數學傳播 46卷3期, pp. 101-105

從 Galileo 問題到 Bernoulli 雙紐線的推廣

陳　都

摘要: 通過研讀古老的 Galileo 問題, 得到了一個有趣的軌跡問題, 由此發現了一族優美對稱的四次曲線, 它是著名的 Bernoulli 雙紐線的一個有別於 Cassini 卵形線的推廣, 進而探究了這族曲線的幾何性質。

關鍵詞: Galileo 問題, Bernoulli 雙紐線的推廣, 四次曲線。

1638年, 偉大科學家 Galileo (1564~1642), 在其名著《關於兩種新科學的對話》中, 提出了如下問題:

> 在豎直的牆上畫一個圓, 從圓的最高點同時釋放三個小球, 一個自由落下, 另外兩個沿傾角不等的光滑斜槽無初速滑下, 不計空氣阻力, 問哪個小球最先到達槽的下端?

筆者在研讀這一名題時, 得到下述有趣的軌跡問題:

設質點沿圓 (半徑爲 R) 的任一光滑弦從上端自由滑向下端, 所需時間爲 t, 求 t 相等的所有弦中點的軌跡。

如圖1, 以圓心 O 爲極點, 水平向右徑線爲極軸, 建立極坐標系, 過極點 O 作弦 MN 的垂線, 垂足 P 即爲該弦中點, 設 $P(\rho,\theta)$, 則質點沿弦向下的加速度爲 $g\cos\theta$ (g 爲重力加速度), 由初速爲零的等加速度直線運動規律知弦長爲 $\dfrac{1}{2}gt^2\cos\theta$, 根據勾股定理, 可得動弦 MN 中點 P 的軌跡方程爲

$$\rho=\sqrt{R^2-\frac{1}{16}g^2t^4\cos^2\theta},$$

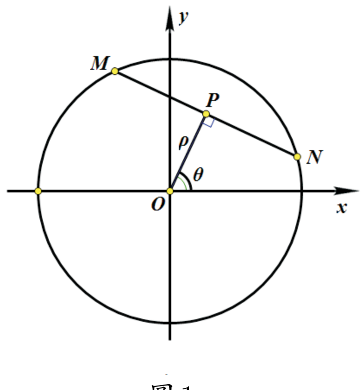

圖1

記 $eR=\dfrac{1}{4}gt^2$ (e 爲關聯 t 的參數, $e\geq 0$), 有

$$\rho=R\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}, \tag{1}$$

由 $1-e^2\cos^2\theta\le 0$, 得 $|\cos\theta|\le 1/e$. 當 $1/e>1$, 即 $e\in[0,1)$ 時, 曲線封閉; 當 $1/e\le 1$, 即 $e\ge 1$ 時, $\cos\theta\in[-1/e,1/e]$, 此時, 曲線因自交而封閉。

方程 (1) 相應的直角坐標方程爲

$$(x^2+y^2)^2-R^2(x^2+y^2)+e^2R^2x^2=0. \tag{2}$$

由古老的 Galileo 問題引出的軌跡方程 (1)、(2) 表示的曲線是一族全新的四次曲線(當 $e\in[0,1)$ 時, 含奇點 $(0,0)$), 其圖形如圖 2 所示。

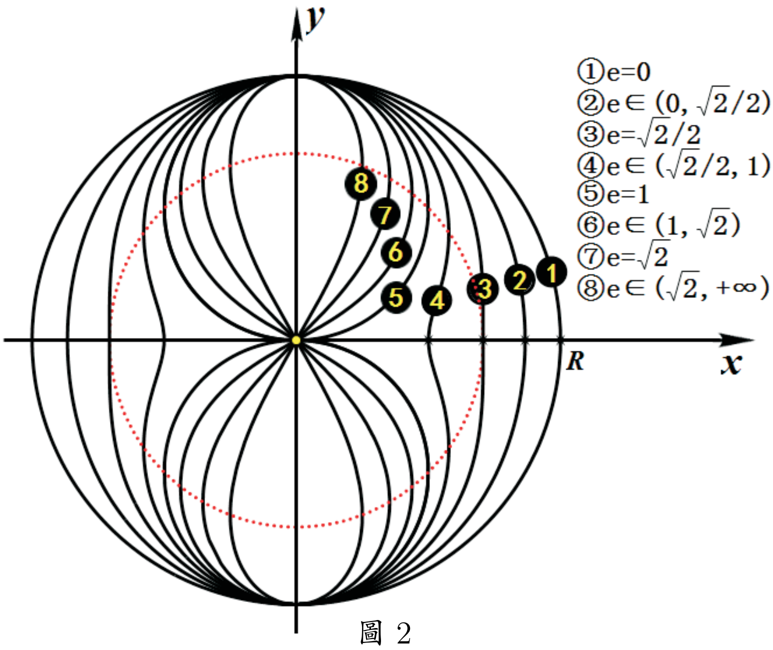

圖 2

這族對稱而優美的四次曲線包含了著名的 Bernoulli 雙紐線 ($e=\sqrt{2}$ 時), 它是 Bernoulli 雙紐線的一個有別於 Cassini 卵形線 (文 [1]−[5]) 的推廣。下面, 我們來探究這族曲線的幾何性質。

1、範圍

由於曲線是定圓的動弦之中點軌跡, 它不可能位於圓外, 因此, 該曲線局限在半徑爲 R 的圓內或圓上。

2、頂點

在方程 (2) 中, 令 $y=0$, 得 $x=\pm R\sqrt{1-e^2}$ $(e\le 1)$, 令 $x=0$, 得 $y=\pm R$, 因此,

曲線在 x 軸上的頂點的直角坐標是 $(\pm R\sqrt{1-e^2}, 0)$ $(e \leq 1)$, 在 y 軸上的頂點的直角坐標是 $(0, \pm R)$.

3、對稱性

分別以 $(-x, y)$、$(x, -y)$、$(-x, -y)$ 代替 (x, y), 方程 (2) 不變, 所以, 曲線關於 y 軸、x 軸和原點都對稱。

4、極値點

曲線關於極角 θ 的參數方程爲

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = R\cos\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta} \\ y = \rho\sin\theta = R\sin\theta\sqrt{1-e^2\cos^2\theta} \end{cases},$$

x、y 分別對 θ 求導數, 得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} =& R\sin\theta(2e^2\cos^2\theta - 1)/\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}, \\ \frac{dy}{d\theta} =& R\cos\theta(1-e^2\cos 2\theta)/\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}, \end{aligned}$$

於是, $\dfrac{dy}{dx} = (1-e^2\cos 2\theta)/(2e^2\cos^2\theta - 1)\tan\theta$.

令 $\tan\theta = 0$, 則 $\theta = 0$、π, 若 $e \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 當 $\theta = 0$、π, $|x|$ 取得極大值 $R\sqrt{1-e^2}$, 若 $e \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 當 $\theta = 0$, π, $|x|$ 取得極小值 $R\sqrt{1-e^2}$; 令 $2e^2\cos^2\theta - 1 = 0$, 則 $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2e}$, 若 $e \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 當 $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2e}$, $|x|$ 取得極大值 $\dfrac{R}{2e}$, 這時, $|y| = \dfrac{R}{2e}\sqrt{2e^2-1}$.

顯然, 該極大值點的坐標 (x, y) 滿足:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4e^2} + \frac{R}{4e^2}(2e^2 - 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2,$$

即這些使 $|x|$ 取得極大值的點的軌跡是以原點爲圓心、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ 爲半徑的圓。

5、曲線圍成的面積

由圖 2 知, 若 $e = 0$, 曲線退化爲基圓 $O(R)$ (含奇點 $O(0,0)$), 其面積 $S = \pi R^2$; 若 $e = 1$, 曲線退化爲上、下相切且與基圓 $O(R)$ 內切的等圓, 它們的面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi R^2$. 下面, 我們分兩種情形依次求出曲線圍成的面積。

(1) 當 $e\in(0,1)$, 則

$$\begin{aligned}
S=&\iint_D rdrd\theta\\
=&4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}rdr\\
=&4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{R\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\Big)d\theta\\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2(1-e^2\cos^2\theta)d\theta\\
=&2R^2\Big[\theta-e^2\Big(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big)\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
=&2R^2\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}e^2\Big)\\
=&\frac{\pi}{2}(2-e^2)R^2;
\end{aligned}$$

(2) 當 $e\in(1,+\infty)$, 則曲線過極點且通過一、三象限的切線為 $\theta_0=\arccos\dfrac{1}{e}$, 於是,

$$\begin{aligned}
S=&\iint_D rdrd\theta\\
=&4\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}rdr\\
=&4\int_{\arccos\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{R\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}\Big)d\theta\\
=&2\int_{\arccos\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{2}}R^2(1-e^2\cos^2\theta)d\theta\\
=&2R^2\Big[\theta-e^2\Big(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big)\Big]\Big|_{\arccos\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{2}}\\
=&2R^2\Big\{\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}e^2\Big)-\Big[\arccos\frac{1}{e}-e^2\Big(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{e}+\frac{1}{4}\sin 2\arccos\frac{1}{e}\Big)\Big]\Big\}\\
=&2R^2\Big[\frac{\pi}{4}(2-e^2)-(2-e^2)\cdot\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{e}+\frac{1}{4}e^2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\cdot\frac{1}{e}\Big]\\
=&\Big[(2-e^2)\Big(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{e}\Big)+\sqrt{e^2-1}\Big]R^2.
\end{aligned}$$

綜上可得, 曲線圍成的面積

$$S=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(2-e^2)R^2, & \text{當 } e\in[0,1],\\[2mm] \Big[(2-e^2)\Big(\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{e}\Big)+\sqrt{e^2-1}\Big]R^2, & \text{當 } e\in(1,+\infty).\end{cases}$$

6、曲線反演

以曲線的對稱中心 (極點) O 爲反演中心, 基圓半徑 R爲反演半徑, 得到該曲線的反演曲線的極坐標方程

$$\rho=\frac{R}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}, \tag{3}$$

化爲直角坐標方程爲

$$(1-e^2)x^2+y^2=R^2. \tag{4}$$

顯然, 方程 (3)、(4) 表示的曲線是二次曲線。

(1) 當 $e=0$ 時, 表示圓: $x^2+y^2=R^2$;

(2) 當 $e\in(0,1)$ 時, 表示焦點在 x 軸上、長半軸長爲 $R/\sqrt{1-e^2}$、短半軸長爲 R 的橢圓:

$$\frac{x^2}{\left(R/\sqrt{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{R^2}=1;$$

(3) 當 $e=1$ 時, 表示退化拋物線 — 兩條平行於 x 軸的直線: $y=\pm R$;

(4) 當 $e\in(1,+\infty)$ 時, 表示焦點在 y 軸上、實半軸長爲 R、虛半軸長爲 $R/\sqrt{e^2-1}$ 的雙曲線: $-\dfrac{x^2}{\left(R/\sqrt{e^2-1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$, 特別的, 若 $e=\sqrt{2}$, 則表示等軸雙曲線: $-x^2+y^2=R^2$.

通過幾何畫板演示, 可以看到, 隨著參數 e 的變化, 這族廣義 Bernoulli 四次曲線的形狀亦隨之發生一系列精細微妙的變化: 當 $e=0$ 時, 其圖形爲圓 (半徑爲 R) 與奇點 $O(0,0)$, 當 $e\in(0,\sqrt{2}/2]$, 其圖形爲類似橢圓的凸曲線和奇點 $O(0,0)$, 當 $e>\sqrt{2}/2$, 圖形開始沿水平徑向凹陷, 奇點 $O(0,0)$ 仍在, $e=1$ 時, 退化爲上、下相切的兩個等圓(半徑爲 $R/2$), 當 e 繼續增大, 其圖形就變爲準 Bernoulli 雙紐線了, 若 $e=\sqrt{2}$, 即爲著名的 Bernoulli 雙紐線, 隨著 e 的增大, 準 Bernoulli 雙紐線越變越“瘦”, 逐漸逼近圓的縱向直徑。

經多方檢索, 筆者沒有在文獻中找到這族四次曲線, 由此看來, 它可能是一族新發現的曲線, 亦可認爲是 Bernoulli 雙紐線的一個有別於 Cassini 卵形線的推廣。

參考文獻

1. 王貴。多卵線與多紐線 — 卡西尼卵形線與伯努利雙紐線的推廣[J]。昆明師範高等專科學校學報, 2001, 23。
2. 桂韜。探討一種新曲線[J]。數學通訊, 2003, 1。
3. 李仲來、宋煜。橢圓 — 卡西尼卵形線[J]。數學的實踐與認識, 2003, 2。
4. 孫浩盛。利用 GeoGebra 探索一種新曲線 [J]。數學通訊, 2012, 10。
5. 馬進才。從一道“卡西尼卵形線”高考題看“數學文化”[J]。數學通訊, 2017, 17。

—本文作者任教中國湖南省祁東縣文武學校普高部—