面上 $\sqrt[3]{-8}$ 的主根要輸入 $(-8-0*i)^{1/3}$, 一定要把 i 寫出來, 才會出現複數解 $1+1.732i$。不然會出現 $\sqrt[3]{-8}=-2$, 它是 $x^3=-8$ 的實根。

如下圖 2、圖 3

數學軟體 Maple 定義複數的主輻角也是 $-\pi<\theta\leq\pi$。　定義 (2)

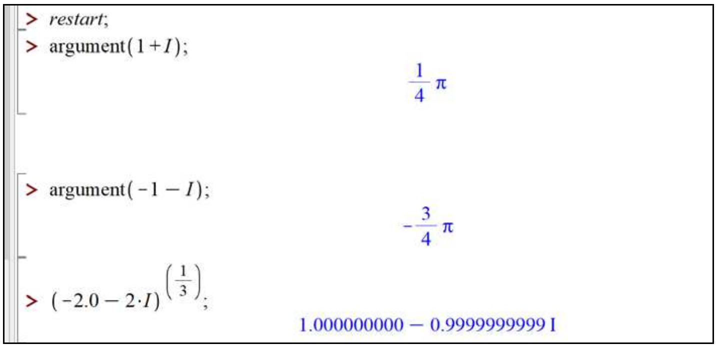

圖2

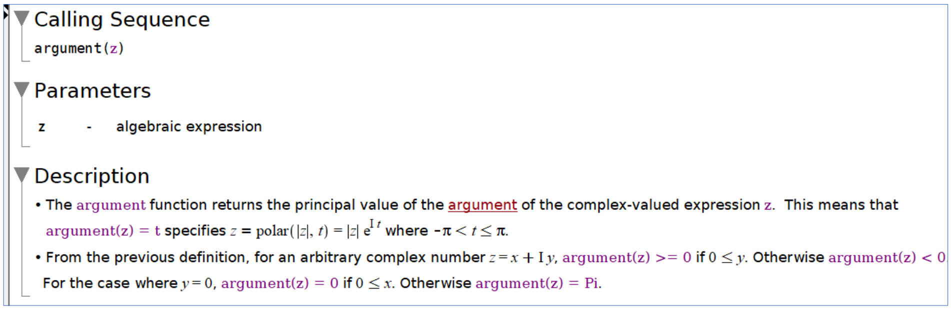

圖3

小提醒:

Maple 要計算 $\sqrt[3]{-2.0-2I}$ 要輸入 $(-2.0-2\cdot I)^{1/3}$, 一定要把其中一個數改成小數點, 才會出現數值解。它的虛數單位 i, 要用大寫 I 表示, 如果用 $(-2-2\cdot i)^{1/3}$, 它不會幫你算出來。

課綱委員可能沿用極座標的觀點：$[r,\theta]$ 爲 z 在座標平面的極座標, $0\leq\theta<2\pi$ 這個輻角的定法, 在國內高中課本已經有數十年的歷史了。陸軍砲兵的射向方位角, 就是使用 $0\leq\theta<6400$ mil (我們稱米位, $360^\circ=6400$ mil)。

極座標 $[r,\theta]$ 是二維平面座標系的一種表示法, 與複數平面並不完全相同, 我覺得複數主輻角的定法與範圍不一定要與極座標相同。

我們需要考慮的是：修正複數的主輻角, 是否會方便複數方根的計算?

我記得陳昭地老師把梯形兩腰 (不平行的兩邊) 中點的連線, 稱爲中位線。於是解決了過

去稱它爲梯形中線的煩惱, 因爲三角形的中線是頂點到對邊中點的連線。我們也期待 108 新課綱, 如果能把複數主輻角的範圍修正過來, 對複數的 n 次方根的計算會更方便。李家同校長說虛數在電機用很多, 複數的方根相形重要。

關鍵字: 卡當公式、反曲點、資訊科技融入數學教學、主根、原根、主輻角。

貳、本文

(甲) 主根

若用主輻角的定義 (2) $-\pi<\theta\le\pi$

$$(-4)^{1/2}=[4(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)]^{1/2}=2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=2i,$$

絕對值開方、主輻角除以 2, $x^2=-4$ 的主根是 $2i$;

$$(-8)^{1/3}=[8(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)]^{1/3}=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=1+\sqrt{3}i,$$

絕對值開立方、主輻角除以 3, $x^3=-8$ 的主根是 $1+\sqrt{3}i$。
下列是 Maple 的算法, 要輸入 -8.0 才會出現數值解：

$$>(-8.0)^{\left(\frac{1}{3}\right)};\qquad 1.000000000+1.732050807\,I$$

人類發明一元二次方程式的公式解之後, 隔一千多年才發明一元三次方程式的卡當公式解, 可見卡當公式有一定的難度, 高中學生學習卡當公式也不太容易。

(乙) 我們先由多項式的變形談起

把三次函數圖形平移使反曲點水平平移到 y 軸上, 是卡當公式解根的一個步驟。任意實係數一元三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 都可以選擇函數圖形上的一個點 $(h,f(h))$, 做泰勒展開式, 或是說表示成 $(x-h)$ 的展開式。

我們可以用連續綜合除法, 算得 $(x-h)$ 乘方的係數, 如下圖 4：

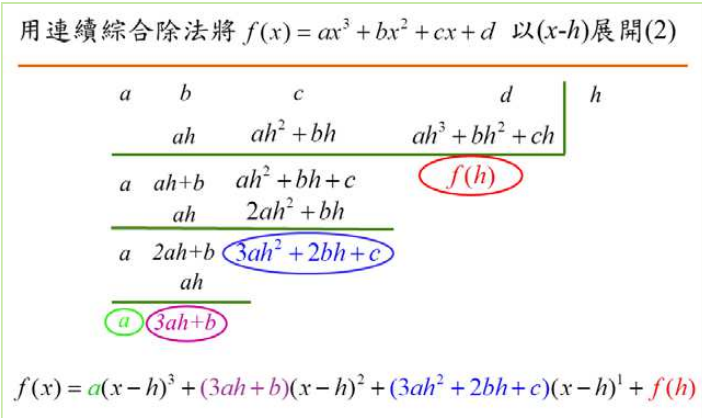

圖 4

如果我們選擇 $h=\frac{-b}{3a}$, 那麼 $3ah+b=0$, 做 $(x-h)$ 的展開式時, 二次項 $(x-h)^2$ 的係數就消失了, $(h,f(h))$ 是三次函數的反曲點, 也是對稱中心。以下圖爲例: $f(x)=x^3-15x^2+72x-109$, 經由連續綜合除法, 觀察下圖 5 的第三列, 函數會變成 $f(x)=(x-5)^3-3(x-5)+1$。

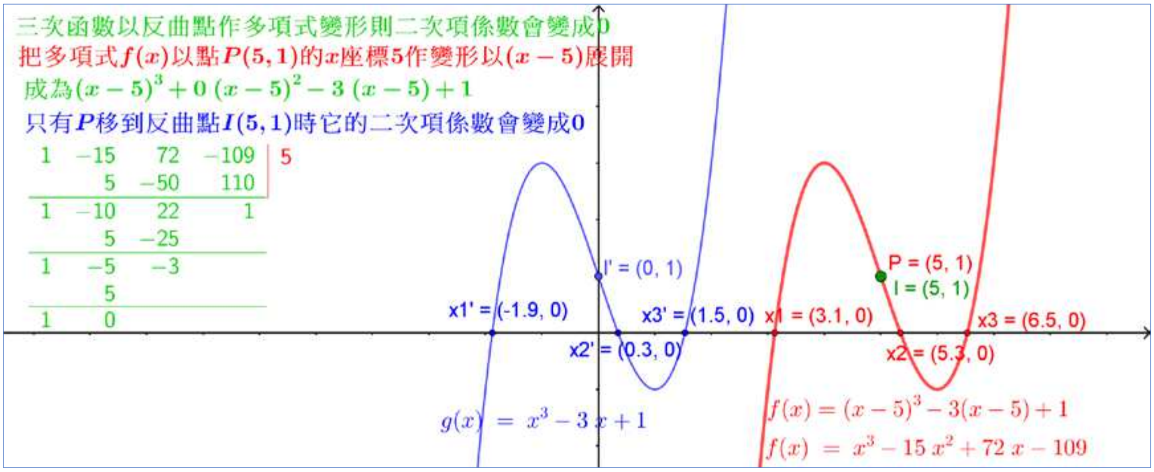

圖 5

如果把函數 $f(x)=(x-5)^3-3(x-5)+1$ 的圖形, 往左方水平移動5單位, 就變成函數 $g(x)=x^3-3x+1$ 的圖形, 如上圖的藍色曲線圖形。卡當公式就是在缺二次項的情況下被發明出來。觀察上圖:

當我們利用卡當公式, 把 $g(x)=x^3-3x+1=0$ 取到小數第一位的近似根 $r_1\approx -1.9$, $r_2\approx 0.3$, $r_3\approx 1.5$ 解出來, 這裡的 3 根, 就是上圖的藍色曲線與 x 軸交點 x_1', x_2', x_3' 的 x 座標, 把三點往右水平移動 5 單位就變成 x_1,x_2,x_3 三點, 這三點的 x 座標 $r_1+5\approx 3.1$, $r_2+5\approx 5.3$, $r_3+5\approx 6.5$ 就是原方程式

$$f(x)=x^3-15x^2+72x-109=(x-5)^3-3(x-5)+1=0$$

的三個近似根。若有虛根, 把座標平面看成複數平面, 照樣把根加h, 就能得到原方程式的根。所以我們只要能解像 $x^3+px+q=0$ 的方程式, 又知道原函數圖形反曲點$(h,f(h))$ 的 x 座標 h 就能得到原來實係數 3 次方程式的三根。因此我們只聚焦在 $x^3+px+q=0$ 的方程式解根。

(丙) 卡當公式

由乘法公式 $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

得到 $(u+v)^3-3uv(u+v)-(u^3+v^3)=0.$ (A) 式

將 $x^3+px+q=0$ 與 (A) 式互相比對 : 當 $p=-3uv$ 且 $q=-(u^3+v^3)$ 的條件下, $x=u+v$ 就是方程式 $x^3+px+q=0$ 的根。

也就是說 $x^3+px+q=0$ 有解的條件是：能找到一組數 u 與 v

滿足條件 $\begin{cases} uv=\frac{-p}{3} \\ u^3+v^3=-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3=\frac{-p^3}{27} \\ u^3+v^3=-q \end{cases}$ (請注意箭頭不一定可逆)。

我們用右邊的聯立方程式 $\begin{cases} u^3v^3=\frac{-p^3}{27} \\ u^3+v^3=-q \end{cases}$ 由韋達公式作一個二次方程式。根據韋達公式, 已知兩根之和與兩根之積, 就知道 u^3、v^3 為二次方程式 $y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$ 的兩根。由根的公式

$$令\ u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\quad 則\ u=\omega^k\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$v=\omega^k\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},k=0,1,2,$$

其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 是 $x^3=1$ 的原根。

$u^3+v^3=-q$ 是必然, 重要的是 u、v 必須要滿足 $uv=-p/3$, 於是我們得到:
99 課綱高中數學教師手冊的內容。

卡當公式 (1)
$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{d}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{d}},$$
$$x_2=\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{d}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{d}},$$
$$x_3=\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{d}}+\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{d}},$$

為方程式 $x^3+px+q=0$ 的三根, 其中判別式 $d=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$, 原根 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

卡當公式 (1) 有些瑕疵, 在一些情況因為主輻角的定義不同會出現錯誤。

例如: 求解 $g(x)=x^3-3x+1=0\quad (x^3+px+q=0)$.

解析: 如果我們用聯立方程式 $\begin{cases} u^3v^3=\frac{-p^3}{27} \\ u^3+v^3=-q \end{cases}$ 來計算, 就有可能犯錯。

因為 $u^3v^3=\dfrac{-p^3}{27}$, 不見得是 $uv=\dfrac{-p}{3}$.

如果我們用 $\begin{cases} uv=\frac{-p}{3}=1 \\ u^3+v^3=-q=-1 \end{cases}$, 而主根取得正確, 那結果就會正確。

以 u^3, v^3 爲兩根的二次方程式爲 $y^2+y+1=0$。

令 $u^3=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad v^3=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,$

如果我們用定義 (1) 取主輻角 $0\le\theta<2\pi$ 時, 則

$$\text{主根}\quad \alpha=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^{1/3}=(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ),$$

$$\text{主根}\quad \beta=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)^{1/3}=(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ),$$

$$u=\alpha,\quad \alpha\omega,\quad \alpha\omega^2,\quad v=\beta,\quad \beta\omega,\quad \beta\omega^2.$$

卡當公式 (1) 告訴我們三根是 $\alpha+\beta$, $\omega\alpha+\omega^2\beta$, $\omega^2\alpha+\omega\beta$.

可是 $uv=\alpha\beta=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=\omega$, 與 $uv=\dfrac{-p}{3}=1$ 不合。

難怪高中學生對99課綱教師手冊的卡當公式一直搞不懂。但是如果我們用定義 (2) 取主輻角 $-\pi<\theta\le\pi$ 時, 則

$$\text{主根}\ \alpha=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^{1/3}=(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ),$$

$$\text{主根}\ \beta=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=(\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ))^{1/3}=(\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ))$$

$uv=\alpha\beta=(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=1$, 與 $uv=\dfrac{-p}{3}=1$ 符合。

三實根是 $\alpha+\beta=2\cos(40^\circ)$, $\omega\alpha+\omega^2\beta=2\cos 160^\circ$, $\omega^2\alpha+\omega\beta=2\cos 80^\circ$, 如下圖。

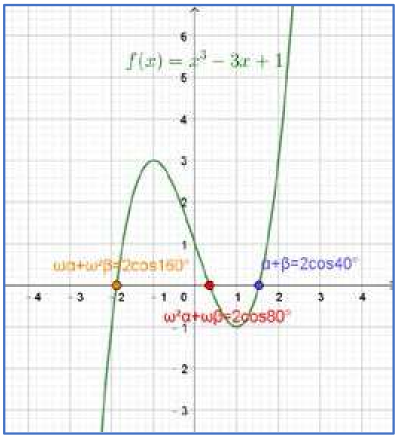

圖 6

爲方便實用起見, 我們以下都用 定義 (2) 取主輻角 $-\pi<\theta\le\pi$ 來計算。

卡當公式 (2) $u^3=\dfrac{-q}{2}+\sqrt{d}, \qquad v^3=\dfrac{-q}{2}-\sqrt{d}.$

令 主根 $\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}+\sqrt{d}}$, 主根 $\beta=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}-\sqrt{d}}$,

$u=\alpha$、$\alpha\omega$、$\alpha\omega^2$, $\qquad v=\beta$、$\beta\omega$、$\beta\omega^2$。

考慮 $u+v$ 的 9 種配對, 滿足條件 $uv=\dfrac{-p}{3}$, 就是方程式 $x^3+px+q=0$ 的根, 其中判別式 $d=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$, 原根 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 我們將結論整理成一個表格如下:

表 1

	條件	根的情形
$d>0$	$\frac{-q}{2}+\sqrt{d}\geq 0$ 且 $\frac{-q}{2}-\sqrt{d}\geq 0$ 例: $f(x)=x^3-3x-4=0$ 三根: $\alpha+\beta$ (實), $\alpha\omega+\beta\omega^2$ (虛), $\alpha\omega^2+\beta\omega$ (虛)	一實二虛根
	$\frac{-q}{2}+\sqrt{d}\geq 0$ 且 $\frac{-q}{2}-\sqrt{d}<0$ 例: $f(x)=x^3+3x-2=0$ 三根: $\alpha+\beta\omega$ (實), $\alpha\omega+\beta$ (虛), $\alpha\omega^2+\beta\omega^2$ (虛)	一實二虛根
	$\frac{-q}{2}+\sqrt{d}<0$ 且 $\frac{-q}{2}-\sqrt{d}<0$ 例: $f(x)=x^3-3x+4=0$ 三根: $\alpha\omega+\beta\omega$ (實), $\alpha+\beta\omega^2$ (虛), $\alpha\omega^2+\beta$ (虛)	一實二虛根
	$\frac{-q}{2}+\sqrt{d}<0$ 且 $\frac{-q}{2}-\sqrt{d}\geq 0$	不會發生
$d=0$	$\frac{-q}{2}\geq 0$ 例: $f(x)=x^3-3x-2=0$ 三根: $\alpha+\beta$ (單), $\alpha\omega+\beta\omega^2$ (重), $\alpha\omega^2+\beta\omega$ (重)	三實根 (一單根二重根)
	$\frac{-q}{2}<0$ 例: $f(x)=x^3-3x+2=0$ 三根: $\alpha\omega+\beta\omega$ (單), $\alpha+\beta\omega^2$ (重), $\alpha\omega^2+\beta$ (重)	三實根 (一單根二重根)
$d<0$	$\frac{-q}{2}\geq 0$ 例: $f(x)=x^3-6x-4=0$ 三根: $\alpha+\beta$ (單), $\alpha\omega+\beta\omega^2$ (單), $\alpha\omega^2+\beta\omega$ (單)	三實根 (三個不等實根)
	$\frac{-q}{2}<0$ 例: $f(x)=x^3-6x+4=0$ 三根: $\alpha+\beta$ (單), $\alpha\omega+\beta\omega^2$ (單), $\alpha\omega^2+\beta\omega$ (單)	三實根 (三個不等實根)

當 $\dfrac{-q}{2}=0$ 且 $d=0$ 是三重根的情形, 我們不討論。

重要的是 u、v 必須要滿足 $uv=-\frac{p}{3}$, 方程式 $x^3+px+q=0$, 判別式 $d=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 令 主根 $\alpha=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{d}}$, 主根 $\beta=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{d}}$。

若由聯立方程組 $\begin{cases} uv=\frac{-p}{3} \\ u^3+v^3=-q \end{cases}$ 的條件：

卡當公式 (3) $u^3=\frac{-q}{2}+\sqrt{d}$, $v^3=\frac{-q}{2}-\sqrt{d}$。

令 主根 $\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{d}}$, $u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2$, 代入 $uv=\frac{-p}{3}$ 讓它自動配對, 則 $\alpha+\frac{-p}{3\alpha}$、$\alpha\omega+\frac{-p}{3\alpha\omega}$、$\alpha\omega^2+\frac{-p}{3\alpha\omega^2}$ 就是方程式 $x^3+px+q=0$ 的三根。

其中判別式 $d=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, 原根 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

卡當公式 (3) 是最方便的方法了。

例題: 解 $f(x)=x^3-15x^2+72x-109=0$.

解說: 反曲點的 x 座標 $h=\frac{-b}{3a}=5$, 把 $f(x)$ 用連續綜合除法, 化成 $(x-5)$ 次方的多項式

$$f(x)=(x-5)^3-3(x-5)+1.$$

先解 $g(x)=x^3-3x+1=0$ (對比 $x^3+px+q=0$),

$$p=-3,\quad q=1.$$

u^3、v^3 爲二次方程式 $y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$ 的兩根, 則由聯立方程組 $\begin{cases} uv=\frac{-p}{3}=1 \\ u^3+v^3=-q=-1 \end{cases}$,

$$u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{-3}{4}}.$$

判別式 $d=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{-3}{4}<0$, 主根 $\alpha=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{-3}{4}}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{-4+4\sqrt{3}i}$,

再回到原方程式 $(x-5)^3-3(x-5)+1=0$, 當 $u=\alpha$, $\quad uv=\frac{-p}{3}=1$, $\quad$ 故 $v=\frac{1}{\alpha}$。

原方程式第一個根是 $\alpha+\frac{1}{\alpha}+5$;

原方程式第二個根是 $\omega\alpha+\frac{1}{\omega\alpha}+5=\omega\alpha+\omega^2\cdot\frac{1}{\alpha}+5$;

原方程式第三個根是 $\omega^2\alpha+\frac{1}{\omega^2\alpha}+5=\omega^2\alpha+\omega\cdot\frac{1}{\alpha}+5$.

下面是 Maple 程式:

$> \text{solve}(x^3 - 15 \cdot x^2 + 72 \cdot x - 109 = 0, x);$

$$\frac{1}{2}(-4+4I\sqrt{3})^{1/3} + \frac{2}{(-4+4I\sqrt{3})^{1/3}} + 5, -\frac{1}{4}(-4+4I\sqrt{3})^{1/3} - \frac{1}{(-4+4I\sqrt{3})^{1/3}} + 5 + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\Big(\frac{1}{2}(-4+4I\sqrt{3})^{1/3} - \frac{2}{(-4+4I\sqrt{3})^{1/3}}\Big),$$
$$\frac{-1}{4}(-4+4I\sqrt{3})^{1/3} - \frac{1}{(-4+4I\sqrt{3})^{1/3}} + 5 - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\Big(\frac{1}{2}(-4+4I\sqrt{3})^{1/3} - \frac{2}{(-4+4I\sqrt{3})^{1/3}}\Big).$$

Maple 執行結果有 i, 但化簡到最後都可以消掉 i, 變成 3 實根。(這是所謂的隱藏根)。
如果把主根數值化

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ = 0.766044443 + 0.64278761i,$$

代入上面卡當公式 (3), 即可得到 3 個數值根, 或者直接由 Maple 計算數值根。Maple 程式執行如下 (只要把最後等號右邊的 0 用 0.0 代就可得到數值解) :

$> \text{solve}(x^3 - 15 \cdot x^2 + 72 \cdot x - 109 = 0.0, x);$

$$3.120614758, 5.347296355, 6.532088886.$$

如果用 GeoGebra 繪圖, 可與圖形比對 x_1、x_2、x_3 三點的 x 座標。

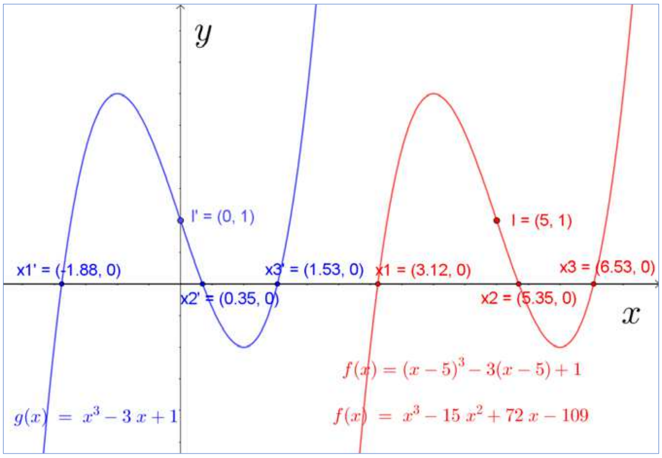

圖 7

(丁) 動態的卡當公式解及費拉里公式解

令四次方程式 $f_4(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, 經由移項 $x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$

用配方, 把左邊化成完全平方 $(x^2+\frac{b}{2}x)^2=\frac{b^2}{4}x^2-cx^2-dx-e$,

$$\Big(x^2+\frac{b}{2}x\Big)^2=\Big(\frac{b^2}{4}-c\Big)x^2-dx-e.$$

爲了調整係數, 使左右兩邊變成 x 的完全平方式, 在左邊的二次式增加常數 $\frac{k}{2}$:

$$\Big(x^2+\frac{b}{2}x+\frac{k}{2}\Big)^2=k\Big(x^2+\frac{b}{2}x\Big)+\frac{k^2}{4}+\Big(\frac{b^2}{4}-c\Big)x^2-dx-e.$$

整理得到 $(x^2+\frac{b}{2}x+\frac{k}{2})^2=(\frac{b^2}{4}-c+k)x^2+(\frac{bk}{2}-d)x+(\frac{k^2}{4}-e).$ (B)

令 (B) 式的判別式 $D=0\ \Rightarrow \Big(\frac{bk}{2}-d\Big)^2-4\Big(\frac{b^2}{4}-c+k\Big)\Big(\frac{k^2}{4}-e\Big)=0.$
得到 k 的三次方程式

$$\text{乘開化簡得}\ \Rightarrow\ -k^3+ck^2+(4e-bd)k+d^2+b^2e-4ce=0.$$
$$\text{令}\ g_3(k)=k^3-ck^2+(bd-4e)k-d^2-b^2e+4ce,$$

則不論 k 是 $g_3(k)=0$ 的任一個實根或虛根都會滿足判別式 $D=0$ 的條件, 會使得 (B) 式右邊能化成 x 的完全平方式, 然後才能去解兩個二次方程式得 4 根。費拉里公式要先解 $g_3(k)=0$ 的 k, 再反代入 (B) 式解四根。這裡面還要用到許多程式設計的技巧, 因爲篇幅較大, 式子繁雜, 也就沒有將它詳細列出來。

卡當公式及費拉里公式都要用到複數開平方、開立方, 複數主輻角用 $[0,2\pi)$ 在程式設計時吃盡了計算的苦頭, 直到主輻角改成 $(-\pi,\pi]$ 時程式才能順利完成。

下面：圖 8, 9 是卡當公式動態解, 圖 10, 11, 12 是費拉里公式的動態解。

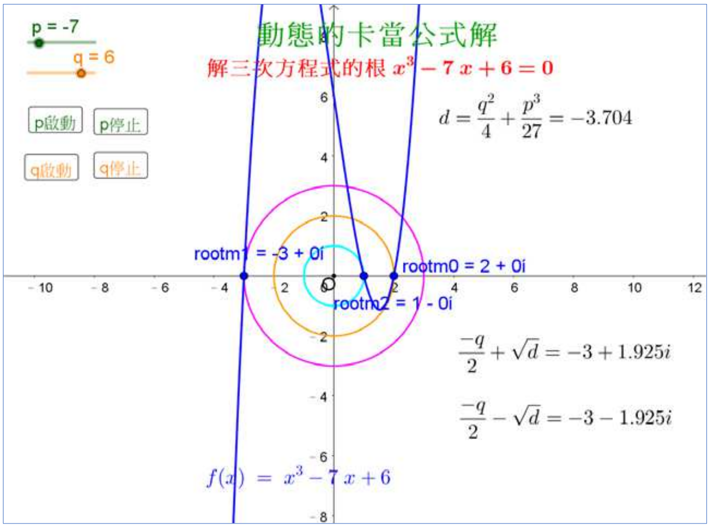

圖8: 三不等實根分別在 3 個圓上

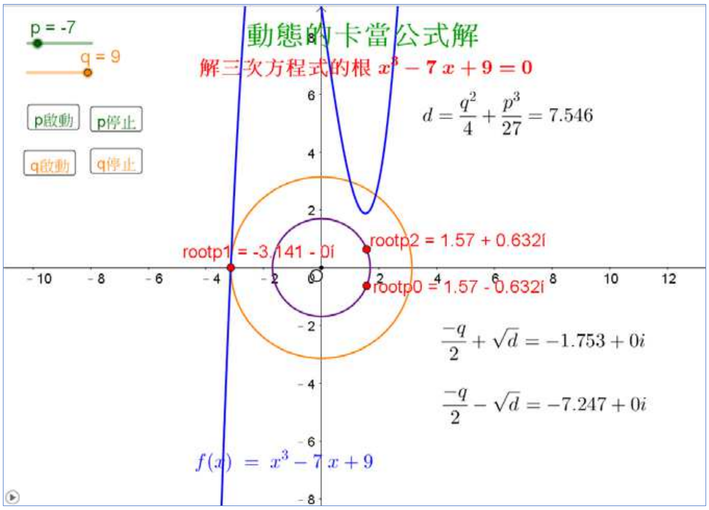

圖 9: 一實二虛根因絕對值不同分別在 2 個圓上

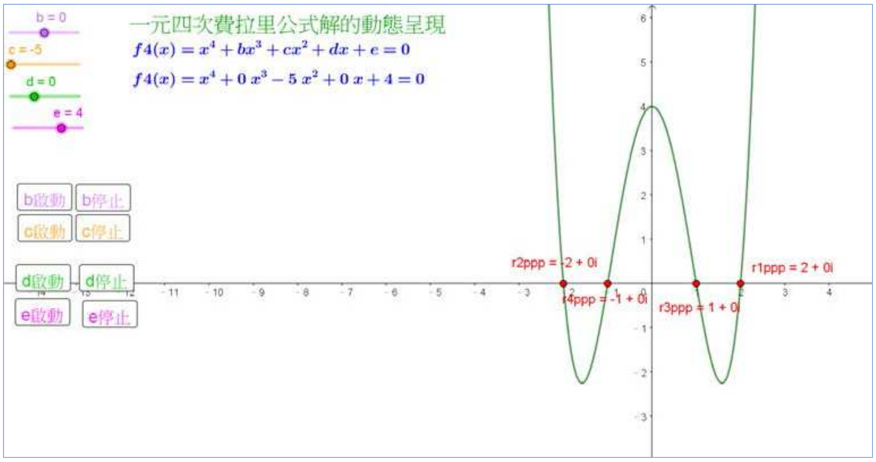

圖 10: 四個不等實根

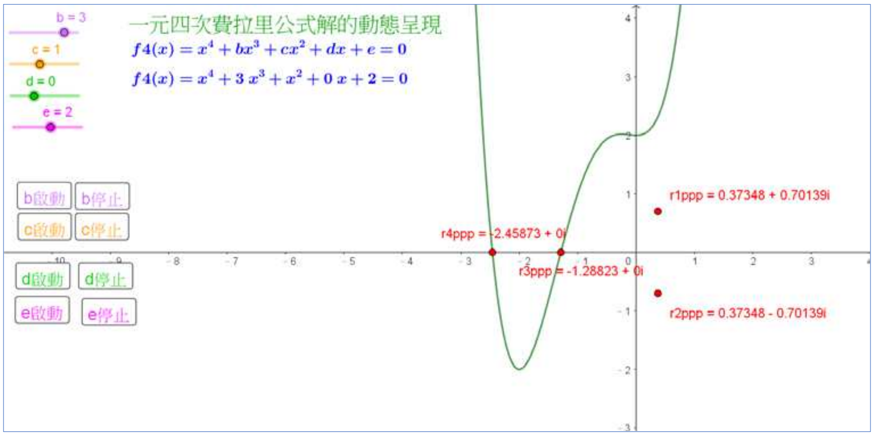

圖 11: 二實二虛根

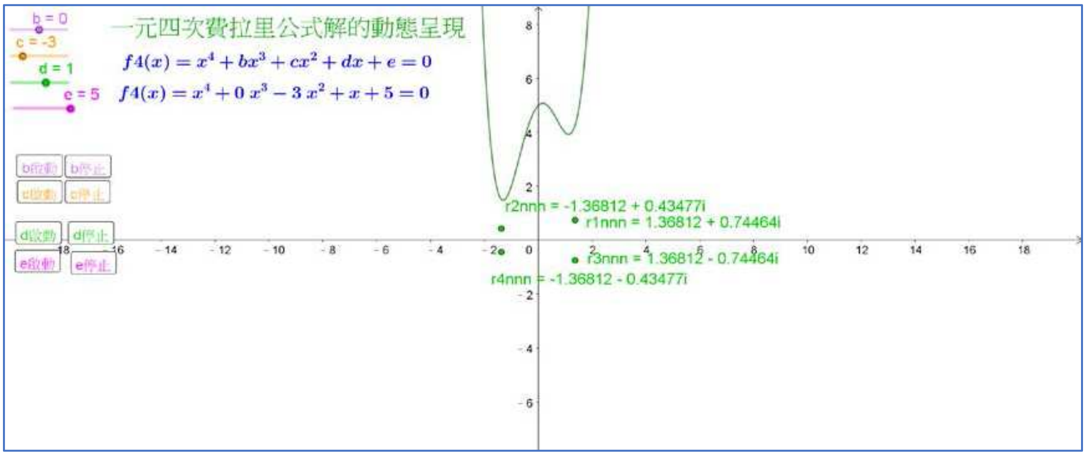

圖 12: 四虛根

當高中生看到動態的卡當公式解及費拉里公式解, 既好奇又興奮, 上著數學課還吵著要嘗試操作, 看得出來他們對動態解有很大的興趣。在用 GeoGebra 設計程式時, 我必須同時用 Maple 來檢核程式的正確性、尋找錯誤、對照驗算。可見在高中階段 108 課綱把複數的 n 次方根加進來是正確的抉擇, 但是希望複數主輻角的定義要方便計算。

參、結語

卡當公式在 108 新課綱的課本及教師手冊中已經消失了, 這是我們非常難過的一件事。

這篇文章我們用到了 Maple 的符號運算的優勢, 以及 GeoGebra 幾何繪圖的專長。

過去的年代, 老師們還不是很習慣用資訊科技去檢核數學試題的正確性, 尤其是像卡當公式、費拉里公式這種非常繁雜的計算, 方根的定義也不是很清楚, 用手算推導又要花費很長的時間, 因此不太容易發現墨守成規的錯誤.

隨著資訊科技的進步, 老師們需要善用工具軟體, 才能跟上教育科技的腳步, 將日常生活的內涵, 融入數學的思維, 藉由工具軟體解決生活上的數學問題。這才是進步而有素養的學習。張鎮華老師說過善用數學工具軟體也是一種素養。

順便提一下, Maple 雖然是一個功能很強大的數學計算軟體, 卡當公式解得非常好, 但是它卻沒有內建的費拉里公式解：也就是任意係數的四次實係數方程式不能用公式解, 能分解成一次乘三次或二次乘二次的才有公式解。

$> solve(x^4 - x^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 15 = 0, x);$

$$RootOf(\_Z^4 - \_Z^3 - 3\,\_Z^2 - 3\,\_Z - 15, index = 1), RootOf(\_Z^4 - \_Z^3 - 3\,\_Z^2 - 3\,\_Z - 15, index = 2), RootOf(\_Z^4 - \_Z^3 - 3\,\_Z^2 - 3\,\_Z - 15, index = 3), RootOf(\_Z^4 - \_Z^3 - 3\,\_Z^2 - 3\,\_Z - 15, index = 4) \quad (6)$$

當然數值解是可以的, 它可能是用牛頓法或其他數值方法做出來的。

```
> solve(x^4 - x^3 - 3·x^2 - 3.0·x - 15.0 = 0.0, x);
2.94814304479466, -0.0200978219895990 + 1.63288372852250 I, -1.90794740081546,        (9)
    -0.0200978219895990 - 1.63288372852250 I
```

現在的學生很幸福, 在資訊科技尚未普及的年代, 我們靠著手算或電算器去解決問題, 複雜費時的計算耗盡心力, 也不容易將算得的結果驗證是否正確, 難怪中學生望之卻步, 使得卡當的算法僅流於背公式, 學生看不見根在哪裡? 也不知道公式的參數變動時圖形會有哪些變化, 抽象與具體有一段看不見的鴻溝。但是藉由 GeoGebra 的視覺化表徵, 我們把一元三次、四次實係數方程式的根能自然呈現在複數平面上, 這要感謝免費軟體 GeoGebra 的原著奧地利數學家 Markus Hohenwarter ([2]) 的功勞。還要感謝交大黃大原老師及師大陳昭地老師給我的指導, 以及左台益老師大力推動 GeoGebra 教學的成果。

參考資料

1. 朱亮儒、洪有情、陳昭地。三次函數圖形的三個超額特徵, 科教月刊第335期, 21-35, 民99年12月。
2. GeoGebra 官方網址 `http://www.GeoGebra.org/cms/zh_TW/download`.
3. 林福來等。99 課綱南一高中數學第一冊, 教師手冊 II。
4. 許志農等。99 課綱龍騰高中數學第一冊, 教師手冊。
5. 楊壬孝等。99 課綱全華高中數學第一冊, 教師手冊。

—本文作者爲國立竹南高級中學退休數學教師—