數學傳播 46卷3期, pp. 55-63

8k 階富蘭克林鬼方陣填製法

巫光楨

富蘭克林 (Benjamin Franklin) 除了是著名政治家、發明家。他曾留傳下兩個後人稱之爲「富蘭克林方陣」的 8 階和 16 階的方陣 [1]。這兩個方陣雖然不符合對角線和也需等於定和的條件, 所以並非魔方陣; 但卻具有普通魔方陣所沒有的許多奇妙特性, 所以一直是許多人的關注焦點。但遺憾的是他並沒有把填製這類方陣的方法留傳下來。

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

圖1：8階富蘭克林方陣

1	56	57	16	17	32	41	40
63	10	7	50	47	34	23	26
8	49	64	9	24	25	48	33
58	15	2	55	42	39	18	31
3	54	59	14	19	30	43	38
60	13	4	53	44	37	20	29
6	51	62	11	22	27	46	35
61	12	5	52	45	36	21	28

圖2：8階富蘭克林鬼方陣

一個 $n=8$ 階的富蘭克林方陣具有下列三項特性:

1、每一個行和、列和都爲定和; 若從中央將行、列分爲兩半, 則半行和爲定和的一半。
例: 在圖 1 中, 第 1 列的列和爲 260, 左右半列和各爲 130。

2、由中線向左上及右上各 $4k$ 個數字之 V 形線和爲定和; 其它向下、向左及向右三個方向之 V 形線和也爲定和。
例: 在圖 1中, 標示的 V 形線和 $=11+58+57+15+18+40+39+22=260$。

3、方陣中任一個 2 階小方陣的 4 個數字之和爲定和之半。
例: 在 (圖 1) 中, 標示的2階小方陣和 $=12+21+54+43=130$。

如果一個方陣不但具有富蘭克林方陣的特性, 也滿足鬼方陣行和、列和及泛對角線和都爲定和的條件, 則稱爲富蘭克林鬼方陣。

例: 在 (圖 2) 中, 第 3 泛正對角線和 $=57+50+24+39+43+29+6+12=260$.

魔方陣僅具有行和、列和及兩條對角線和為定和的特性, 但對一般人而言, 對其填製已具有相當大的難度; 若要升級成鬼方陣, 甚至更進一步填製出富蘭克林鬼方陣, 那難度會難到令一般人卻步嗎? 其實一點都沒有這個問題, 以下就以 8 階方陣為例, 介紹一個簡易的富蘭克林鬼方陣填製法:

富蘭克林鬼方陣填製法:

第 1 步 : 製作輔助方陣 A

1、取得一個任意的從 0 到 $n-1$, 共 n 數 $(n=8)$ 的補數數列:
其製作方法為將數字 $0 \sim n-1=7$ 迴轉填出後, 先任意左右互調 (上下 2 數需同時互調) 後, 再任意上下互調即可。

例:

0	1	2	3
7	6	5	4

$\Longrightarrow$

2	0	3	1
5	7	4	6

$\Longrightarrow$

5	0	3	6
2	7	4	1

以上圖為例, 可取得補數數列 $\{5,0,3,6,1,4,7,2\}$, 如果完全不做調動, 則最簡單的補數數列其實就是 $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。若以中央為軸, 將補數數列摺起, 則對稱的兩數互為補數, 其和為 7。

例: 0 的補數為 7、5 的補數為 2。

2、將方陣的第 1 列分成 $2k$ 個 4 數組, 依序在每一個 4 數組的前兩格填入剛才取得的前 $4k$ 個補數數列數字:

5	0			3	6		

3、依序將補數填到各數組的後序格中:

5	0	2	7	3	6	4	1

4、在第 2 列填入第 1 列各數的補數後, 複製該兩列將方陣填滿。

5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6

$\Longrightarrow$

5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6

第 **2** 步 **:** 製作輔助方陣 B

將輔助方陣 A 向右旋轉 90 度。

5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6
5	0	2	7	3	6	4	1
2	7	5	0	4	1	3	6

$\Longrightarrow$

2	5	2	5	2	5	2	5
7	0	7	0	7	0	7	0
5	2	5	2	5	2	5	2
0	7	0	7	0	7	0	7
4	3	4	3	4	3	4	3
1	6	1	6	1	6	1	6
3	4	3	4	3	4	3	4
6	1	6	1	6	1	6	1

第 **3** 步 **:** 合成方陣 C

將輔助方陣 A 中的數字乘以 $n = 8$, 再加上輔助方陣 B 中的數字再加上 1, 即爲方陣 C 的值了, 簡記爲 $C = nA + B + 1$。

例: A 方陣的第 3 列第 5 行 r3c5= 3, B方陣 r3c5= 5, 則 C 方陣 r3c5= $3\times 8+5+1 = 30$。

43	6	19	62	27	54	35	14
24	57	48	1	40	9	32	49
46	3	22	59	30	51	38	11
17	64	41	8	33	16	25	56
45	4	21	60	29	52	37	12
18	63	42	7	34	15	26	55
44	5	20	61	28	53	36	13
23	58	47	2	39	10	31	50

圖3 : $nA + B + 1$ 合成的富蘭克林鬼方陣

在第 2 步製作輔助方陣 B 時, 我們是以向右旋轉 90 度的方式來得到輔助方陣 B。其實所有可讓行列互換的鋼性變換都可拿來使用, 例如 : 向左旋轉 90 度、左斜鏡射、右斜鏡射等。而在第 3 步合成方陣時, 我們是採用 $C = nA + B + 1$, 其實也可採用 $C = nB + A + 1$ 來合成方陣。

例: 若以右斜鏡射得到方陣 B, 並以 $C = nB + A + 1$ 來合成方陣, 結果如下:

5	2	5	2	5	2	5	2
0	7	0	7	0	7	0	7
2	5	2	5	2	5	2	5
7	0	7	0	7	0	7	0
3	4	3	4	3	4	3	4
6	1	6	1	6	1	6	1
4	3	4	3	4	3	4	3
1	6	1	6	1	6	1	6

右斜鏡射得到的方陣 B

46	17	43	24	44	23	45	18
3	64	6	57	5	58	4	63
22	41	19	48	20	47	21	42
59	8	62	1	61	2	60	7
30	33	27	40	28	39	29	34
51	16	54	9	53	10	52	15
38	25	35	32	36	31	37	26
11	56	14	49	13	50	12	55

合成方陣 C

圖4: $nB+A+1$ 合成的富蘭克林鬼方陣

採用同樣的步驟, 我們可以用 0 起 16 數補數數列:

$$\{3, 11, 2, 1, 9, 0, 8, 5, 10, 7, 15, 6, 14, 13, 4, 12\}$$

來造出 16 階輔助方陣 A, 再用向右旋轉 90 度的方式造出輔助方陣 B, 並令 $C=nA+B+1$ 來合成 16 階富蘭克林鬼方陣, 因爲輔助方陣 B 只是 A 的旋轉 90 度轉置, 內容完全相同, 爲了節省篇幅, 以下均不再顯示:

3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	1	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5
3	11	12	4	2	1	13	14	9	0	6	15	8	5	7	10
12	4	3	11	13	14	2	1	6	15	9	0	7	10	8	5

輔助方陣 A

61	180	205	68	45	20	221	228	157	4	109	244	141	84	125	164
197	76	53	188	213	236	37	28	101	252	149	12	117	172	133	92
52	189	196	77	36	29	212	237	148	13	100	253	132	93	116	173
204	9	60	181	220	229	44	21	108	245	156	5	124	165	140	85
62	179	206	67	6	19	222	227	158	3	110	243	142	83	126	163
207	66	63	178	223	226	47	18	111	242	159	2	127	162	143	82
51	190	195	78	35	30	211	238	147	14	99	254	131	94	115	174
194	79	50	191	210	239	34	31	98	255	146	15	114	175	130	95
55	186	199	74	39	26	215	234	151	10	103	250	135	90	119	170
208	65	64	177	224	225	48	17	112	241	160	1	128	161	144	81
58	183	202	71	42	23	218	231	154	7	106	247	138	87	122	167
193	80	49	192	209	240	33	32	97	256	145	16	113	176	129	96
56	185	200	73	40	25	216	233	152	9	104	249	136	89	120	169
203	70	59	182	219	230	43	22	107	246	155	6	123	166	139	86
57	184	201	72	41	24	217	232	153	8	105	248	137	88	121	168
198	75	54	187	214	235	38	27	102	251	150	11	118	171	134	91

合成方陣 C

圖5: 16 階富蘭克林鬼方陣

圖 5 的這個方陣其實已十分接近優化富蘭克林鬼方陣 [2] 了, 甚至有些特性還是優化富蘭克林方陣比不上的。所謂優化富蘭克林鬼方陣, 除了一般富蘭克林鬼方陣的特性外, 還具有下列特性:

1、將兩條正反對角線等分爲兩半, 則各半之和爲定和的一半。

2、符合「行 W 性質」。

圖 5 的富蘭克林鬼方陣雖然符合條件 1, 但條件 2 卻僅符合部分, 以圖 5 而言, 雖然 4 列的 W 形線 $\{198, 184, 59, 73, 40, 230, 217, 27, 102, 8, 155, 249, 136, 166, 121, 91\}$ 之和爲定和, 但 2 列的 W 形線 $\{208, 183, 202, 177, 224, 23, 218, 17, 112, 7, 106, 1, 128, 87, 122, 81\}$ 之和卻不爲定和。

既然泛對角線、V 形線、W 形線都採用了超出邊界則移到對面的方式, 那麼在探討內崁方陣上, 應該也可接納這種方式, 於是像圖 6 的方陣 1、方陣 2 都應可算是圖 5 方陣 C 的內崁方陣。因爲不論橫向或縱向都可切出 4 個符合條件的方陣, 所以共內崁 16 個富蘭克林鬼方陣, 至於內崁的一般 4 階鬼方陣也有 16 個, 12 階鬼方陣有 16 個。梁文 [2] 中介紹的優化富蘭林鬼方陣則沒有這種特性, 僅那些 16 階方陣和 8 階方陣的中軸線重合者才是富蘭克林鬼方陣, 否則僅爲一般的鬼方陣。

141	84	125	164	61	180	205	68
117	172	133	92	197	76	53	188
132	93	116	173	52	189	196	77
124	165	140	85	204	69	60	181
142	83	126	163	62	179	206	67
127	162	143	82	207	66	63	178
131	94	115	174	51	190	195	78
114	175	130	95	194	79	50	191

8 階富蘭克林鬼方陣 1

40	25	216	233	152	9	104	249
219	230	43	22	107	246	155	6
41	24	217	232	153	8	105	248
214	235	38	27	102	251	150	11
45	20	221	228	157	4	109	244
213	236	37	28	101	252	149	12
36	29	212	237	148	13	100	253
220	229	44	21	108	245	156	5

8 階富蘭克林鬼方陣2

圖6：採用超出邊界則移到對面方式得到的方陣

不過, 不及就是不及, 想法改善甚至超越吧! 下面介紹的這個填製法雖然在補數數列的取得上限制較多, 但整體而言, 仍然稱得上是十分簡便的。爲了方便大家更能掌握本法的精要, 下面以16階方陣的填製來說明填製過程:

翊翼富蘭克林鬼方陣填製法:

第 1 步 : 製作輔助方陣 A

1、取得一個等分從 0 到 $n-1$, 共 n 數 $(n=16)$ 的補數數列:
其製作方法爲將數字 $0 \sim n-1=15$ 迴轉填出後, 將其分成 $k=2$ 個 4 數組, 將每一個 4 數組的中央兩數或前後兩數上下互調。

例: 將前後兩數上下互調:

0	1	2	3	4	5	6	7
15	14	13	12	11	10	9	8

$\Longrightarrow$

15	1	2	12	11	5	6	8
0	14	13	3	4	10	9	7

2、將每一個 4 數組中的第 1、3 數或 2、4 數互調:

例: 將第 1、3 數互調:

2	1	15	12	6	5	11	8
13	14	0	3	9	10	4	7

前面這 2 個互調的程序是必選, 一定要選一個。接下來的互調是複選, 可任選 1 個, 也可不選或多選, 意即可直接跳到 5 去進行填數。

3、將每一個 4 數組中的第 1、2 數或 3、4 數互調:

例: 將第 3、4 數互調:

2	1	12	15	6	5	8	11
13	14	3	0	9	10	7	4

4、任選兩個 4 數組互調:

若是 8 階方陣時只有 1 個 4 數組, 本處就沒有選擇; 16 階方陣時可選擇將這兩個 4 數組互調; 24 階以上時可選擇的 4 數組就多了, 可多次選擇任意的兩個 4 數組做互調。

例: 不互調。

可取得等分補數數列 $\{2, 1, 12, 15, 6, 5, 8, 11, 4, 7, 10, 9, 0, 3, 14, 13\}$。這個數列不但對應的補數和為 15, 每一個 4 數組之和均為 30。

5、將方陣的第 1、2 列分成 $2k$ 個 4 數組, 依序在奇數的 4 數組的前兩格填入剛才取得的前 $4k$ 個補數數列數字:

2	1							6	5						
12	15							8	11						

6、將補數填到各數組的對應格中:

2	1	14	13					6	5	10	9				
12	15	0	3					8	11	4	7				

7、將第 1、2 列各數兩兩交換後填到第 3、4 列去, 然後將第 3、4 列複製到第 5、6 列、將第 1、2 列複製到第 7、8 列:

2	1	14	13					6	5	10	9				
12	15	0	3					8	11	4	7				
1	2	13	14					5	6	9	10				
15	12	3	0					11	8	7	4				
1	2	13	14					5	6	9	10				
15	12	3	0					11	8	7	4				
2	1	14	13					6	5	10	9				
12	15	0	3					8	11	4	7				

8、將第 1~8 列複製到第 9、16 列, 然後將各空白行以左方數組複製填滿:

2	1	14	13	2	1	14	13	6	5	10	9	6	5	10	9
12	15	0	3	2	15	0	3	8	11	4	7	8	11	4	7
1	2	13	14	1	2	13	14	5	6	9	10	5	6	9	10
15	12	3	0	15	12	3	0	11	8	7	4	11	8	7	4
1	2	13	14	1	2	13	14	5	6	9	10	5	6	9	10
15	12	3	0	15	12	3	0	11	8	7	4	11	8	7	4
2	1	14	13	2	1	14	13	6	5	10	9	6	5	10	9
12	15	0	3	12	15	0	3	8	11	4	7	8	11	4	7
2	1	14	13	2	1	14	13	6	5	10	9	6	5	10	9
12	15	0	3	12	15	0	3	8	11	4	7	8	11	4	7
1	2	13	14	1	2	13	14	5	6	9	10	5	6	9	10
15	12	3	0	15	12	3	0	11	8	7	4	11	8	7	4
1	2	13	14	1	2	13	14	5	6	9	10	5	6	9	10
15	12	3	0	15	12	3	0	11	8	7	4	11	8	7	4
2	1	14	13	2	1	14	13	6	5	10	9	6	5	10	9
12	15	0	3	12	15	0	3	8	11	4	7	8	11	4	7

第 2 步 : 製作輔助方陣 B 所有可讓行列互換的鋼性變換都可拿來使用, 例如 : 向右旋轉 90 度、向左旋轉 90 度、左斜鏡射、右斜鏡射等。

例: 將 A 方陣向右旋轉 90 度得到 B 方陣。(爲節省篇幅就不列出了)

第 3 步 : 合成方陣 C 以 $C = nA + B + 1$ 合成方陣 C, 所得如下:

45	19	240	210	48	18	237	211	109	83	176	146	112	82	173	147
208	242	13	51	205	243	16	50	144	178	77	115	141	179	80	114
17	47	212	238	20	46	209	239	81	111	148	174	84	110	145	175
244	206	49	15	241	207	52	14	180	142	113	79	177	143	116	78
29	35	224	226	32	34	221	227	93	99	160	162	96	98	157	163
256	194	61	3	253	195	64	2	192	130	125	67	189	131	128	66
33	31	228	222	36	30	225	223	97	95	164	158	100	94	161	159
196	254	1	63	193	255	4	62	132	190	65	127	129	191	68	126
41	23	236	214	44	22	233	215	105	87	172	150	108	86	169	151
204	246	9	55	201	247	12	54	140	182	73	119	137	183	76	118
21	43	216	234	24	42	213	235	85	107	152	170	88	106	149	171
248	202	53	11	245	203	56	10	184	138	117	75	181	139	120	74
25	39	220	230	28	38	217	231	89	103	156	166	92	102	153	167
252	198	57	7	249	199	60	6	188	134	121	71	185	135	124	70
37	27	232	218	40	26	229	219	101	91	168	154	104	90	165	155
200	250	5	59	197	251	8	58	136	186	69	123	133	187	72	122

圖7 : $nA + B + 1$ 合成的翔翼富蘭克林鬼方陣

雖然在取得等分 0 起 n 數補數數列的過程中有很多變化, 在製作輔助方陣 B 時也有 4 種選擇, 再加上合成方陣時有兩種方式, 合成出的方陣 C 似乎有不少變化。這些方陣以鬼方陣的角度來看並不全等, 但因富蘭克林方陣有一個隔行或隔列互調仍爲富蘭克林方陣的性質, 所以不論在上述過程中如何變化, 得到的都是全等的富蘭克林鬼方陣。

例:

- 使用 $\{9,10,7,4,13,14,7,0,15,12,1,2,11,8,5,6\}$ 數列可得到圖 8左的方陣。
- 使用 $\{10,9,4,7,14,13,0,3,12,15,2,1,8,11,6,5\}$ 數列可得到圖 8右的方陣。
- 使用 $\{15,12,1,2,11,8,5,6,7,4,9,10,3,0,13,14\}$ 數列可得到圖 9 的方陣。

從圖 7 $\sim$ 圖 9 中的 4 個方陣, 都是全等的 $16(=8k,\, k=2)$ 階翔翼富蘭克林鬼方陣。這些方陣都有一個半 V 形線特性:

- 任選一個內崁 8 階方陣, 4 數 V 形線和爲定和 $/k$, 2數 V 形線和爲定和 $/2k$。

例: 圖 7 的 16 階方陣定和爲 2056, 則圖示的 4 數 V 形線 $\{132,87,73,170,88,183,169,126\}$ 之和爲 1028, 2數 V 形線 $\{125,158,100,131\}$ 之和爲 514。當然, 圖示的只有正 V 一個方向, 所有的 4 個方向也都需要符合條件。

有了這個特性, 不論是富蘭克林方陣的 V 形線性質, 或優化富蘭克林鬼方陣的 W 形線性質都可輕易導出。

先來看看 V 形線性質, 由圖 8 左圖可看出：圖示的倒 V 形線可由頂點分別爲 $\{149,43,124,198\}$ 及 $\{229,91,16,178\}$ 的8階方陣之 4 數 V 形線組合而成, 故其和爲定和。其它的 V 形線可類推。

再來看看 W 形線性質, 由圖 8 右圖可看出： 圖示的 4 列 W 形線可由頂點分別爲 $\{165,91,76,182\}$ 及$\{229,27,12,246\}$ 的 8 階方陣之 4 數 V 形線組合而成, 故其和爲定和。至於圖示的 2 列 W 形線可由頂點分別爲 $\{161,95,80,178\}$、$\{164,30,77,243\}$、$\{225,31,16,242\}$ 及 $\{228,94,13,179\}$ 的 8 階方陣之2數 V 形線組合而成, 故其和爲定和。其它的 W 形線可類推。

取名爲翔翼是因爲利用這個性質不但可造出 V 形線、W 形線, 只要同一個2數組的兩格不併排, 所造出的任何對稱的圖形其數字和均爲定和。以圖 9 的翔翼線形來說, $\{144,15\}$ 雖然併排, 但它們並不屬於相同的 2 數組。所屬數組 $=(a-1)/2$ 的整數商, 第 2 行屬於 $(2-1)/2=0.5$, 取整數爲 0; 而第 3 行屬於 $(3-1)/2=1$。所以圖 9 中的兩個線形其數字和都是定和。其它的翔翼線形可類推。

152	170	85	107	149	171	88	106	216	234	21	43	213	235	24	42
117	75	184	138	120	74	181	139	53	11	248	202	56	10	245	203
172	150	105	87	169	151	108	86	236	214	41	23	233	215	44	22
73	119	140	182	76	118	137	183	9	55	204	246	12	54	201	247
168	154	101	91	165	155	104	90	232	218	37	27	229	219	40	26
69	123	136	186	72	122	133	187	5	59	200	250	8	58	197	251
156	166	89	103	153	167	92	102	220	230	25	39	217	231	28	38
121	71	188	134	124	70	185	135	57	7	252	198	60	6	249	199
148	174	81	111	145	175	84	110	212	238	17	47	209	239	20	46
113	79	180	142	116	78	177	143	49	15	244	206	52	14	241	207
176	146	109	83	173	147	112	82	240	210	45	19	237	211	48	18
77	115	144	178	80	114	141	179	13	51	208	242	16	50	205	243
164	158	97	95	161	159	100	94	228	222	33	31	225	223	36	30
65	127	132	190	68	126	129	191	1	63	196	254	4	62	193	255
160	162	93	99	157	163	96	98	224	226	29	35	221	227	32	34
125	67	192	130	128	66	189	131	61	3	256	194	64	2	253	195

V 形線性質轉換示意圖

165	155	104	90	168	154	101	91	229	219	40	26	232	218	37	27
72	122	133	187	69	123	136	186	8	58	197	251	5	59	200	250
153	167	92	102	156	166	89	103	217	231	28	38	220	230	25	39
124	70	185	135	121	71	188	134	60	6	249	199	57	7	252	198
149	171	88	106	152	170	85	107	213	235	24	42	216	234	21	43
120	74	181	139	117	75	184	138	56	10	245	203	53	11	248	202
169	151	108	86	172	150	105	87	233	215	44	22	236	214	41	23
76	118	137	183	73	119	140	182	12	54	201	247	9	55	204	246
161	159	100	94	164	158	97	95	225	223	36	30	228	222	33	31
68	126	129	191	65	127	132	190	4	62	193	255	1	63	196	254
157	163	96	98	160	162	93	99	221	227	32	34	224	226	29	35
128	66	189	131	125	67	192	130	64	2	253	195	61	3	256	194
145	175	84	110	148	174	81	111	209	239	20	46	212	238	17	47
116	78	177	143	113	79	180	142	52	14	241	207	49	15	244	206
173	147	112	82	176	146	109	83	237	211	48	18	240	210	45	19
80	114	141	179	77	115	144	178	16	50	205	243	13	51	208	242

V 形線性質轉換示意圖

圖8：半 V 線性質可輕易導出 V、W 線性質

242	208	51	13	243	205	50	16	178	144	115	77	179	141	114	80
19	45	210	240	18	48	211	237	83	109	146	176	82	112	147	173
206	244	15	49	207	241	14	52	142	180	79	113	143	177	78	116
47	17	238	212	46	20	239	209	111	81	174	148	110	84	175	145
194	256	3	61	195	253	2	64	130	192	67	125	131	189	66	128
35	29	226	224	34	32	227	221	99	93	162	160	98	96	163	157
254	196	63	1	255	193	62	4	190	132	127	65	191	129	126	68
31	33	222	228	30	36	223	225	95	97	158	164	94	100	159	161
246	204	55	9	247	201	54	12	182	140	119	73	183	137	118	76
23	41	214	236	22	44	215	233	87	105	150	172	86	108	151	169
202	248	11	53	203	245	10	56	138	184	75	117	139	181	74	120
43	21	234	216	42	24	235	213	107	85	170	152	106	88	171	149
198	252	7	57	199	249	6	60	134	188	71	121	135	185	70	124
39	25	230	220	38	28	231	217	103	89	166	156	102	92	167	153
250	200	59	5	251	197	58	8	186	136	123	69	187	133	122	72
27	37	218	232	26	40	219	229	91	101	154	168	90	104	155	165

圖9：翔翼形性質

16 階翔翼富蘭克林鬼方陣共內崁 16 個 8 階的翔翼富蘭克林鬼方陣, 一般的 4 階、12 階鬼方陣各 16 個, 再加上本身爲 16 階翔翼富蘭克林鬼方陣, 共計 49 個鬼方陣以上級別的方陣。24 階翔翼富蘭克林鬼方陣共內崁 8 階、16 階的翔翼富蘭克林鬼方陣各 36 個, 一般的 4 階、12 階、20 階鬼方陣各 36 個, 再加上本身爲 24 階翔翼富蘭克林鬼方陣, 共計 181 個鬼方陣以上級別的方陣。其數量確實令人咋舌。

參考文獻

1. 林克瀛。富蘭克林方陣。數學傳播季刊, 6(2), 30-33, 1982。
2. 梁培基, 張航輔, 張俠輔。$8k$ 階優化 Franklin 型幻方的快速構作方法。數學傳播季刊, 45(3), 88-102, 2021。

—本文作者爲國小教師退休—