數學傳播 46卷3期, pp. 106-108

與三角形高有關的兩個幾何不等式

丁遵標

摘要: 本文給出三角形的高與邊長及內外徑之間的兩個幾何性質。

關鍵字: 三角形、邊長、高線、內徑、外徑。

本文約定: $\triangle ABC$ 的三邊長爲 a、b、c, 半周長爲 p, 面積爲 S, 外徑爲 R, 內徑爲 r, 三邊上的高爲 h_a、h_b、h_c, $\sum$ 表示迴圈和, $\prod$ 表示迴圈積。

在文 [1] 基礎上, 筆者經過研究又得到:

定理1: $6R^2\le\sum\dfrac{a^4}{h_b^2+h_c^2}\le\dfrac{2R^2(2R-r)}{r}$.

證明: $\because S=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c=rp \qquad \therefore\ h_b=\dfrac{2rp}{b},\quad h_c=\dfrac{2rp}{c}$,

$\because abc=4Rrp$

$$\therefore\ \frac{a^4}{h_b^2+h_c^2}=\frac{a^4b^2c^2}{4r^2p^2(b^2+c^2)}=\frac{a^2(abc)^2}{4r^2p^2(b^2+c^2)}=\frac{a^2(4Rrp)^2}{4r^2p^2(b^2+c^2)}=\frac{4a^2R^2}{b^2+c^2}.$$

$$\because\ \sum(b^2+c^2)\sum\frac{1}{b^2+c^2}\ge 9,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum\frac{a^4}{h_b^2+h_c^2}&=4R^2\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}=4R^2\sum\Big(\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}-1\Big)\\&=4R^2\sum\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}-12R^2\\&=2R^2\sum(b^2+c^2)\sum\frac{1}{b^2+c^2}-12R^2\\&\ge 2R^2\times 9-12R^2=6R^2.\end{aligned}$$

$$\because b^2+c^2\ge 2bc,\qquad \sum\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr},$$

$$\sum a^3=2p(p^2-6Rr-3r^2).$$

由 Gerretsen 不等式知: $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \sum \frac{a^4}{h_b^2+h_c^2} &= 4R^2 \sum \frac{a^2}{b^2+c^2} \le 4R^2 \sum \frac{a^2}{2bc} \\
&= 2R^2 \sum \frac{a^3}{abc} = 2R^2 \sum \frac{a^3}{4Rrp} = \frac{R\sum a^3}{2rp} \\
&= \frac{R\cdot 2p(p^2-6Rr-3r^2)}{2rp} = \frac{R(p^2-6Rr-3r^2)}{r} \\
&\le \frac{R(4R^2+4Rr+3r^2-6Rr-3r^2)}{r} = \frac{2R^2(2R-r)}{r},
\end{aligned}$$

$$\text{故}\quad 6R^2 \le \sum \frac{a^4}{h_b^2+h_c^2} \le \frac{2R^2(2R-r)}{r}.$$

定理 2: $\dfrac{6r(2R-r)}{R^2} \le \sum \dfrac{h_b^2+h_c^2}{a^2} \le \dfrac{2(2R^2+r^2)}{R^2}$.

證明:

$$\begin{aligned}
\because\ & \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} = \frac{4r^2p^2(b^2+c^2)}{(abc)^2} = \frac{4r^2p^2(b^2+c^2)}{(4Rrp)^2} = \frac{b^2+c^2}{4R^2}, \\
& \sum a^2 = 2(p^2-4Rr-r^2), \\
\therefore\ & \sum \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} = \frac{\sum(b^2+c^2)}{4R^2} = \frac{\sum a^2}{2R^2} \\
=\ & \frac{2(p^2-4Rr-r^2)}{2R^2} = \frac{p^2-4Rr-r^2}{R^2}.
\end{aligned}$$

由 Gerretsen 不等式知

$$\begin{aligned}
& 16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2, \\
\therefore\ & \frac{6r(2R-r)}{R^2} \le \frac{P^2-4Rr-r^2}{R^2} \le \frac{2(2R^2+r^2)}{R^2}, \\
\text{故}\ & \frac{6r(2R-r)}{R^2} \le \sum \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} \le \frac{2(2R^2+r^2)}{R^2}.
\end{aligned}$$

由 Euler 不等式: $R \ge 2r$,
這樣, 我們便可得到:

推論 1:

$$18\left(\frac{r}{R}\right)^2 \le \sum \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} \le \frac{9}{2}.$$

由於

$$\prod \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} \le \left[\frac{\sum \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2}}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}\Big(\sum \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2}\Big)^3 \le \frac{8(2R^2+r^2)^3}{27R^6},$$

$$\prod \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2} \cdot \prod \frac{h_b^2+h_c^2}{a^2} = 1,$$

這樣, 我們便可得到:

推論2:

$$\prod \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2} \ge \frac{27R^6}{8(2R^2+r^2)^3}.$$

再由 Euler 不等式 $R \ge 2r$, 我們又得到:

推論3:

$$\prod \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2} \ge \frac{8}{27}.$$

參考文獻

1. 丁遵標。與三角形高有關的幾何性質。數學傳播季刊, 29(2), 55-60, 2005。
2. O. Bottema 等著, 單墫譯。幾何不等式。北京大學出版社, 1991年。

—本文作者任教中國安徽省舒城二中杭埠校區—