數學傳播 46卷3期, pp. 64-68

由四個代數式選取兩個可形成六個恒等式

李維昌

研究目的: 四個代數式分別爲

$$A = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-b)(c-b)},$$

$$B = \frac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a} - \dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b},$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}},$$

$$D = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

由這四個代數式選取兩個可形成六個恒等式 $A=B$, $A=C$, $A=D$, $B=C$, $B=D$, $C=D$。本文試圖去證明上述六個恒等式, 以下是證明的過程。

研究過程: 考慮二次多項式 $y=f(x)$, x_1, x_2, x_3 相異實數, 滿足 $(x_1, y_1)=(a, a^4)$, $(x_2, y_2)=(b, b^4)$, $(x_3, y_3)=(c, c^4)$,

一、利用拉格朗日插值法求 $y=f(x)$ 的領導係數 A:

1. $f(x) = a^4 \cdot \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^4 \cdot \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^4 \cdot \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

2. 領導係數 $A = \dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.

二、利用牛頓插值法求 $y=f(x)$ 的領導係數 B: (可參考文獻 1)

1. $f(x)=\dfrac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a}-\dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b}\cdot(x-b)(x-a)+\dfrac{b^4-a^4}{b-a}\cdot(x-a)+a^4.$

2. 領導係數 $B=\dfrac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a}-\dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b}.$

三、利用克拉瑪公式求 $y=f(x)=r+qx+px^2$ 的領導係數 $p=C$:

1. $\begin{cases} r+q\cdot a+p\cdot a^2=a^4 \\ r+q\cdot b+p\cdot b^2=b^4 \\ r+q\cdot c+p\cdot c^2=c^4 \end{cases}.$

2. 領導係數 $p=C=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}.$

四、證明 $A=B$, $A=C$, $B=C$ 三個恒等式: 二次多項式 $y=f(x)$ 的領導係數是唯一的, 可得 $A=B=C$, 因此

1. $A=B$ 即 $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a}-\dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b}.$

2. $A=C$ 即 $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}.$

3. $B=C$ 即 $\dfrac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a}-\dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}.$

五、證明：$B=D$

$$B=\frac{\dfrac{c^4-a^4}{c-a}-\dfrac{b^4-a^4}{b-a}}{c-b}$$

$$=\frac{\dfrac{(c-a)(c^3+c^2a+ca^2+a^3)}{c-a}-\dfrac{(b-a)(b^3+b^2a+ba^2+a^3)}{b-a}}{c-b}$$

$$=\frac{(c^3+c^2a+ca^2+a^3)-(b^3+b^2a+ba^2+a^3)}{c-b}$$

$$=\frac{(c^3-b^3)+(c^2a-b^2a)+(ca^2-ba^2)+(a^3-a^3)}{c-b}$$

$$=\frac{(c-b)(c^2+cb+b^2)+(c-b)(ca+ab)+a^2(c-b)+0}{c-b}$$

$$=(c^2+cb+b^2)+(ca+ab)+a^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=D.$$

六、證明：$C=D$

$$C=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^4\\ 1 & b & b^4\\ 1 & c & c^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^4\\ 0 & b-a & b^4-a^4\\ 0 & c-a & c^4-a^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}b-a & b^4-a^4\\ c-a & c^4-a^4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b-a & b^2-a^2\\ c-a & c^2-a^2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}b-a & (b-a)(b^3+b^2a+ba^2+a^3)\\ c-a & (c-a)(c^3+c^2a+ca^2+a^3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b-a & (b-a)(b+a)\\ c-a & (c-a)(c+a)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b^3+b^2a+ba^2+a^3\\ 1 & c^3+c^2a+ca^2+a^3\end{vmatrix}}{(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b+a\\ 1 & c+a\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & b^3+b^2a+ba^2+a^3\\ 1 & c^3+c^2a+ca^2+a^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & b+a\\ 1 & c+a\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(c^3+c^2a+ca^2+a^3)-(b^3+b^2a+ba^2+a^3)}{(c+a)-(b+a)}$$

$$=\frac{(c^3-b^3)+(c^2a-b^2a)+(ca^2-ba^2)+(a^3-a^3)}{c-b}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(c-b)(c^2+cb+b^2)+(c-b)(ca+ab)+a^2(c-b)+0}{c-b}\\
&=\frac{(c-b)[(c^2+cb+b^2)+(ca+ab)+a^2]}{c-b}\\
&=(c^2+cb+b^2)+(ca+ab)+a^2\\
&=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=D.
\end{aligned}
$$

七、證明：$A=D$

1. 直接證:

$$
\begin{aligned}
A=&\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-b)(c-b)}\\
=&\frac{a^4(c-b)+b^4(a-c)+c^4(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{(a^4c-ac^4)+(ab^4-a^4b)+(bc^4-b^4c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{ac(a^3-c^3)+ab(b^3-a^3)+bc(c^3-b^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{ac(a-c)(a^2+ac+c^2)+ab(b-a)(b^2+ab+a^2)+bc(c-b)(c^2+bc+b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{ac(a-c)[(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-(b^2+ab+bc)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&+\frac{ab(b-a)[(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-(c^2+bc+ca)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&+\frac{bc(c-b)[(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-(a^2+ab+ca)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[ac(a-c)+ab(b-a)+bc(c-b)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&-\frac{ac[(a-c)(b^2+ab+bc)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}-\frac{ab[(b-a)(c^2+bc+ca)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&-\frac{bc[(c-b)(a^2+ab+ca)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
=&\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[ac(a-c)+b^2(a-c)+b(c^2-a^2)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&-\frac{ac(ab^2+a^2b-b^2c-bc^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}-\frac{ab(bc^2+b^2c-ac^2-a^2c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&-\frac{bc(a^2c+ac^2-a^2b-ab^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[ac(a-c)+b^2(a-c)-(bc+ba)(a-c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&\quad-\frac{[ac(ab^2)-bc(a^2b)]+[ac(a^2b)-ab(a^2c)]+[ab(bc^2)-ac(b^2c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&\quad-\frac{[ab(b^2c)-bc(ab^2)]+[bc(a^2c)-ab(ac^2)]+[bc(ac^2)-ac(bc^2)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[(a-c)(ac+b^2-bc-ba)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&\quad-\frac{0+0+0}{(a-b)(b-c)(c-a)}-\frac{0+0+0}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[(a-c)(b-c)(b-a)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)[(c-a)(b-c)(a-b)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=D \quad \text{得證.}
\end{aligned}
$$

2. 間接證：由 $A=B$ 與 $B=D$ 推得 $A=D$ 即

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-b)(c-b)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

3. 間接證：由 $A=C$ 與 $C=D$ 推得 $A=D$ 即

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-b)(c-b)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

結論:

1. 利用拉格朗日插值法、牛頓插值法、克拉瑪公式求得二次多項式的領導係數且領導係數是唯一的, 因此 $A=B=C$ 推得 $A=B$, $A=C$, $B=C$。
2. 我們證得 $B=D$ 與 $C=D$。
3. 我們直接或間接證得 $A=D$。

參考文獻

1. 李維昌。過相異四點至多三次牛頓插值多項式。龍騰數亦優, 第31刊, 16-23, 民國105年11月7日。

—本文作者爲國立宜蘭高中退休教師—