數學傳播 46卷4期, pp. 19-28

正圓錐、正橢錐、斜圓錐和球極投影的保圓性質

張海潮 · 黃寶興

一、引言

圓錐曲線 (又稱二次曲線) 多年來一直是高中數學的重頭戲, 經常, 教科書在引介圓錐曲線時, 會將圓錐曲線表達成空間中一個正圓錐和平面的截痕。

本文主要想討論一個正圓錐和一個正橢錐所有可能的圓截痕。我們注意到如果有一個平面的截痕是圓, 則與這個平面平行的平面, 只要不通過錐的頂點, 其截痕也一樣是圓。

以下是坐標空間中正圓錐和正橢錐的方程式, 頂點均在原點 (0,0,0), 底 (base) 均以平面 $z=1$ 的截痕代表。

(I) 正圓錐:
$\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=z^2$, $z=1$ 代表一個半徑爲 r 的圓, 稱爲底圓 (base circle)。

(II) 正橢錐:
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$, $z=1$ 代表一個橢圓 $(a\neq b)$, 稱爲底橢圓 (base ellipse)。

本文共分三節, 第一節討論正圓錐 (I) 所有的圓截痕, 第二節討論正橢錐 (II) 所有的圓截痕, 第三節討論斜圓錐與正橢錐的關聯, 第四節是一個基本的應用 — 球極投影的保圓性質。

第一節、正圓錐的圓截痕

假設有一個平面與正圓錐 (I) 相截, 若將此平面平移使其通過底圓的圓心 (0,0,1), 由於正圓錐的旋轉對稱性, 不妨設此平面 P 與底圓相交於 Y 軸方向, 並且進一步設 P 不通過頂點 (0,0,0), 則平面 P 的方程式可設爲 $z=mx+1$。現考慮 P 與正圓錐 $x^2+y^2=r^2z^2$ 的截痕。注意到 P 的法向量 (不假設單位長) 是 $(m,0,-1)$。爲了在 P 上建立一個直角坐標系, 我們取兩個彼此垂直, 並與 $(m,0,-1)$ 也垂直的單位向量 (0,1,0) 及 $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}},0,\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}\Big)$。

在 P 上以 (0,0,1) 爲原點建立坐標 (u,v):

$$(0,0,1)+u(0,1,0)+v\Big(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},0,\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\Big),$$

或

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{\sqrt{1+m^2}},\\ y &= u,\\ z &= 1+\frac{vm}{\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}$$

將此 x,y,z 代入正圓錐 $x^2+y^2=r^2z^2$, 得

$$\frac{v^2}{1+m^2}+u^2=r^2\Big(1+\frac{vm}{\sqrt{1+m^2}}\Big)^2,$$

或

$$u^2+\frac{v^2}{1+m^2}-r^2\Big(1+\frac{vm}{\sqrt{1+m^2}}\Big)^2=0.$$

若此方程代表一圓, 則 v^2 的係數必須等於1(註一)。
亦即

$$\frac{1}{1+m^2}-\frac{r^2m^2}{1+m^2}=\frac{1-r^2m^2}{1+m^2}=1,$$

或 $m^2=-r^2m^2$ 得 $m=0$.

結論: 在正圓錐 (I) 的情形, 只有平面 $z=c$, $(c\neq 0)$ 的截痕是圓。

第二節、正橢錐的圓截痕

若有一平面 P 與正橢錐 (II) 相截, 仿上節, 仍將平面 P 設爲 $z=mx+1$, 並將正橢錐之方程式改設爲 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=z^2$, 式中 $A,C>0$, $AC-B^2>0$。(註二)

在平面 P上建立直角坐標如上節:

將 $x=\dfrac{v}{\sqrt{1+m^2}}$, $y=u$, $z=1+\dfrac{vm}{\sqrt{1+m^2}}$ 代入 $z^2=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 得

$$\Big(1+\frac{vm}{\sqrt{1+m^2}}\Big)^2=A\frac{v^2}{1+m^2}+2B\frac{vu}{\sqrt{1+m^2}}+Cu^2,$$

或

$$A\frac{v^2}{1+m^2}-\Big(1+\frac{vm}{\sqrt{1+m^2}}\Big)^2+2B\frac{vu}{\sqrt{1+m^2}}+Cu^2=0.$$

如果此 u, v 方程代表一圓, 則 vu 的係數中 B 必須爲 0, 並且 v^2 的係數必須爲 C, 所以

$$\frac{A}{1+m^2}-\frac{m^2}{1+m^2}=C \quad \text{或} \quad A-m^2=C+Cm^2,\ A-C=(1+C)m^2.$$

解得 $m=\pm\sqrt{\dfrac{A-C}{1+C}}$, 並且 $A>C$。

上述條件 $B=0$, $A>C$, 表示平面 P 包含底橢圓的長軸 (Y 軸方向)。

結論 (1) **若平面** P: $z=mx+1$ 截正橢錐 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=z^2$ 於一圓, 則必 $B=0$, $A>C$, $m=\pm\sqrt{\dfrac{A-C}{1+C}}$, 此時 P 包含底橢圓 $Ax^2+Cy^2=1$, $z=1$ 之長軸 (Y 軸方向)。並且, 所有與 P 平行之平面, 只要不過頂點, 其截痕均爲圓。因此對正橢錐而言, 存在兩個平行族的平面 $m=\pm\sqrt{\dfrac{A-C}{1+C}}$ 可以截出圓痕。

(2) 從正橢錐的方程式 $Ax^2+Cy^2=z^2$, $A>C$ 可以看出, 正橢錐有兩個對稱平面, 其一是頂點與底橢圓的短軸決定的平面 S, 此即 X-Z 平面。另一是頂點與長軸決定的平面 L (即 $X=0$)。圖1, 顯示平面 S (X-Z 平面) 及底橢圓的短軸。

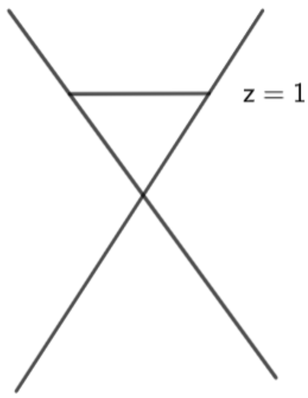


圖1

(3) 下圖 2 表示 X-Z 平面分別與正橢錐 $z^2=Ax^2+Cy^2$ 及平面 P 的交集:

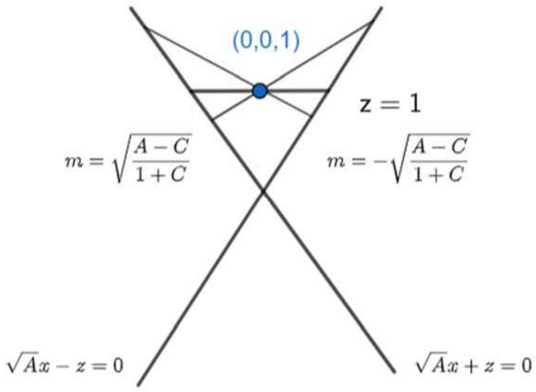


圖2

圖中 $z=1$ 的線段, 代表底橢圓的短軸, 兩條互交的線段代表平面 $z=mx+1$ 所截圓的直徑。

(4) 對平面 L $(X=0)$ 鏡射是 $x\to -x$, $y\to y$, $z\to z$, 如下圖3:

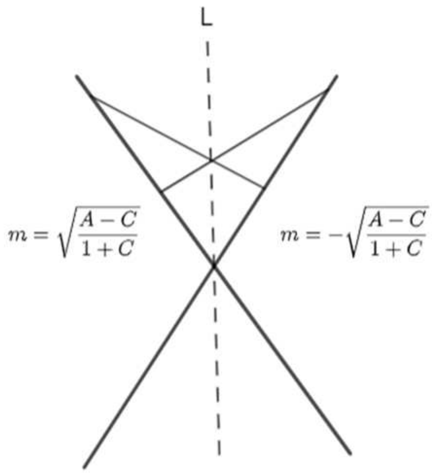


圖3

圖中虛線代表 L 與 X-Z 平面的交線, 對 L 的鏡射, 剛好交換兩個平面 (圓截痕)。圖中兩條交叉線段 $(m=\pm\sqrt{\dfrac{A-C}{1+C}})$ 是圓截痕的直徑, 互爲 L-鏡射。

(5) 承 (4), 因爲具圓截痕的平面可以是平行某一圓截痕的平面, 例如在下圖 X-Z 平面上, 顯示三條圓截痕的直徑, 分別滿足

$$\triangle OAB \text{ 全等於 } \triangle ODC,$$

$$EF \parallel AB,$$

$$\triangle OEF \text{ 與 } \triangle ODC \text{ 相似 (並見圖3).}$$

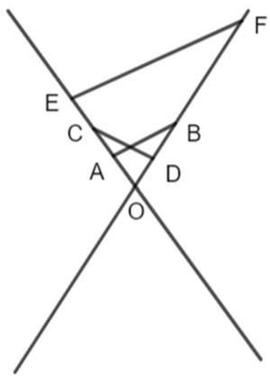


圖 4

第三節、斜圓錐即正橢錐

從上節看到, 一個正橢錐有兩族圓截痕, 因此正橢錐可視爲斜圓錐 (註三)。反之, 若有一斜圓錐, 我們要證明它同時也是一個正橢錐。

如果在空間中有一圓, $z=1$, $(x-a)^2+y^2=r^2$, $a>0$, 亦即此圓之圓心爲 $(a,0,1)$, 半徑爲 r, 圓面在 $z=1$ 上, 以 (0,0,0) 爲頂點向此圓張出一斜圓錐, 則其方程式爲

$$a>0, \quad (x-az)^2+y^2-r^2z^2=0. \tag{1}$$

我們將在 (註四) 導出此方程式。注意到當 $z=1$ 時, 方程式 $(x-a)^2+y^2-r^2=0$ 是斜圓錐之底圖, 如圖 5

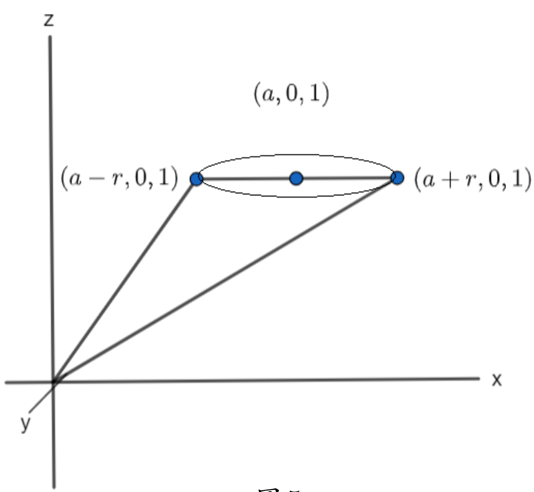


圖 5

首先觀察到 (1) 式有一鏡射對稱 $x \to x$, $y \to -y$, $z \to z$, 其鏡面 (對稱平面) 爲 X-Z 平面。(此一平面相當於上節結論 (2) 中之 S 平面)。

其次, 若令 $y=0$, 即在 X-Z 平面上觀察, 方程式 (1) 變成兩條直線, 分別是原點和 $(a+r,1)$, $(a-r,1)$ 的連線:

$$(x-az)^2-r^2z^2=0,$$

如下圖 6 所示, 兩線之夾角爲 θ:

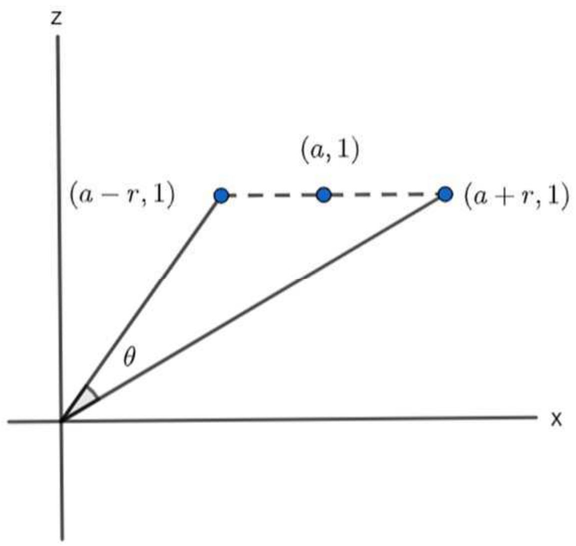


圖6

現進行以 Y-軸爲軸, X-Z 平面上逆時鐘的旋轉, 將圖 6 中的兩條直線轉至下圖 7 中的兩條直線

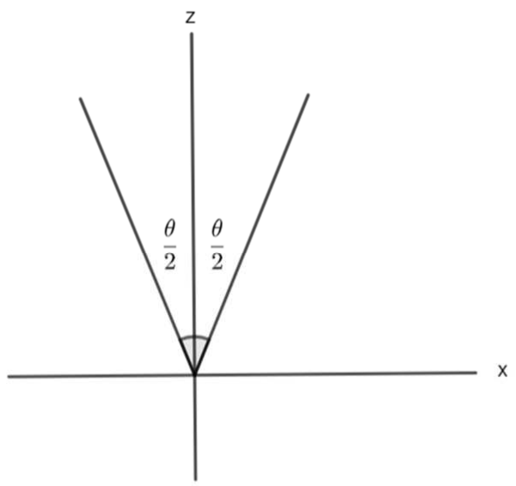


圖7

此二直線與 Z 軸之夾角均爲 $\dfrac{\theta}{2}$, 方程式爲 $x=\pm\tan\dfrac{\theta}{2}z$,

因此, 在此轉動之下 $(x-az)^2-r^2z^2$ 變成 $A(x^2-\tan^2\dfrac{\theta}{2}z^2)$, A 是大於 0 的常數。

而斜圓錐方程式 $(x-az)^2+y^2-r^2z^2=0$,

在此轉動之下變成 $A(x^2-\tan^2\dfrac{\theta}{2}z^2)+y^2=0$

$$\text{或 } Ax^2+y^2=A\tan^2\frac{\theta}{2}z^2.$$

結論: 將式 (1) 所代表的斜圓錐, 透過一個以 Y 軸爲軸的旋轉, 可以將斜圓錐“轉正”而得正橢錐 (2), 因此斜圓錐和正橢錐是等價的概念。

第四節、球極投影的保圓性質

所謂球極投影 (stereographic projection), 如下圖所示 (註五)

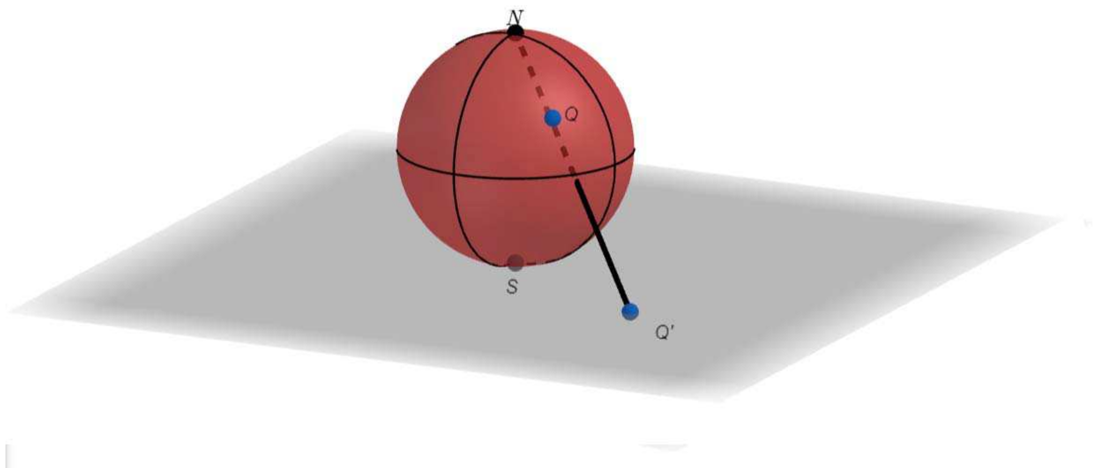


圖 8

將球置於桌面上, 北極 N 在正上方, 桌面視爲過南極 S 的切平面。對球面上 (非北極的點 Q), 連 NQ 並延長交桌面於 Q', $Q\to Q'$ 稱爲球極投影。

球極投影有一基本的保圓性質, 即對球面上任何一不過北極 N 的圓, 投影之後在桌面上的像集仍爲一圓。(註六)

首先注意到, 若從 N 投影一圓, 其實就是建立一個斜或正圓錐, 以下只討論斜圓錐的情形, 如下圖 9, 此時, 圓面與赤道面不平行。

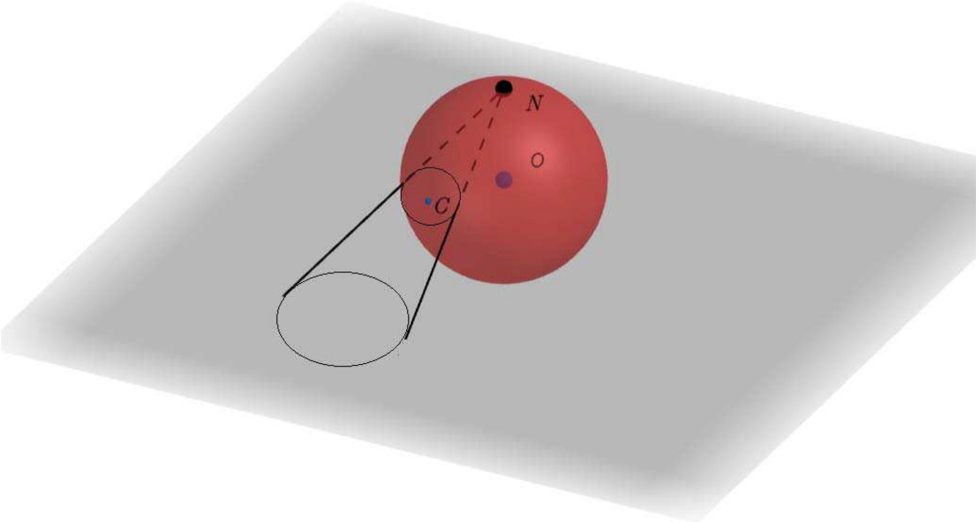


圖 9

設球面上有一圓 C 是平面 H 與球的交集, 則其圓心 C 與球心 O 的連線會與圓面 H 垂直, CO 即圓面 H 過圓心 C 之法線如圖 10 所示。圖中 AB 是該圓的一條直徑, A, B, C, O, N, S 均在同一平面 P 上, AB 線即 $H \cap P$。證明見 (註七)。

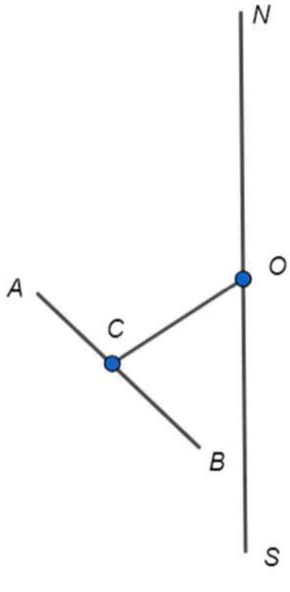


圖 10

現對圖 10中之 P 平面鏡射, 則 ACB 不變法線 CO 也不變, 因此, 圓 C 及圓面 H 均不變,

NOS 亦不變, 所以平面 P 是 N 與圓 C 所張出斜圓錐之鏡射對稱平面, 此一對稱平面 P 正是圖 4 中之 X-Z 平面, 注意到圓面 H 與圖 10 中之平面 P 正交, 而過南極 S 之切平面亦與 P 正交。

回到圖 8 之球極投影, 將圖 10 中的圓 C 投至過南極 S 之切平面, 如圖 11 所示。

球面上圓 C 之直徑被投至切平面上之線段 $A'B'$。再回到第二節結論 (5) 之圖 4, 圖 4 中的 X-Z 平面相當於圖 10 及圖 11 中的 $NOSAB$ 平面 P, 是斜圓錐的對稱面。根據圖 4, 若要證明球極將圓 C 投影成一圓, 且 $A'B'$ 是該圓之直徑, 必須證明 $\triangle NB'A'$ 和 $\triangle NAB$ 相似。

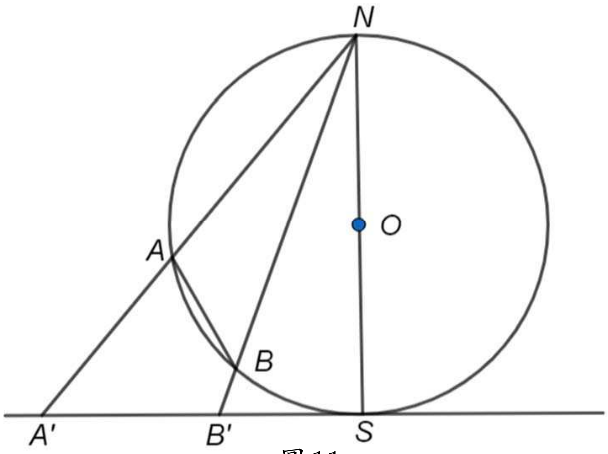


圖 11

圖11中,

$$\angle A' = 90^\circ - \angle A'NS = 90^\circ - 1/2\,弧ABS,$$
$$\angle ABN = \frac{1}{2}\,弧\ AN = 90^\circ - \frac{1}{2}\,弧ABS.$$

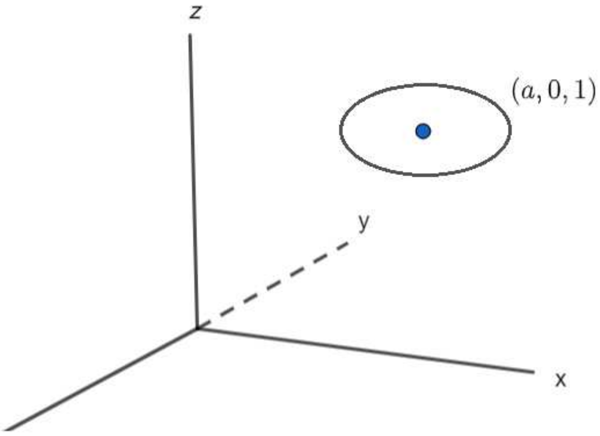
所以 $\angle A' = \angle ABN$, $\triangle NAB$ 和 $\triangle NB'A'$相似。

因此球極投影中的斜圓錐有直徑分別爲 AB 和 $A'B'$ 的兩族圓截痕, 由圖 10 及 11 中的平面 H 和過 S 的切平面截出, 這說明了球極投影的保圓性質。

註一: 此法有助於了解平面截痕的屬性。

註二: 當 $A>0$, $B\neq 0$, $AC-B^2>0$ 時, $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 代表中心在 (0,0) 的橢圓但長 (短) 軸並非 X 或 Y 軸。見現行高中課綱《二次曲線》。

註三: Apollonius (262-190 BC) 早先提出圓錐截線時用的是斜圓錐 (含正圓錐), 見曹亮吉《圓錐曲線簡史》, 科學人, 2009-09-01 或 Apollonius and Conic Sections, quadrivium. Info. David Dennis and Susan Addington.

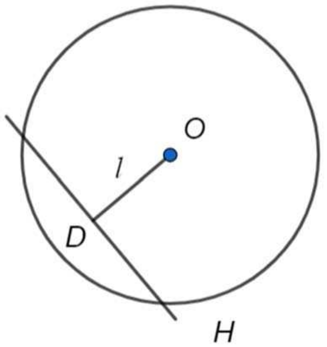


註四: 平面 $z=1$ 上圓心在 $(a,0,1)$, 半徑爲 r 的圓的參數式 $(a+r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$。設原點爲錐的頂點, 對此圓張出一錐, 則錐面上的點可表爲 $(x,y,z)=t(a+r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ 或 $x=t(a+r\cos\theta)$, $y=tr\sin\theta$, $z=t$ 消去 θ, 得 $(\frac{x}{t}-a)^2+(\frac{y}{t})^2=r^2$, 將 t 以 z 代入, 即得第三節中斜圓錐方程式 (1)。

註五: 圖 8、圖 9 均參考 Hibert 和 Cohn-Vossen 合著之 Geometry and the Imagination, 頁 248。該書中投影面用的是過南極的切平面, 其他複變教科書多用赤道面, 但保圓性質同樣成立。

註六: 保圓性質在複變教科書中常見, 例如 Ahlfors 的教科書 Complex Analysis, 頁19。但這些教科書對保圓性質的證明有別於本文所用的斜圓錐和正橢錐的對稱性。

註七: 設圓 C 是平面 H 與球的交集, 今從球心 O 作直徑 l 垂直平面 H, 交 H 於 D 點。現將球繞直徑 l 轉動, 則球與 H 均不變, 球與 H 之交集圓亦不變, 因此 D 會與交集圓之圓心 C 重合, 亦即過圓心 C 圓面 H 之法線通過 O。但又因設 H 不平行赤道面, 故此 H 法線不過 N (並見圖 10)。



—本文作者張海潮爲台大數學系退休教授, 黃寶興爲台大數學系碩士班學生—