數學傳播 46卷3期, pp. 38-48

再談等角差線—

兼談 108 數學課綱之圓錐曲線教學

張鎮華

1. 有趣的問題, 可賀的恆心

數學傳播季刊最近有一篇李永約的文章 [1], 他提出一個有趣的概念, 叫做等角差線, 並推導出一些這種曲線的性質。他的出發點是高三時的一個學測模擬考題目 :「如果 $\triangle ABC$ 在 $\overline{BC}=5$, $\angle B=\angle C+40^\circ$ 之下, 對每一個 $\angle B$ 的 $\triangle ABC$ 是否唯一?」

這個學測模擬考題目並不特別顯眼, 也很容易解答。令人驚奇的是, 作者由這個簡單的問題聯想到雙曲線, 高中學過「給定平面上相異兩點 F_1、F_2, 以及正數 $2a<\overline{F_1F_2}$, 滿足 $|PF_1-PF_2|=2a$ 的所有點 P 所成的圖形爲一雙曲線。」他動了心思, 想要了解, 如果把「$|PF_1-PF_2|$ 爲定值」改成「$|\angle PF_1F_2-\angle PF_2F_1|$ 爲定值」, 到底會產生甚麼樣的曲線?

於是他定義了等角差線:「 $\triangle ABC$, $\overline{BC}=\ell$, $\angle B=\angle C+\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$[1], 我們稱動點 A 之軌跡爲 $\overline{BC}=\ell$ 時之 α 等角差線 Γ_α^ℓ。」

他接著以 B 爲原點, $\overleftrightarrow{BC}$ 爲 x 軸且 $\overrightarrow{BC}$ 方向爲正, A 於 $\overleftrightarrow{BC}$ 之上方[2], 作一直角坐標系如圖 1, 其中 $\ell=1$, 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 而 D 在 $\overline{BC}$ 上[3]。

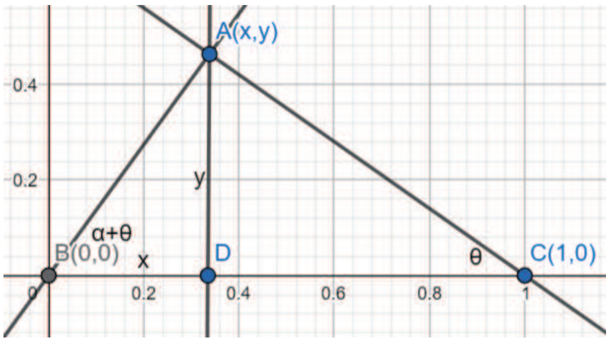

圖1: 三角形 ABC 及相關角度。[1]

[1]如果是模仿雙曲線, 條件應該是 $|\angle B-\angle C|=\alpha$。不過這只是將條件爲 $\angle B=\angle C+\alpha$ 的圖形, 經由 $\overline{BC}$ 的中垂線, 作對稱圖形就可以。

[2]A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 下方時, 也會有答案, 就是把 A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上方時的答案, 經由 $\overleftrightarrow{BC}$ 作對稱圖形。

[3]由於 $0<\alpha+\theta+\theta<\pi$, 得知 $0<\theta<\frac{\pi-\alpha}{2}$ 及 $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi+\alpha}{2}$, 所以 $\theta+\alpha$ 有機會超過 $\frac{\pi}{2}$, 此時 D 不在 $\overline{BC}$ 上。比較保險的說法是, D 在射線 $\overrightarrow{CB}$ 上。

利用圖 1, 經過計算, 得到 Γ_{α}^{ℓ} 上面點的 x, y 坐標的 θ 參數式爲

$$x\tan(\theta+\alpha)=y=(\ell-x)\tan\theta, \tag{1}$$

也就是

$$\begin{cases} x=\dfrac{\ell\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}, \\ y=\dfrac{\ell\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}. \end{cases} \tag{2}$$

可以注意的是, 式 (1) 中, x 的值可以爲負, 這就是前面註解3裡提到的「此時 D 不在 $\overline{BC}$ 上。比較保險的說法是, D 在射線 $\overrightarrow{CB}$ 上。」

文中並以 $\ell=1$、$\alpha=\frac{\pi}{6}$ 爲例, 利用式 (2) 畫出圖 2 的圖形 $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}^{1}$。

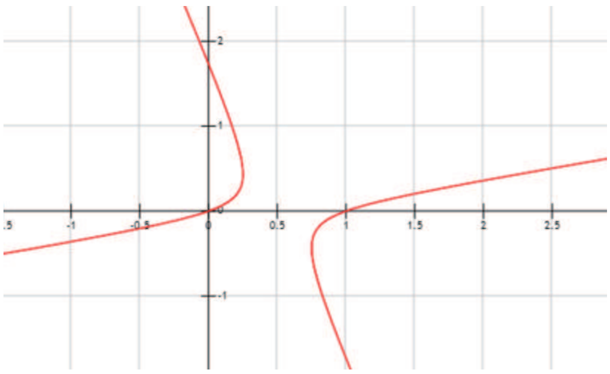

圖2: 利用式 (2) 畫出的圖形 $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}^{1}$。[1]

文中推導出曲線的漸近線、在某處的切線斜率等性質, 對於微分和旋轉矩陣的應用熟練。

比較讓我感動的是, 作者在高中時提出這個問題, 雖然一時之間未能回答, 但始終不放棄, 一年多來時時思索此問題。抱持著「做數學研究就是給自己的一場數奧競賽」, 還能夠「謝謝自己, 願意不斷地研究, 不忘記自己的初衷。」我要衷心的向作者道賀, 正是這樣的用心, 相信將來不管從事哪一種行業, 都會成功的。

因爲文中已經畫出樣本圖形, 而且得到兩條漸近線。站在作者的肩膀上, 算是「後見之明」, 越看這條曲線越像雙曲線。我們以此爲信心, 展開另一種想法的推導。同時討論 108 數學課綱 [2] 的圓錐曲線教學。

本文撰寫到一半時, 數學傳播新一期出版鍾文體的文章 [3], 也指出來這條曲線是雙曲線。

2. 檢視圖 2 與原問題的關係

在進一步推導之前, 我們先來討論一下前述的圖 2。

首先, 如果畫圖的條件是「A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上方, $\angle B=\angle C+\frac{\pi}{6}$」, 那麼圖形應該只是圖 2 的一部份, 也就是, 只有在 x 軸上方、並在 $\overline{BC}$ 的中垂線左方那一部份。如果取消「A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上方」的限制, 並將「$\angle B=\angle C+\frac{\pi}{6}$」改爲「$|\angle B-\angle C|=\frac{\pi}{6}$」, 則如同鍾文體的文章 [3] 所指出來的, 圖形應該如圖 3 所示, 也就是將前述的那一部分, 加上對 $\overline{BC}$ 中垂線的對稱圖形, 然後再加上新圖形對 x 軸的對稱圖形。在圖 3 中, 有一個小的細節可以留意的是, 因爲 $0<\theta<\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{12}$ 所以會有 $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{1}{2}(\pi+\frac{\pi}{6})=\frac{7\pi}{12}$, 所以其實是不會有在 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 這兩個尖點, 不過如果我們允許 $\theta=0$ 時的退化情況, 就會有這兩點了。

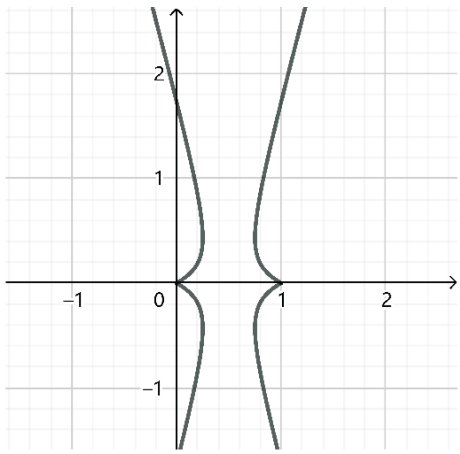

圖3 : $|\angle B-\angle C|=\dfrac{\pi}{6}$ 的圖形。[3]

我也用 Desmos 畫式 (2) 所描述的圖形, 確實是如圖 2 所示, 我還利用滑桿了解圖形隨著角度 θ 變化的情況, 如下所述。

當 $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ 時 $\frac{\pi}{6}\le\theta+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$, 畫出來的圖形是圖 2 的曲線左邊那支, 由原點 O 開始往上升, 直到碰到 y 軸的一點 $E(0,\sqrt{3})$, 這一部份落在第一象限。很奇怪的是, 當 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 時 $\tan(\theta+\frac{\pi}{6})=\tan\frac{\pi}{2}$ 應該沒定義, 但是 Desmos 畫圖竟然不影響, 後面也有一些類似的現象。這個現象可以解讀爲

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan\theta}{\tan(\theta+\frac{\pi}{6})+\tan\theta}=0,$$
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan\theta\tan(\theta+\frac{\pi}{6})}{\tan(\theta+\frac{\pi}{6})+\tan\theta}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

當 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{5\pi}{12}$ 時 $\frac{\pi}{2}\le\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{12}$, 畫出來的是曲線左邊那支, 由點 $E(0,\sqrt{3})$ 往左上升, 直到「左上方無窮遠」處, 這一部分落在第二象限。

當 $\frac{5\pi}{12}<\theta\le\frac{5\pi}{6}$ 時 $\frac{7\pi}{12}\le\theta+\frac{\pi}{6}<\pi$, 畫出來的是曲線右邊那支, 由「右下方無窮遠」往上升, 最後碰到 y 軸的一點 $F(1,0)$, 這一部份落在第四象限。造成這個現象的原因是, 本來要用

$\angle C=\theta$ 以及 $\angle B=\theta+\frac{\pi}{6}$ 來畫三角形 ABC, 但是卻因爲 $\angle B+\angle C=2\theta+\frac{\pi}{6}>\pi$, 畫出來的三角形的邊 $\overline{CA}$ 和 $\overline{BA}$ 不是往上, 反而是往下交在第四象限的點 A, 此時真正的 $\angle C=\pi-\theta$、真正的 $\angle B=(\pi-\theta)-\frac{\pi}{6}$, 也就是反過來 $\angle C=\angle B+\frac{\pi}{6}$, 其中 $0\le(\pi-\theta)-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{12}$, 所以這一部份的圖形, 其實和圖 3 右下方的圖形是一致的, 它以 $(\frac{1}{2},0)$ 對稱於前述 $0\le\theta<\frac{5\pi}{12}$ 的圖形。

當 $\frac{5\pi}{6}\le\theta<\frac{11\pi}{12}$ 時 $\pi\le\theta+\frac{13\pi}{12}$, 畫出來的是曲線右邊那支, 由點 $F(1,0)$ 往右上升, 直到「右上方無窮遠」處, 在第一象限的部分。這時候的現象與前一段不同, 此時 $\angle B=\theta+\frac{\pi}{6}$ 而 $\pi\le\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{12}$, 畫出來的三角形的邊 $\overline{BA}$ 本來因爲角度大, 似乎要往下, 但實際是往上, 與往上的 $\overline{CA}$ 交在第一象限的點 A, 此時 $\angle C=\theta$ 不變、但是真正的 $\angle B=(\theta+\frac{\pi}{6})-\pi=\theta-\frac{5\pi}{6}$, 所以是 $\angle C=\angle B+\frac{5\pi}{6}$, 與前面的條件不同, 不過其圖形反而是平滑的由前一部分連出去, 與圖 3 經由的尖點連出去不同。當 $\frac{11\pi}{12}<\theta\le\pi$ 時 $\frac{13\pi}{12}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$, 畫出來的是曲線左邊那支, 由「左下方無窮遠」處往上升, 直到碰到原點 O, 這一部分落在第三象限。其現象和前面一段類似, 其圖形以 $(\frac{1}{2},0)$ 爲中心對稱於前一部分。

參數由 0 到 π, 完整畫出平滑圖形, 所以我們不妨放寬範圍, 使得圖形更加完整。下面我們就不限定角度 θ 的範圍了。

3. 後見之明 — 看起來像是雙曲線

如同前面所述, 由圖 2 看起來, 這條曲線真的很像是雙曲線。現在就來看看是否如此。首先, 如果雙曲線是在標準位置, 其標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

所以比較自然的參數式會是

$$x=a/\cos\theta \quad 、\quad y=b\tan\theta.$$

這看起來和前面提到的參數式相差很遠。當然這也不奇怪, 因爲圖 2 顯示的圖形, 縱使是雙曲線, 也不在標準位置。

那麼我們應該要如何處理呢? 我們試試看採用去掉參數的作法。

首先, 將式 (1) 的參數式 $x\tan(\theta+\alpha)=y=(\ell-x)\tan\theta$ 改寫爲

$$\frac{y}{x}=\tan(\theta+\alpha) \quad 、\quad \frac{y}{\ell-x}=\tan\theta,$$

遂有

$$\frac{y}{x}=\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{y}{\ell-x}+\tan\alpha}{1-\dfrac{y}{\ell-x}\tan\alpha}=\frac{y+(\ell-x)\tan\alpha}{(\ell-x)-y\tan\alpha},$$

整理可得

$$x^2\tan\alpha-2xy-y^2\tan\alpha-x\ell\tan\alpha+y\ell=0. \tag{3}$$

這是一個二元二次方程式, 圖形應該是一條圓錐曲線。

一般的二元二次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的圖形是圓錐曲線的論述, 在早期的高中數學課本 (像是民國五十六年我上高中時的數學課本) 還教導; 民國六十年的高級中學課程標準的規範是, 要學習二元二次方程式、二次曲線、坐標變換, 雖然沒有詳細內容, 但由其用字, 應該和我高中時的數學教科書一樣。據我所知, 因爲這些論述繁雜, 最後學生在學習時, 常常忽略推導過程, 只是背誦公式, 以公式求解, 淪爲無效的學習, 所以後來的數學課綱都規範, 只討論圓錐曲線標準式。事實上, 72高級中學數學科課程標準, 其規範就是, 圓錐曲線只介紹標準式, 橢圓與雙曲線不介紹準線與離心率, 這種規範後來一直被沿用, 所以現在的數學課本都用動點到兩焦點距離和/差來定義橢圓/雙曲線, 看來這種規範由來已久。

可是我們得出來的方程式 (3) 卻不是標準式, 那我們要如何對現在的高中生解釋這條曲線呢?

且讓我們來看看還有沒有其他方法可以解釋。

首先, 可以做平移的動作, 試著把一次項消掉。事實上, 李永約的文章 [1] 和鍾文體的文章 [3] 都已經有此作法。平移在現在的高一數學課程中是一個學習重點, 學習內容包含一次函數、二次函數、三次函數、圓的方程式, 高中學生應該不陌生。由圖 2 也可以看出來, 圖形對稱於點 $(\frac{\ell}{2},0)$, 所以只要將 y-軸往右平移 $\frac{\ell}{2}$ 單位, 讓對稱點變成新坐標系統的原點, 方程式應該有機會簡化; 平移後的新坐標 $(x',y')=(x-\frac{\ell}{2},y)$, 也就是 $(x,y)=(x'+\frac{\ell}{2},y')$。用現在高中課本的說法, 在不產生新坐標系統的作法下, 把圖形往左平移 $\frac{\ell}{2}$ 單位, 對稱點就會移到原點; 這時候, 只要將前面得到的方程式 (3) 中的 x 換成 $x+\frac{\ell}{2}$, 就會得到平移後的方程式:

$$(x+\frac{\ell}{2})^2\tan\alpha-2(x+\frac{\ell}{2})y-y^2\tan\alpha-(x+\frac{\ell}{2})\ell\tan\alpha+y\ell=0,$$

整理後就得到

$$x^2\tan\alpha-2xy-y^2\tan\alpha=\frac{\ell^2\tan\alpha}{4}. \tag{4}$$

這看起來已經清爽許多, 但距離標準式還差一個 xy 項。要解決問題就要將坐標軸旋轉。雖然高中數學課綱都已經刪除這一部分的教學內容, 但是學習內容「F-11A-3 矩陣的應用：平面上的線性變換, 二階轉移矩陣。」揭示, 二階矩陣當作線性變換, 是高中重要的學習內容, 這包括了伸縮、旋轉等重要的變換, 此處要用旋轉變換, 也就是, 將坐標軸依順時針方向旋轉角度 β, 則新坐標

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

也就是

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'\cos\beta + y'\sin\beta \\ -x'\sin\beta + y'\cos\beta \end{bmatrix}.$$

用現在高中課本的說法, 在不產生新坐標系統的作法下, 把圖形逆時針方向旋轉角度; 這時候只要將方程式 (4) 中的 x 換成 $x\cos\beta + y\sin\beta$、y 換成 $-x\sin\beta + y\cos\beta$, 就會得到旋轉後的方程式:

$$(x\cos\beta + y\sin\beta)^2\tan\alpha - 2(x\cos\beta + y\sin\beta)(-x\sin\beta + y\cos\beta) \\ -(-x\sin\beta + y\cos\beta)^2\tan\alpha = \frac{\ell^2\tan\alpha}{4},$$

整理後得到

$$(x^2-y^2)(\cos 2\beta\tan\alpha + \sin 2\beta) + 2xy(\sin 2\beta\tan\alpha - \cos 2\beta) = \frac{\ell^2\tan\alpha}{4},$$

為消除 xy, 需要 $\sin 2\beta\tan\alpha - \cos 2\beta = 0$, 可取 $2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, 此時也會有

$$\cos 2\beta\tan\alpha + \sin 2\beta = \sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

所以旋轉後的方程式就是

$$x^2 - y^2 = \frac{\ell^2\sin\alpha}{4}. \tag{5}$$

確實是一條雙曲線, 其漸近線為 $x^2-y^2=0$, 也就是 $x+y=0$ 和 $x-y=0$, 是兩條互相垂直的直線。

如果我們取 $2\beta = \pi - \alpha$, 則 $\cos 2\beta\tan\alpha + \sin 2\beta = 0$, 此時也會有

$$\sin 2\beta\tan\alpha - \cos 2\beta = \sin\alpha\tan\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

所以旋轉後的方程式就是

$$xy = \frac{\ell^2\sin\alpha}{4}. \tag{6}$$

其漸近線為 $xy=0$, 也就是兩條坐標軸 $x=0$ 和 $y=0$。這條方程式 (6) 就是我們熟知的反比公式。

如果回到未旋轉前的方程式 (4), 其漸近線為 $x^2\tan\alpha - 2xy - y^2\tan\alpha = 0$, 由倍角公式 $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$, 這相當於

$$x^2\tan\frac{\alpha}{2} + xy(\tan^2\frac{\alpha}{2} - 1) - y^2\tan\frac{\alpha}{2} = 0,$$

做因式分解為 $(x\tan\frac{\alpha}{2} - y)(x + y\tan\frac{\alpha}{2}) = 0$, 所以漸近線為 $x\tan\frac{\alpha}{2} - y = 0$ 和 $x + y\tan\frac{\alpha}{2} = 0$, 這在李永約的文章 [1] 和鍾文體的文章 [3] 中都已經提及。

我們順便來看看早期高中的圓錐曲線教學。

4. 早期高中的圓錐曲線教學

4.1. 用焦點與準線定義圓錐曲線

早期高中的圓錐曲線教學, 由焦點與準線的觀點切入。給定平面上一點 F, 及不通過此點的一條直線 L, 收集所有滿足「到點 F 的距離等於到 L 距離的 e 倍的所有點 P」, 構成以 F 爲焦點、L 爲準線、離心率爲 e 的圓錐曲線。爲推導此圓錐曲線的方程式, 假設 P 的坐標爲 (x,y)、F 的坐標爲 (h,k)、L 的方程式爲 $ax+by+c=0$, 則可以得到圖形的方程式爲

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=\frac{e|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

將兩邊平方後, 可以整理出一個二元二次方程式, 比較繁瑣。爲了方便, 我們可以調整坐標系統的架設, 就假設 P 的坐標爲 (x,y)、F 的坐標爲 $(h,0)$、L 的方程式爲 $x+c=0$ (因爲後續的需要, 取 $c\neq 0$), 則可以得到圖形比較簡化的方程式 $\sqrt{(x-h)^2+y^2}=e|x+c|$, 此時再平方、整理, 就可以得到比較清爽的式子

$$(1-e^2)x^2+y^2-(2h+2e^2c)x+(h^2-e^2c^2)=0.$$

當 $e=1$ 時, 如果我們取 $h=c$ (此時 F 不在 L 上), 方程式就是

$$y^2=4cx,$$

這是一條拋物線。當 $e\neq 1$ 時, 如果我們取 $h=-e^2c$ (此時 F 不在 L 上), 方程式就沒有 x 項, 同時 $h^2-e^2c^2=e^2(e^2-1)c^2$, 方程式可化簡爲

$$(1-e^2)x^2+y^2+e^2(e^2-1)c^2=0;$$

當 $0<e<1$ 時, 這就是橢圓

$$\frac{x^2}{e^2c^2}+\frac{y^2}{e^2(1-e^2)c^2}=1;$$

當 $e>1$ 時, 這就是雙曲線

$$\frac{x^2}{e^2c^2}-\frac{y^2}{e^2(e^2-1)c^2}=1.$$

4.2. 二元二次方程式的平移

早期高中的圓錐曲線教學, 也涉及將一般的二元二次方程式作坐標平移和旋轉, 那是怕萬一我們一開始沒辦法架出好的坐標系統, 如前面的等差角問題, 那要如何處理。假設我們手邊有的方程式是一般的

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \tag{7}$$

如同第 3 節的作法, 我們可以先做平移動作, 試著移除一次項, 此時將 x 換成 $x-h$、y 換成 $y-k$, 就會有

$$a(x-h)^2+b(x-h)(y-k)+c(y-k)^2+d(x-h)+e(y-k)+f=0.$$

也就是

$$\begin{aligned}ax^2+bxy+cy^2+(d-2ah-bk)x+(e-bh-2ck)y&\\+(ah^2+bhk+ck^2-dh-ek+f)=0,&\end{aligned}$$

為了消去一次項係數, 要取適當的 (h,k) 滿足下面的二元一次聯立方程式

$$\begin{cases}2ah+bk=d,\\ bh+2ck=e.\end{cases}\tag{8}$$

當 $b^2\neq 4ac$ 時可以解到唯一的 (h,k), 代入前式就會得到比較清爽的式子

$$ax^2+bxy+cy^2+f'=0.\tag{9}$$

等一下再來討論旋轉, 去掉 xy 項的事情。當 $b^2=4ac$ 時, 聯立方程式 (8) 可能無解, 這時我們就直接用旋轉的方法先行處理。

4.3. 二元二次方程式的旋轉

不管是處理式 (9), 還是乾脆就直接處理式 (7), 如同第 3 節的方法, 我們可以將圖形逆時針方向旋轉角度 β; 這時候只要將方程式 (7) 中的 x 換成 $x\cos\beta+y\sin\beta$、y 換成 $-x\sin\beta+y\cos\beta$, 就會得到旋轉後的方程式:

$$\begin{aligned}a(x\cos\beta+y\sin\beta)^2+b(x\cos\beta+y\sin\beta)(-x\sin\beta+y\cos\beta)+c(-x\sin\beta+y\cos\beta)^2&\\+d(x\cos\beta+y\sin\beta)+e(-x\sin\beta+y\cos\beta)+f=0,&\end{aligned}$$

如果這個方程式整理之後會變成 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 則會有

$$\begin{aligned}A&=a\cos^2\beta-b\sin\beta\cos\beta+c\sin^2\beta,\\ B&=2a\sin\beta\cos\beta+b(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-2c\sin\beta\cos\beta\\ &=(a-c)\sin 2\beta+b\cos 2\beta,\\ C&=a\sin^2\beta+b\sin\beta\cos\beta+c\cos^2\beta,\end{aligned}$$

我們的目標是要使得 $B=0$, 所以要取得角度滿足

$$\tan 2\beta=\frac{b}{c-a},$$

其中當 $a=c$ 時, 解讀爲 $2\beta=\frac{\pi}{2}$。由 $\tan 2\beta$ 就可求得 $\cos 2\beta$, 再經由半角公式求得 $\sin\beta$ 和 $\cos\beta$ (不妨假設 $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$), 代入前面就可以整理出沒有 xy 項的方程式。但是計算這些係數卻是有點麻煩, 有一種處理的方式如下:

$$\begin{aligned} A+C &= a(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+c(\cos^2\beta+\sin^2\beta)=a+c, \qquad (10)\\ A-C &= (a-c)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-2b\sin\beta\cos\beta\\ &= (a-c)\cos 2\beta-b\sin 2\beta,\\ (A-C)^2+B^2 &= (a-c)^2(\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta)+b^2(\sin^2\beta+\cos^2 2\beta)\\ &= (a-c)^2+b^2. \qquad (11)\end{aligned}$$

將式 (11) 減去式 (10) 的平方, 得到等價於式 (11) 的式子

$$B^2-4AC=b^2-4ac. \qquad (12)$$

由已知的 a、b、c 及希望 $B=0$, 利用式 (10) 及式 (11) (或是式 (12) 也可以) 就可以解出 A、C, 其中由 $(A-C)^2$ 求 $A-C$ 有兩種可能, 取哪一種都可以, 只是代表旋轉角度不同。

要留意的是, 有些時候會是退化情況：無解、一直線、兩相交直線。

我們也來看看圓錐曲線的起源。由數學史的資料可以看出來, 一開始的發展都是把坐標系統取好, 讓圓錐曲線的方程式簡單好用。

5. 圓錐曲線溯源

談論圓錐曲線, 現在公認的起源是, 古希臘數學家、天文學家阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線論》, 其中廣泛而有系統探討這些曲線, 被視爲是圓錐曲線的起源。而談論坐標幾何, 一般推崇法國哲學家、數學家、科學家笛卡兒 (René Descartes) 於 1637 年, 在《方法論》的附錄「幾何」中提出的解析幾何的基本方法, 他以哲學觀點寫成的這部著作, 爲後來牛頓和萊布尼茨各自提出的微積分提供了基礎。

追溯根源, 有人認爲用坐標系研究幾何的鼻祖是古希臘數學家梅內克繆斯 (Menaechmus), 他在解答「倍立方問題」時, 使用的表示法與現在的坐標系十分相似, 在此同時他也提出了圓錐曲線的想法。

傳說中, 倍立方問題的來源, 可以追溯到公元前 429 年。當時的一場瘟疫襲擊了希臘提洛島 (Delos), 造成四分之一的人口死亡。島民們去神廟請示阿波羅的旨意, 神諭說: 要想遏止瘟疫, 得將阿波羅神殿中那正立方的祭壇加大一倍。人們便把每邊增長一倍, 結果體積當然就變成了 8 倍, 瘟疫依舊蔓延。接著人們又試著把體積改成原來的2倍, 但形狀卻變爲一個長方體。人們在萬般無奈的情況下, 只好到雅典去求救於當時著名的學者柏拉圖。根據柏拉圖的經驗, 他覺

得利用尺規作圖可以作一個正方形, 使它的面積等於已知正方形的 2 倍, 可是後來他們嘗試了各種方法都不能成功。這個問題和三等分角、化圓爲方, 合稱爲尺規作圖三大難題。

尺規作圖不能解決倍立方問題, 並不表示沒有其他的解決方法。事實上, 在我看來, 利用尺規作圖解題, 只是柏拉圖及其後續數學家畫地自限的一種方法。希波克拉底 (Hippocrates) 就有跳脫緊箍咒的想法, 他證明了, 如果可以求得符合 $a/x=x/y=y/2a$ 性質的曲線, 就可以解決倍立方問題。這是因爲 $x^2=ay$ 及 $y^2=2ax$ 而有 $x^4=a^2y^2=2a^3x$, 也就是 $x^3=2a^3$。所以求得符合 $y^2=\ell x$ 這種性質的曲線成爲關鍵。下面就是梅內克繆斯求得這種曲線的方法, 請參見 Merzbach 和 Boyer 數學史的書 [4, 第84∼85頁]。

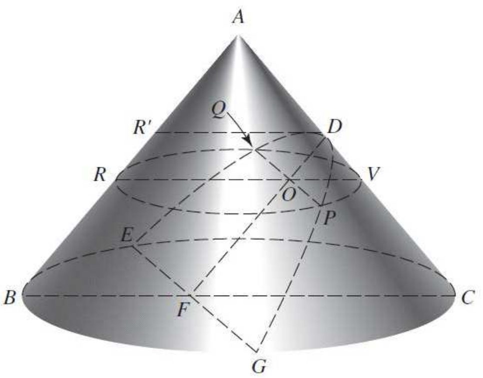

圖4：頂角爲直角的直圓錐。

圖 4 是一個直圓錐 ABC, 其頂角爲直角 (也就是生成角爲 45 度), 考慮與 AC 垂直於點 D 的一個平面, 此平面將圓錐截出一條曲線 EDG, 它對稱於 DF。過曲線上一點 P, 作一個水平面將圓錐截出一個圓 PVR, 這個圓同時交曲線於另外一點 Q, 因爲對稱的關係, PQ 和 RV 垂直並相交於 DF 上的一點 O, 此時會有 $\overline{OP}^2=\overline{QO}\cdot\overline{OP}=\overline{RO}\cdot\overline{OV}$。因爲三角形 $AR'D$ 與 ABC 相似, 所以 $\frac{\overline{R'D}}{\overline{AR'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 而有 $\overline{R'D}=\frac{\overline{AR'}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}$。因爲三角形 DOV 與 ABC 相似, 所以 $\frac{\overline{OV}}{\overline{DO}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 而有 $\overline{OV}=\frac{\overline{DO}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}$。綜合以上等式而有 $\overline{OP}^2=\overline{RO}\cdot\overline{OV}=\overline{R'D}\cdot\overline{OV}=\frac{\overline{AR'}\cdot\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}\cdot\overline{DO}$, 其中 $\overline{OP}$ 可以視爲前面的變數 y、及 $\overline{DO}$ 視爲變數 x、而 $\frac{\overline{AR'}\cdot\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$ 視爲常數 ℓ (可調整 D 的位置來調整其大小)。所以求得符合 $y^2=\ell x$ 這種性質的曲線。這就是現在我們熟知的拋物線。

如果將上述的直圓錐 ABC 的頂角取爲銳角 (或是鈍角), 利用類似的推導就會產生符合 $y^2=\ell x-\frac{b^2x^2}{a^2}$ (或是 $y^2=\ell x+\frac{b^2x^2}{a^2}$) 這種性質的曲線。這就是我們現在熟知的橢圓 (或是雙曲線)。

總結來說, 梅內克繆斯不但有坐標系統的最早想法, 也是第一次提出圓錐曲線概念的人。

憑良心而論, 梅內克繆斯其實已經將圓錐曲線重要的性質點出來。舉例來說, 前面在推導

拋物線時, 用到 $\overline{RO}=\overline{R'D}$, 那是因爲頂角是直角而有 DF 平行於 AB, 而知道 $R'ROD$ 是平行四邊形; 當阿波羅尼奧斯允許直圓錐的頂角是任意角 θ 時, 如果把「考慮與 AC 垂直於 D 的一平面」改爲「考慮與 AC 交於 D 而夾角爲 θ 的一平面」, 則一樣也會有 $R'ROD$ 成平行四邊形, 遂得到完全一樣的公式。在這樣的看法下, 梅內克繆斯其實已經主要完成了圓錐曲線的最初定義。

有一點我還沒明白的是, 梅內克繆斯推導的圓錐曲線是用二次方程描述的, 說明並不難。但是不知爲何, 後來的人教導圓錐曲線是由焦點、準線定義開始, 既不直觀 (看不出圓錐在何處), 推導標準式也不會特別容易。

不管歷史真相如何, 阿波羅尼奧斯大大推廣了梅內克繆斯的想法。他在《論切觸》中的解題方式, 用現代的觀點來說是一維的解析幾何, 用直線來求得一點與其它點之間的比例; 他在《圓錐曲線論》中用到的方法則與二維的解析幾何十分相似。

研究數學宜讀數學史, 讀數學史讓我們明白, 成就一個數學觀念, 常常不只是某一個特定人的功勞, 而是經過幾個世代, 一些人接力發揚而成就此觀念。有這樣的理解, 就會知道, 研究數學重要的是讓一個想法能流傳下去, 不是在爭取「發明權」、「專利」。現代的一個典範是俄羅斯數學家佩雷爾曼 (Grigori Perelman), 他在 2006 年公布了龐加萊猜想 (Poincaré Conjecture) 的證明後, 就隱身俄羅斯鄉下, 不去爭取證明的光環; 當年國際數學聯盟頒給他菲爾茲獎, 他並未與會領獎; 後來克雷數學研究所頒給他一百萬美元獎金, 他也拒絕領獎, 理由是克雷所的決定「不公平」, 因爲前面還有 Hamilton 等的一些工作, 才能引導他到最後目的地; 相較於一些急於宣稱第一個完整證明的人, 他的淡然精神令人欽佩。

前述這些坐標幾何的原型, 的確和現在我們使用的坐標系統有差距, 其最大重點是, 它們都沒有包含負號的概念, 不能完整地和代數結合。笛卡爾的想法才真正融入負號的思想, 完整地建立了坐標系統。

参考文獻

1. 李永約。等角差線 — 漸近線及其性質。數學傳播季刊, 45(4), 34-42, 2021。
2. 教育部。十二年國民基本教育課程綱要、國民中小學暨普通型高級中等學校、數學領域。台北市 : 教育部, 2018 年 6 月。
3. 鍾文體。等角差線實爲雙曲線。數學傳播季刊, 46(1), 84-87, 2022。
4. U. T. Merzbach and C. B. Boyer, *A History of Mathematics* (Third ed.), John Wiley & Sons, Inc., 2011.

—本文作者爲臺灣大學數學系名譽教授—