從一道三角函數不等式的證明談起

連威翔

一、前言

在國立中山大學應數系的雙週一題活動中, 92學年度第一學期的大專組第三題是要我們證明一道不等式, 問題如下:

問題 1: 試證對所有 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 恆有

$$\theta < \frac{\sin\theta + \tan\theta}{2}. \tag{1}$$

問題的公告解答請參考 [1]。注意此處的問題編號爲筆者所加, 底下各問題亦同。

請讀者先參考下圖, 其中扇形 OBG 的圓心角爲90度, BG 弧上有異於 B, G 的點 A, 且過 B 的圓弧切線與直線 OA 交於 C 點:

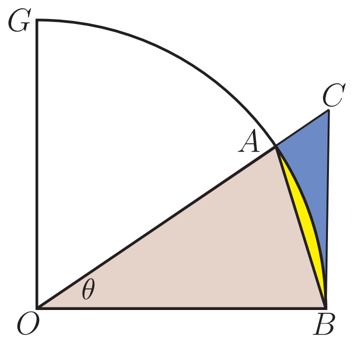

圖1

利用上圖中 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ 與扇形 OAB 的面積關係, 可證明當 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$時, 有

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta. \tag{2}$$

而 (1) 式則告訴我們 (2) 式左右兩項的算術平均數大於其中間項。

在 [1] 中, 主辦單位對問題 1 公布了兩種解法, 第一種解法用的是證明函數恆正時常用的微積分技巧, 第二種解法則是使用三角函數的半角公式, 以及不等式 (2) 右半邊的結果 $\tan\theta > \theta$。

在底下, 筆者將使用與 [1] 中解法不同的另兩種解法重新解問題 1, 這部分的內容將在第二節中加以介紹。接著的第三節中, 筆者將介紹另兩道與三角函數有關的不等式, 並提出自己對兩不等式的另證, 證明中將會與 [1] 中的第一種解法一樣, 使用微積分的技巧來進行推導。

二、問題 1 的另解

對於上面介紹的問題 1, 底下筆者給出兩個另解。第一個另解, 是一個由圖形出發的解法, 內容如下:

解法1: 將圖 1 中落在扇形 OBG 外部的圖形及其標示文字抹去, 再另作輔助線如下圖:

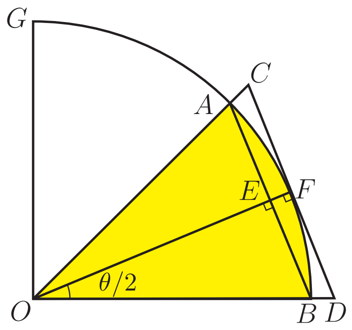

圖 2

上圖中的扇形令其半徑爲 1, 其中 $\angle AOB=\theta$, $\overline{OE}$ 爲 $\triangle AOB$ 的高, 因此 $\angle BOE=\dfrac{\theta}{2}$。此外, $\overline{OE}$ 的延長線與圓弧相交於 F, 過 F 的圓弧切線分別與 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 的延長線交於 C, D, 則 $\overline{OF}$ 爲 $\triangle COD$ 的高。不難證明 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 相似, 因此兩三角形之面積比爲對應邊的高 $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ 之長度平方比, 即 $\triangle AOB:\triangle COD=\overline{OE}^2:\overline{OF}^2$, 從而有

$$\frac{\sin\theta}{2}:\triangle COD=\cos^2\frac{\theta}{2}:1.$$

利用上式我們可列出 $\triangle COD$ 面積, 並可將其表達式改寫如下:

$$\triangle COD=\frac{\sin\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\sin\theta\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+1}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1},$$

又由圖 2 可知扇形 AOB 面積 $\dfrac{\theta}{2}$ 小於 $\triangle COD$ 面積, 因此有

$$\theta=2\cdot\frac{\theta}{2}<2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}. \tag{3}$$

此時考慮底下的不等式:

$$\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}<\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}, \tag{4}$$

如果能證明 (4) 式成立, 再配合 (3) 式就可證明不等式 (1)。與 (4) 式等價的不等式是

$$(\sin\theta+\tan\theta)(1+\cos\theta)>4\sin\theta, \tag{5}$$

要證明 (5) 式, 可考慮底下兩算式相乘的結果:

$$(\sin\theta+\tan\theta)(1+\cos\theta)=2\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\tan\theta. \tag{6}$$

利用算幾不等式, 我們有

$$\sin\theta\cos\theta+\tan\theta\geq 2\sqrt{\sin\theta\cos\theta\cdot\tan\theta}=2\sin\theta, \tag{7}$$

在 (7) 式中, 因爲 $0<\cos\theta<1$, 可知

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>\sin\theta>\sin\theta\cos\theta,$$

因 $\sin\theta\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 不相等, 所以 (7) 式的等號不成立, 即

$$\sin\theta\cos\theta+\tan\theta>2\sin\theta.$$

以上式搭配 (6) 式可知 (5) 式成立(註1), 因此 (4) 式成立。此時由 (3), (4) 兩式可知

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}>\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}>\theta,$$

因此 (1) 式成立, 問題 1 解題完畢。

除了上述解法之外, 還有底下這個較簡潔的解法:

解法2: 因解法 1 中已經證明 (4) 式成立, 利用 (4) 式與半角公式並配合 (2) 式可知

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}>\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\tan\frac{\theta}{2}>2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta, \tag{8}$$

至此再次證明 (1) 式成立, 解題完畢 (註2)。注意此解法與 [1] 中的第二種解法一樣, 都使用了半角公式與 (2) 式右半的 $\tan\theta>\theta$ 這個不等式。

其實, 上述兩種解法的關鍵都是 (4) 式, 只是前者是配合由圖形所得的 (3) 式來處理, 後者則直接透過 (8) 式來解決。而第二種解法之所以比較簡潔, 原因之一是因爲所用上的 (4) 式在第一種解法中已經證明過。

回顧 [1] 中公布的第一個解法, 解題者使用了微積分的技巧解題, 在下一節的內容中, 筆者將分享另兩個使用微積分技巧證明不等式的例子。

三、看看另外兩道不等式

第一道不等式:

106 學年度第二學期雙週一題徵答活動的第八題, 也是要我們證明一道不等式, 問題如下:

問題2: 若 A, B 和 C 爲 $\triangle ABC$ 的三個內角角度 (弧度), 試證

$$A\cos B+\sin A\cos C>0. \tag{9}$$

活動主辦單位公布的解答請參考 [2]。

如果要說問題 2 與問題 1 有什麼比較大的不同, 應該是 (9) 式中的變數較多, 且附加一個須由解題者自行列出的限制條件 $A+B+C=\pi$。首先, 當 B 爲直角時, 因 $\cos B=0$ 且 C 爲銳角, 可透過下式證明 (9) 式成立:

$$A\cos B+\sin A\cos C=\sin A\cos C>0.$$

接下來, 筆者將分別處理 B 爲銳角與 B 爲鈍角的兩種情形 (註3)。

其中, 在 B 爲鈍角的情形, 筆者處理時使用了微積分的技巧, 證明過程如下:

證明: B 爲鈍角時, 因 $\dfrac{\pi}{2}<B<\pi$, 可知 $\pi<2\pi-B<\dfrac{3\pi}{2}$。此時考慮 $2A+B$ 這個角, 先寫下

$$0<A=\pi-B-C<\pi-B.$$

因此有不等式 $0<2A<2\pi-2B$, 接著對此不等式中的三項同加 B, 即可寫下

$$\frac{\pi}{2}<B<2A+B<2\pi-B<\frac{3\pi}{2}. \tag{10}$$

因爲 $\cos x$ 在 $[B,\pi]$ 上嚴格遞減, 且在 $[\pi, 2\pi-B]$ 上嚴格遞增, 討論如下:

(a) 當 $B<2A+B\le\pi$ 時, 可知

$$\cos(2A+B)<\cos B;$$

(b) 當 $\pi\le 2A+B<2\pi-B$ 時, 可知

$$\cos(2A+B)<\cos(2\pi-B)=\cos B.$$

上述 (a), (b) 兩情形均可得不等式

$$\cos(2A+B)<\cos B. \tag{11}$$

在後面, 我們將會用上 (11) 式這個結果。

其實, (11) 式也可利用依 (10) 式中五個角度之大小關係所畫出的下圖來看出, 圖中的圓爲單位圓, 其中 $2A+B$ 與 $2\pi-B$ 這兩個廣義角的文字標示落在其終邊的末端:

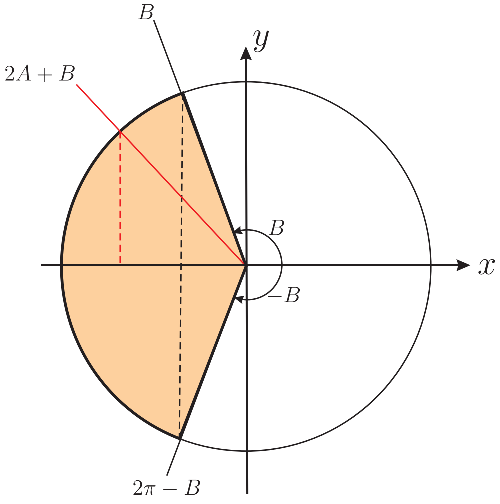

圖 3

注意著色的區域是角度 $2A+B$ 的終邊在單位圓內所可能劃過的範圍, 而兩道虛線與 x 軸交點處的 x 座標值就是 $\cos(2A+B)$ 與 $\cos B$ 兩餘弦值, 不難看出 $\cos(2A+B)<\cos B$, 這樣就再度說明了 (11) 式成立。

確定 (11) 式成立後, 對於任一滿足 $\dfrac{\pi}{2}<B<\pi$ 的角 B, 先將其值固定並視爲常數, 則此時 (9) 式不等號左方的表達式可視爲 A 的函數, 令此函數爲 $f(A)$, 則有

$$\begin{aligned} f(A) &= A\cos B+\sin A\cos C = A\cos B+\sin A\cos(\pi-A-B)\\ &= A\cos B-\sin A\cos(A+B). \end{aligned} \tag{12}$$

回顧在 (10) 式上方所提到的角度範圍 $0<A<\pi-B$, 將 A 視爲變數, 由上式與 (11) 式可知

$$\begin{aligned} f'(A) &= \cos B-\cos A\cos(A+B)+\sin A\sin(A+B) = \cos B-\cos(A+A+B)\\ &= \cos B-\cos(2A+B)>0, \end{aligned} \tag{13}$$

因此導函數 $f'(A)$ 恆正。又 $f(0)=0$, 對任一可能的角度 A, 由 (12), (13) 兩式可得

$$A\cos B+\sin A\cos C = f(A) = f(A)-f(0) = \int_0^A f'(t)dt>0,$$

這樣就證明了 (9) 式。此外要證明上式中的 $f(A)>0$, 也可先利用均值定理知存在 ξ 滿足

$$\frac{f(A)-f(0)}{A-0} = f'(\xi),$$

其中 $0<\xi<A$。由 (13) 式知 $f'(\xi)>0$, 故上式化簡後可得 $f(A)=f'(\xi)\cdot A>0$。

以上是對 B 爲鈍角的情形所寫下的證明。當 B 爲銳角時, [2] 中的解答先證明

$$\cos B+\cos C>0, \tag{14}$$

然後以 $A>\sin A$ 的性質配合上式, 寫下

$$A\cos B+\sin A\cos C>\sin A(\cos B+\cos C)>0$$

而完成證明。此部分筆者的證法基本上與 [2] 中的解答相同, 不過在證明 (14) 式的方法上有所不同。底下, 筆者分享對 (14) 式的另兩種證明:

證明1: 我們知道

$$0<B+C<A+B+C=\pi$$

以及

$$-\pi<-C<B-C<B<\pi,$$

因此可知

$$0<\frac{B+C}{2}<\frac{\pi}{2},\qquad -\frac{\pi}{2}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

接著利用餘弦的和差角公式, 即可求得

$$\begin{aligned}\cos B+\cos C&=\cos\Big(\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}\Big)+\cos\Big(\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}\Big)\\&=2\cos\Big(\frac{B+C}{2}\Big)\cos\Big(\frac{B-C}{2}\Big)>0.\end{aligned}$$

證明2: 設 A,B,C 的對邊長分別爲 a,b,c, 利用餘弦定理即可推得

$$\begin{aligned}\cos B+\cos C&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{1}{2abc}(a^2b+c^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3)\\&=\frac{b+c}{2abc}(a^2+bc-b^2+bc-c^2)=\frac{b+c}{2abc}[a^2-(b-c)^2]\\&=\frac{b+c}{2abc}(a+b-c)(a-b+c)>0.\end{aligned}$$

注意上式最後用上了三角形任兩邊長之和大於第三邊長的性質。

以上就是筆者對不等式 (9) 的證明所想要分享的一些想法, 相較之下, [2] 中完全使用三角函數性質的證明應該是比較高明的, 因爲證明過程比較簡潔。

第二道不等式:

看完上面對問題 2 所寫下的證明後, 接著我們看底下這道問題:

問題3: Prove that
$$\pi < \frac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leq 4, \tag{15}$$
where $0 < x < 1$.

問題 3 是出自國立高雄大學應用數學系的有獎徵答活動 (現已停辦), 問題的出處與解答請參考 [3] 的網頁 (請用滑鼠點選題號打開檔案), 出題者爲該系的林英杰教授。看看問題 3, 它與問題 1 及問題 2 的共同點, 就是題目都很簡潔, 且都是要證明與三角函數有關的不等式。

在 [3] 中對問題 3 所公布的解答, 使用了不少微積分的技巧, 值得大家學習與參考。不過筆者自行研究之後, 發現 (15) 式有另外的證法, 底下將予以介紹。

在開始介紹證明之前, 筆者要先說明接下來我們將仿照 [3] 中的證明手法, 分別對 (15) 式左半邊與右半邊的不等式給出證明。

首先, 我們看 (15) 式左半邊的不等式 $\pi < \dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)}$。注意在 [3] 的解答中, 一開始即說明因爲 $\dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)}$ 對於直線 $x = \dfrac{1}{2}$ 對稱, 所以只需針對 $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ 的範圍證明不等式 (15) 即可。因此, 底下筆者也將同樣只針對 $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ 這個範圍證明 (15) 式左半邊的不等式, 證明如下:

證明: 我們在大一微積分課程中都曾學過泰勒定理(可參考 [4] 文的介紹), 底下我們將透過它來進行證明。令函數 $f(x) = \sin \pi x$, 爲了使用泰勒定理, 我們先列出

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \pi x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \pi \cos \pi x, & f'(0) &= \pi, \\ f''(x) &= -\pi^2 \sin \pi x, & f''(0) &= 0, \\ f^{(3)}(x) &= -\pi^3 \cos \pi x, & f^{(3)}(0) &= -\pi^3. \end{aligned}$$

利用泰勒定理, 將 $f(x) = \sin \pi x$ 在 $x = 0$ 處展開, 則存在滿足 $0 < \xi < x$ 的數 ξ 使得
$$\sin \pi x = \pi x - \frac{\pi^3}{3!}\xi^3. \tag{16}$$

如同證明開始之前所說, 此時將上式中 x 的範圍設定爲 $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, 則有 $0 < \xi < x \leq \dfrac{1}{2}$。利用 (16) 式, 我們可先寫下

$$\frac{\sin \pi x}{x(1-x)} = \pi \cdot \frac{x - \frac{\pi^2}{6}\xi^3}{x(1-x)} = \pi \cdot \frac{1 - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\xi}{x} \cdot \xi^2}{1-x},$$

因爲 $\dfrac{\pi^2}{6} < 2$ 且 $\dfrac{\xi}{x} < 1$, 可由上式繼續推得

$$\frac{\sin \pi x}{x(1-x)} > \pi \cdot \frac{1-2\xi^2}{1-x}.$$

因爲 $\xi^2 < x^2$, 配合 $x > 0$ 及 $1-x > 1-2x \geq 0$ 的條件, 由上式可知

$$\frac{\sin \pi x}{x(1-x)} > \pi \cdot \frac{1-2x^2}{1-x} = \pi \cdot \Big(1 + \frac{x(1-2x)}{1-x}\Big) \geq \pi,$$

這樣就證明了 (15) 式左半邊的不等式。

至於 (15) 式右半邊的不等式, 筆者也嘗試過使用泰勒定理來證明, 但可惜未能成功。雖然如此, 筆者卻發現一個不錯的證法, 且關鍵就在於 [3] 的解答中證明 (15) 式左半邊不等式時所用上的一個性質。底下我們列出該性質, 並且證明之:

性質1: 已知函數 $g(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續且在開區間 (a,b) 上二次可微, 若 $g(a) = g(b) = 0$ 且在區間 (a,b) 上滿足 $g''(x) < 0$ 的條件, 則在 (a,b) 上恆有 $g(x) > 0$。

證明: 底下將使用反證法, 分成兩部分說明:

(a) 若存在 $\xi \in (a,b)$ 滿足 $g(\xi) = 0$, 使用 Rolle 定理 (可參考 [4] 的介紹), 可知存在 η_1, η_2 滿足 $a < \eta_1 < \xi < \eta_2 < b$, 且

$$g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = 0.$$

利用上式的條件, 再次使用 Rolle 定理, 可知存在 η_3 滿足 $\eta_1 < \eta_3 < \eta_2$, 且

$$g''(\eta_3) = 0.$$

但此與 $g''(\eta_3) < 0$ 的條件矛盾, 因此不存在 $\xi \in (a,b)$ 滿足 $g(\xi) = 0$。

(b) 若存在 $\xi \in (a,b)$ 滿足 $g(\xi) < 0$, 使用均值定理 (也可參考 [4] 的介紹), 可知存在 η_1, η_2 滿足 $a < \eta_1 < \xi < \eta_2 < b$, 且

$$g'(\eta_1) = \frac{g(\xi) - g(a)}{\xi - a} < 0,$$
$$g'(\eta_2) = \frac{g(b) - g(\xi)}{b - \xi} > 0.$$

再次使用均值定理, 可知存在 η_3 滿足 $\eta_1 < \eta_3 < \eta_2$, 且

$$g''(\eta_3) = \frac{g'(\eta_2) - g'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} > 0.$$

但此與 $g''(\eta_3) < 0$ 的條件矛盾, 因此不存在 $\xi \in (a,b)$ 滿足 $g(\xi) < 0$。

綜合以上 (a), (b) 兩部分的說明, 可知不存在 $\xi \in (a,b)$ 滿足 $g(\xi) \leq 0$, 因此在 (a,b) 上恆有 $g(x) > 0$, 性質 1 得證。

有了性質 1, 我們即可開始證明 (15) 式右半邊的不等式 $\dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leq 4$ (底下簡稱 (15) 式右半), 證明如下:

證明: 令 $x = y + \dfrac{1}{2}$, 則 $\sin \pi x = \cos \pi y$ 且 $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - y^2$, 此時 (15) 式右半可先改寫爲 $\dfrac{\cos \pi y}{\frac{1}{4} - y^2} \leq 4$, 再改寫爲等價的

$$\cos \pi y \leq 1 - 4y^2. \tag{17}$$

注意 (15) 式所討論的 x 值範圍是 $0 < x < 1$, 此範圍對應到的 y 值範圍是 $-\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{1}{2}$, 因此 $\dfrac{1}{4} - y^2 > 0$。利用半角公式將 (17) 式改寫爲 $1 - 2\sin^2 \dfrac{\pi y}{2} \leq 1 - 4y^2$, 整理後即得與 (15) 式右半等價的下式:

$$\sin^2 \frac{\pi y}{2} \geq 2y^2. \tag{18}$$

令 $z = \dfrac{\pi y}{2}$, 則 $y = \dfrac{2z}{\pi}$ 且 $-\dfrac{\pi}{4} < z < \dfrac{\pi}{4}$, 而 (18) 式可改寫爲與其等價的 $\sin^2 z \geq \dfrac{8}{\pi^2} z^2$ 或

$$|\sin z| \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} |z|.$$

令 $f(z) = |\sin z| - \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}|z|$, 由以上一系列等價關係, 可知只要證明

$$f(z) = |\sin z| - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}|z| \geq 0, \tag{19}$$

即完成 (15) 式右半不等式的證明。因爲 $f(-z) = f(z)$, 表示 $f(z)$ 爲偶函數, 因此只要針對

$$0 \leq z < \frac{\pi}{4} \tag{20}$$

的範圍證明 (19) 式即可。在 (20) 式的範圍內, (19) 式可簡化爲

$$f(z) = \sin z - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} z \geq 0. \tag{21}$$

因 $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, 且在 $0 < z < \dfrac{\pi}{4}$ 的範圍內有 $f''(z) = -\sin z < 0$, 由性質 1 可知在相同範圍內有 $f(z) > 0$, 因此在 (20) 式的範圍內 (多了 $z = 0$) 有 $f(z) \geq 0$, 這樣我們就證明了 (21) 與 (19) 兩式。由 (19) 式出發利用其上方的等價關係回推, 即可得知 (15) 式右半的不等式成立, 證畢。

綜合以上對 (15) 式左半與右半兩不等式的證明, 我們就完成了對 (15) 式的另證。

四、結語

在本文中, 筆者先從問題 1 出發, 給出兩個新的證明, 過程中沒有涉及微積分。但是, 因爲發現問題 1 在 [1] 中的第一個證法用上了微積分技巧, 促使筆者想接著介紹問題 2 與問題 3, 並以微積分的手法給出問題中兩不等式的另證。然而, 問題 2 在 [2] 中的證明並未用上微積分技巧, 而問題 3 在 [3] 中的證明則是多所使用。由此可見, 三角函數不等式的證明方法可謂不一而足、變化豐富。

寫作過程中, 最驚喜的莫過於寫出 (15) 式右半邊不等式的另證。當發現對 (17) 式使用泰勒定理證明的嘗試失敗後, 原本以爲寫出證明的希望不大, 但是在某次起床後的靈光一閃, 證明便在 (以半角公式) 將 (17) 式改寫爲 (18) 式之後看到了契機, 且赫然發現在 [3] 的解答中曾出現的性質 1 還可派上用場。最後無論如何, 希望透過本文的介紹, 可以帶給對三角函數不等式有興趣的讀者一點閱讀上的樂趣。

致謝: 感謝雙週一題的主辦單位提供 [1] 與 [2] 這兩道有趣問題, 也感謝 [3] 中問題的出題者林英杰教授與 [4] 文的作者蔡聰明教授。

註1: 也可透過柯西不等式來證明 (5) 式。首先, 我們有

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\tan\theta)(1+\cos\theta) &= \sin\theta\cdot[1^2+(\sqrt{\sec\theta})^2][1^2+(\sqrt{\cos\theta})^2]\\ &\ge \sin\theta\cdot(1+1)^2 = 4\sin\theta.\end{aligned}$$

又因爲 $1:\sqrt{\sec\theta}\neq 1:\sqrt{\cos\theta}$, 可知上述不等式的等號不成立, 因此 (5) 式得證。

註2: 也可利用圖2及其底下 $\triangle COD$ 面積的表達式, 得 (8) 式的另證如下:

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2} > \frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta} = 2\triangle COD = \overline{OF}\times\overline{CD} = 2\overline{FD} = 2\tan\frac{\theta}{2} > 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta.$$

註3: 在 [2] 的解法中, 表面上看似忘了討論「B 爲直角」的情形, 但實際上該解法是分成「B 爲銳角」和「B 爲直角或鈍角」的兩種情形來處理, 讀者不妨細究其過程。

參考資料

1. 國立中山大學應數系的雙週一題活動, 92 學年度第一學期大專組第三題
   `http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2003f/ans2_3.jpg`
2. 國立中山大學應數系的雙週一題活動, 106 學年度第二學期第八題
   `http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/2018s/8ans.pdf`
3. 國立高雄大學應用數學系有獎徵答, 10310 第 01 題
   `http://math.nuk.edu.tw/p/404-1018-2228.php?Lang=zh-tw`
4. 蔡聰明。平均值定理 Mean Value Theorem, 數學知識網站
   `http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_mvt/index.html`

—本文作者投稿時任職四方牧場—