

# Emmy Noether 與 Richard Courant

康明昌

## 1. Göttingen 大學的數學教授

1895 年 David Hilbert (1862~1943) 受聘到 Göttingen 大學, Felix Klein (1849~1925) 的夢想, 在 Göttingen 打造世界一流的數學中心, 才逐步具體化 [21]。

1895 年~1933 年是 Göttingen 數學的黃金年代。

1922 年 Göttingen 大學的數學系, 正式成立 [24, p.83]。在此之前, Göttingen 大學沒有數學系, 只有四個數學教授, 他們與天文學家、理論物理學者都隸屬哲學學院, 這些人與哲學家、語言學者、歷史學者、古典學者共處, 沒有專供數學家使用的行政經費 (只有數學圖書館專用的運作經費)。

從 1904 年開始 Göttingen 大學有四位數學教授: Klein, Hilbert, Hermann Minkowski (1864~1909), Carl Runge (1856~1927) [21, p.15]。

1909 年 Minkowski 在盲腸手術之後去世, 他的職位由 Edmund Landau (1877~1938) 接替。

Landau 出身於柏林的富裕猶太人家庭, 從大學時代到 1909 年受聘為 Göttingen 大學教授, 他都在柏林大學工作、學習。Landau 在解析數論 (尤其是 Dirichlet series) 有傑出的研究成果。

Klein 晚年健康狀態不佳, 因此在 1913 年提前退休 (註1)。Klein 的職位由 Constantin Carathéodory (1873~1950) 繼任。

Carathéodory 是個土耳其 (Ottoman Empire) 統治下的希臘人, 他是 Minkowski 的學生 (1904 年博士), 次年在 Göttingen 做 Habilitation。在擔任 Göttingen 大學教授之前, 他曾任 Bonn 大學、Technical Univ. of Hanover、Breslau 大學教授。他擔任 Göttingen 大學教授五年 (1913 年~1918 年) 後, 轉任柏林大學教授。一年後離開柏林大學, 接受希臘政府的邀約到希臘工作。因為希臘政局不穩, 他又回到德國, 在 Munich 大學任教 (註2)。

Carathéodory 在 1918 年離開 Göttingen, 他的職位由 Erich Hecke (1887~1947) 繼任。Hecke 是 Hilbert 的學生 (1910 年博士), 1915 年擔任瑞士 Basel 大學教授, 1918 年才回到 Göttingen 大學。一年後 Hecke 轉到成立不久的 Hamburg 大學。

Hecke 是解析數論的權威。他在 Hamburg 大學的學生 Heinrich Behnke 後來在 Münster 大學建立德國的多複變團隊 [19, p.6, p.13]。Hecke 與 Behnke 是納粹時代支撐分析研究的主要人物, 並且他們沒有與納粹份子合流。

Hecke 在 Göttingen 離職之後, 他的職位由 Richard Courant (1888~1972) 繼任。Courant 也是 Hilbert 的學生 (1910 年博士), 他的妻子 Nina Runge 是 Carl Runge 的小女兒。

與 Hecke 與 Courant 同一時代 Hilbert 眾多的學生之中, Courant 並不是最傑出的。由於機緣湊巧加上 Courant 是個第一流的行政人才, 才使 Courant 成爲 Göttingen 數學的組織者, 其後還在美國開創 Courant Institute。

因此, 在 1920 年, Göttingen 大學的數學教授共有 Hilbert, Runge, Landau, Courant 四位, 第二代接班的態勢已呼之欲出 (註3)。

## 2. Courant (1888~1972)

Richard Courant 來自西里西亞地區 Breslau 的猶太人家庭。西里西亞 (Silesia) 自十九世紀已經成爲普魯士的領土, 這地區位於今日波蘭的西南部, 二戰之後劃歸波蘭, Breslau 改名爲 Wrocław。

1907 年 10 月中旬 Courant 到 Göttingen 求學, 他參加 Hilbert 與 Minkowski 主持的數學物理研討會。Hilbert 將是他的博士論文 (1910 年) 與 Habilitationsschrift (1912 年) 的指導教授, 主題是 Dirichlet's principle [24, p.28~p.31]。在 Courant 日後的學術生涯, 他不斷的回到 Dirichlet's principle 這個指導主題 [14, p.81]。

做完 Habilitation 之後, Courant 就擔任 Göttingen 大學講師, 直到第一次世界大戰爆發應召入伍 (1914 年)。

服役期間他認識出版商 Ferdinand Springer (1881~1965) 與他的姪子 Julius Springer (1882~1966), 他們是 Springer 出版公司的繼承人。Ferdinand 掌管科學方面 (數學、物理、化學、生物、醫學) 的業務, Julius 掌管工程方面。

Courant 與他們一見如故。Springer 出版社想出版數學方面的書籍, Courant 想到 Hurwitz 與 Hilbert 的講義; 幾年之後這些構想成爲現實。原先替 Klein 出版《*Math. Ann.*》的萊比錫出版社 B. G. Teubner 在 1920 年中止契約, 《*Math. Ann.*》改成 Springer 出版社出版。1921 年 Springer 出版社的《黃皮書 (*Grundehren series*)》開始出版。

1918 年年底戰爭結束, Courant 復員回 Göttingen 大學擔任講師。

Courant 十四歲時家道中落, 憑著自學與擔任家庭教師, 他不僅維持自身溫飽, 還完成中學學業, 有時還能接濟親人。

Courant 的第一任妻子 Nelly Neumann 是他的家教學生之一, Nelly 是 Breslau 大學

博士 (1909 年)。他們在 1912 年結婚, 1916 年離婚。Nelly Newmann 在 1942 年死於納粹關押猶太人的集中營。

Courant 與 Nina Runge 在 1919 年 1 月結婚。

1919 年 Hecke 離開 Göttingen 大學, 赴漢堡大學就職。Hilbert 與 Klein 想找 Courant 填補這個空缺。可是德國教育部有一個不成文的傳統, 不能從原先學校的講師或副教授昇任教授。於是 Hilbert 與 Klein 想到一個辦法。Münster 大學的 Wilhelm Killing (1843~1923, Killing 見 [18, p.18]) 即將退休。他們安排 Courant 到 Münster 接任。

1920 年 Courant 離開 Münster 大學, 回 Göttingen 大學擔任教授。同一時間, 物理系的 Peter Debye (1884~1966) 轉赴瑞士的 ETH 任教, 他的職位聘請 Max Born (1882~1970, 理論物理) 與 James Franck (1882~1964, 實驗物理)。Born 是 Runge 的學生 (見 [21, p.15])。Franck 與 Born 分別是諾貝爾物理獎 1925 年與 1954 年的得主。

Courant 回 Göttingen 主持數學物理與 PDE 的研討會。他的學生有: Kurt Friedrichs (1901~1983), Hans Lewy (1904~1988), William Feller (1906~1970), Franz Rellich (1906~1955), Fritz John (1910~1994)。其中以 Friedrichs 與 Lewy 表現最傑出, Friedrichs 與 Lewy 在 1930 年代移民美國, Friedrichs 是 1976 年美國 National Medal of Science 的得主, Lewy 是 1984/85 年 Wolf 獎的得主 (與 Kodaira 共同獲獎, 見 [19, p.4, p.10])。Feller 日後在機率論的成就是自己闖出來的, 受 Courant 的影響不大。

### 3. Emmy Noether (1882~1935)

Göttingen 數學第二個黃金年代 (1922 年~1933 年) 的兩個亮點, 一個是 Hilbert-Courant 領導的數學物理研討會, 另一個是 Emmy Noether 領導的抽象代數運動。

Emmy Noether 來自 Erlangen。她的父親 Max Noether (1844~1915) 是 Erlangen 大學的教授, 代數曲面的權威, 年輕時是 Clebsch 的追隨者 [21, p.4]。她的弟弟 Fritz Noether (1884~1941) 是個應用數學學者, Breslau 大學教授。1933 年 Nazis (納粹黨人) 排猶狂潮中, Emmy Noether 移民美國, Fritz Noether 移民俄國。結果 Fritz Noether 在 1941 年以 (虛構的?) 間諜罪被槍決。

Emmy Noether 是 Erlangen 大學的博士 (1907 年), 指導教授是她父親的同事 Paul Gordan (1837~1912)。Gordan 有「不變量之王」之稱, 擅長冗長的計算。當 Hilbert 用「存在性」的方法解決當時不變量研究的大問題時, Gordan 公開反對: 『這是神學(theology)! 不是數學。』[23]。

Gordan 在 1910 年退休, 他的繼任者 Erhard Schmidt (1910 年) 與 Ernst Fischer (1911 年~1920 年) 在和 Emmy 討論數學時, 給她新的觀點。尤其是 Fischer; 從他那裏, 她獲得許多抽象代數的啟示 (註 4)。

在衆多數學前輩中, 與 Noether 思想 (抽象的, 概念性的) 最接近的是 Richard Dedekind (1831~1916)。Noether 是 Dedekind 全集的主編。當有人表揚 Noether 某一定理時, 她總喜歡說『Es steht alles schon bei Dedekind (All of this is already in Dedekind)』。Dedekind 是 Gauss 的學生, 見 [21, p.3, p.5]。

1913 年 Emmy 陪同她父親到 Göttingen 拜訪 Klein, 因為《*Math. Ann.*》委託 Max Noether 寫一篇紀念 Gordan 的文章。Klein 對於 Emmy 數學知識的廣度印象十分深刻。

1915 年 Emmy Noether 獲得 Hilbert 與 Klein 的邀請到 Göttingen 大學做博士後研究。Hilbert 這時正在用 Einstein 的廣義相對論探索場論的問題, 他需要一個不變量的專家協助他。

Hilbert 與 Klein 支持她做 Habilitation, 可是卻遭到哲學學院內部人文學者與歷史學者的反對:

『女性通過 Habilitation, 她就可以進入大學當講師, 進而昇等為副教授、教授。這是被認可的嗎? 如果我們的士兵打完仗 (一次大戰) 回到學校, 竟然發現他們必須在女性腳底下受教, 這讓他們情何以堪?』

Hilbert 當場予以反擊, 他說:『先生們, 我不贊同把 Habilitation 候選人的性別做為反對的理由。這個議場畢竟不是澡堂!』[23, p.143]。

雙方僵持不下, 只好把案子交由德國教育部 (文化部) 裁決。教育部也不願開個先例, 妥協的結果是, Noether 想要開設的課程必須掛在 Hilbert 的名下。例如, 1916/17 冬季學期的選課單就有一門如下的課程:

Mathematical Physics Seminar: Prof. Hilbert with the assistance of Dr. E. Noether, no tuition.

1918 年 7 月 Klein 在 Göttingen Gesellschaft (Royal Society of Göttingen) 宣讀 Emmy Noether 一篇論文 [33, p.67, p.83], [13, p.23]。這是場物理 (field physics) 方面的研究 (對稱性與守恆律)。

從 1907 年 Noether 完成博士論文, 經過 12 年她才得以用這篇對稱性與守恆律的論文做 Habilitation, 可以體會二十世紀初期對女性根深蒂固的成見。如果不是一次大戰守舊體制略為鬆動, Noether 還不一定能在 1919 年做 Habilitation。

1921 年她出版論文《*Idealtheorie in Ringbereichen*》, 她把許多經典的定理從多項式環推廣到 Noether 環: 一個交換環叫做 Noether 環, 如果它的每個理想 (ideal) 都是有限生成的。

1922 年她成為 Göttingen 大學編制外的副教授 (不支薪)。直到第二年, 德國經歷了史無前例的通貨膨脹, 她才得以支領微薄的薪資。

以 1923 年德國馬克對美元的匯率來看, 1923 年 7 月 1 日是 160,000 : 1, 10 月 1 日昇

高為 242,000,000 : 1, 到了 11 月 20 日就飛昇到 4,200,000,000 : 1 [24, p.97]。德國政府宣布國家進入緊急狀態, 停止使用舊馬克, 發行新的貨幣 (Rentenmark), 才遏止這次可怕的貨幣貶值。

這幾年的通貨膨脹使 Klein 透過 Göttingen Association 募捐到的錢化為烏有 [21, p.14]。

#### 4. 抽象代數運動

Emmy Noether 其實很少寫論文。她在抽象代數的創見有許多出現在她上課的內容、與他人討論的對話或她的學生、朋友出版的論文與書籍。最有名的是 van der Waerden 的書 “*Moderne Algebra*” (1930/1931)。這本書把抽象代數的理念、方法與應用, 傳播到世界各地。

抽象代數的精神是以概念式的思維取代冗長的計算。例如, 在早期的代數拓樸, 數學家努力要計算 Betti numbers,  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , Noether 提議用同調群  $H_q(X, \mathbb{Z})$  代替 Betti number  $b_q$ , 因為  $b_q = \dim_{\mathbb{Q}}(H_q(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ ; 並且, 當  $f : X \rightarrow Y$  是拓樸空間  $X, Y$  的連續函數,  $f$  自然的誘導同態映射  $f_* : H_q(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(Y, \mathbb{Z})$ , 蘊含更多訊息 [33, p.57]。

有一些年輕人圍繞在 Noether 身邊聽取她的預言一般的論斷 (insights), (例如, 採用同調群取代 Betti 數)。Göttingen 大學的人把他們稱為 Noether 的孩子們 (Noether's boys)。

這些人之中, Levitzki, Deuring, Chiung-Tze Tsen (曾炯之), Witt 都是 Noether 的學生。Krull, van der Waerden, Aleksandrov 不是 Noether 的學生, 他們只是 Göttingen 大學的訪客, 同時是 Noether 研討會的成員。Hasse 與 Artin 已是成名人物, 與 Noether 聲氣相通, 變成好朋友。Richard Brauer 根本沒有到過 Göttingen, 他與 Noether 透過通信討論數學 [33, p.56], [27]。

Wolfgang Krull (1899~1971) 在 1921/1922 到 Göttingen 聽了兩學期 Noether 的課, 他是交換代數的開創者之一。他的書 《*Idealtheorie*》(Springer, Berlin, 1935) 可以說是第一本交換代數的專著。二十世紀初期, 與交換代數有關的數學統稱為 ideal theory。

Bartel L. van der Waerden (1903~1996) 來自荷蘭, 他參加 Noether 的研討會是想尋求一些工具, 可以把代數幾何建立在嚴謹的基礎 (註5)。他找到的工具就是 Noether 的抽象代數。

從 1923 年夏天開始, 俄國數學家 P.S. Aleksandrov (1896~1982) 每年總會帶幾個俄國人 (如, Urysohn, Kolmogorov, Pontryagin, Gelfond) 到 Göttingen 訪問 [24, p.106]。他們是 Noether 研討會的座上客, 他們也介紹自己的研究成果 [17, p.22]。Göttingen 的人可以看到 Schnirelman 光著腳在 Göttingen 街道行走。英文作者習慣把 Aleksandrov 寫成 Alexandroff。

就在 Göttingen, Aleksandrov 認識另一個拓樸學者 Heinz Hopf (1894~1971)。Hopf 與 Courant 來自 Breslau 同一間中學, 但是時間不同 (註6)。Hopf 是柏林大學 Erhard Schmidt (1876~1959) 的學生, 到 Göttingen 大學做博士後研究。Hopf 與 Aleksandrov 都深受 Noether 影響, Noether 建議他們, 在研究拓樸學用同調群代替 Betti numbers。

Hopf 與 Aleksandrov 合寫一本書《Topology, Part I, (1935)》。這本書的 Part II 始終沒有出版。

Noether 的學生 J. Levitzki (1904~1956) 來自巴勒斯坦 (Palestine), 曾炯之是中國人。他們做完博士後研究就回到本國, Levitzki 有一個學生 S. A. Amitsur (1921~1994, 1950 年 Hebrew 大學博士) 是傑出的代數學者。曾炯之的研究工作, Tsen's 定理 (註7) 與  $C_i$ -fields, 在代數幾何極為重要。曾炯之回中國後任教浙江大學、北洋大學、西北聯合大學, 1940 年在西昌 (西康地區) 胃潰瘍去世, 詳見 [8]。

1927 年之前 Noether 的研究興趣集中在交換代數, 例如 Lasker-Noether 定理 (註8)。1927 年之後她與 Hasse, Brauer 頻繁通信, 她的興趣逐漸轉到非交換有限維代數。

## 5. Noether 與單環

在交換環, Noether 用 ascending chain condition 整合許多重要的定理。在不可交換環, 她用有限單代數做為理解表示論 (Wedderburn 定理) 與數論 (Norm residue symbols) 的樞紐。她說,『Norm residue symbols 只不過是循環代數。』[33, p.52], 參看 [13]。

單代數的理論基礎是 Noether 與 Richard Brauer 獨立建立的。他們相互承認對方的貢獻。Brauer 這時是 Königsberg 大學的講師 [33, p.50]。

Skolem-Noether 定理與 double centralizers 定理 [10], [12] 出現在 Noether 上課的講義 (不同的年代!) [33, p.49]。Noether 習慣一邊上課, 一邊思考她想要證明的定理 (定理內容、形式及其證明)。

Hermann Weyl 任教於瑞士蘇黎世的 ETH, 1913 年~1930 年, 1930 年 Hilbert 退休, 他才回 Göttingen 大學繼承 Hilbert 的職位。Weyl 說:『在我任教 Göttingen 大學的 1930 年~1933 年, Noether 不管是研究成果的豐碩, 或是(對學生或訪問學者) 影響力的深邃, 始終是系裡學術活動的重心』。[33, p.53]

**定義1:** 環  $A(+, \cdot)$  叫做單環 (simple ring), 如果它滿足以下條件: 若  $I$  是  $A$  的雙邊理想集, 則  $I = A$  或者  $I = \{0\}$ 。

若  $K$  是體, 環  $A(+, \times)$  叫做係數在  $K$  的代數 (algebra over  $K$ ), 如果  $A$  除了加法 (+) 與乘法 ( $\times$ ) 之外,  $A$  還有向量空間的係數積:  $K \times A \rightarrow A, (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$  滿足

$$\alpha \cdot (x \times y) = (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y), \quad \forall \alpha \in K, \forall x, y \in A.$$

爲了簡便起見，我們把  $A$  的乘法  $x \times y$  也寫成  $x \cdot y$ ，但是不要把  $x \cdot y$  與係數積混淆。

若  $K$  是體，係數在  $K$  的代數  $A$  叫做有限維代數，如果  $\dim_K A < \infty$ 。  $A$  叫做單代數 (simple algebra)，如果  $A(+, \times)$  是單環，也就是，暫時把  $K \times A \rightarrow A$  的係數積忘掉時， $A$  是單環。

**定義2:** 設  $K$  是體，定義於  $K$  的中心單代數  $A$  (a central simple  $K$ -algebra  $A$ ) 是係數在  $K$  的有限維單代數，滿足  $K \simeq K \cdot 1 = \{\alpha \cdot 1 : \alpha \in K\} = Z(A)$ ，其中  $Z(A) := \{z \in A : z \times x = x \times z, \forall x \in A\}$  是  $A$  的中心 (center)。一個等價的定義方法是： $A$  是定義於  $K$  的中心單代數  $\Leftrightarrow$  存在有限可離擴張體  $L/K$  滿足  $A \otimes_K L \simeq M_n(L)$ ，其中  $M_n(L)$  是所有的係數在  $L$  的  $n \times n$  矩陣 [10], [12]。

**定義3:** 相似等價 (similarity equivalence)

令  $a(K)$  是所有的定義於  $K$  的中心單代數  $A, B, \dots$ 。我們在  $a(K)$  引進「相似等價關係」：若  $A, B \in a(K)$ ，定義  $A \sim B$  若且唯若存在正整數  $m_1$  與  $m_2$  使得  $A \otimes_K M_{m_1}(K) \simeq B \otimes_K M_{m_2}(K)$ 。若  $A \in a(K)$ ，令  $[A]$  代表包含  $A$  的等價類 (equivalence class)。

若  $A$  是中心單代數，則  $A \simeq M_n(D)$ ，其中  $D$  是可除環， $n$  是某個正整數 [Dr]。若  $A$  與  $B$  是中心單代數且  $A \simeq M_{n_1}(D_1)$ ， $B \simeq M_{n_2}(D_2)$ ，則  $A \sim B$  的充分必要條件是  $D_1 \simeq D_2$ 。

我們在  $a(K)/\sim$  定義運算  $+$  如下：若  $A, B \in a(K)$ ，定義  $[A] + [B] := [A \otimes_K B]$ 。

$(a(K)/\sim, +)$  是個交換群，記爲  $Br(K) := a(K)/\sim$ ，the Brauer group of the field  $K$ 。

若  $K \subset L$  是體的擴張，則存在自然同態  $p : Br(K) \rightarrow Br(L)$ 。定義  $Br(L/K) := \text{Kernel}\{Br(K) \xrightarrow{p} Br(L)\}$ 。

**定義4:** 設  $L/K$  是有限 Galois 擴張，且  $G := \text{Gal}(L/K)$ 。令  $C^n(G, L^\times)$  是所有的函數  $f : G \times \dots \times G \rightarrow L^\times$  (定義域有  $n$  個  $G$ )。

定義函數  $d_n : C^n(G, L^\times) \rightarrow C^{n+1}(G, L^\times)$  如下：

$$\begin{aligned} d_n(f)(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) &:= \sigma_0 \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \cdot f(\sigma_0\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^{-1} \\ &\quad \cdot f(\sigma_0, \sigma_1\sigma_2, \dots, \sigma_n) \cdot f(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \dots, \sigma_n)^{-1} \dots \\ &\quad \cdot f(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}\sigma_n)^{(-1)^n} \cdot f(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})^{(-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

可證  $d_{n+1} \cdot d_n = 0$ 。

定義  $Z^n(G, L^\times) = \text{Kernel } d_n$ ， $B^n(G, L^\times) = \{d_{n-1}(f) : f \in C^{n-1}(G, L^\times)\}$ 。則  $B^n(G, L^\times) \subset$

$Z^n(G, L^\times)$ 。同態  $Z^n(G, L^\times) \rightarrow \frac{Z^n(G, L^\times)}{B^n(G, L^\times)}$  記為  $f \mapsto [f]$ 。定義  $H^2(G, L^\times) := \frac{Z^2(G, L^\times)}{B^2(G, L^\times)}$ 。

例子: 函數  $f : G \times G \rightarrow L^\times$ , 則  $f \in Z^2(G, K^\times)$  如果

$$\sigma_0 f(\sigma_1, \sigma_2) \cdot f(\sigma_0 \sigma_1, \sigma_2)^{-1} \cdot f(\sigma_0, \sigma_1 \sigma_2) \cdot f(\sigma_0, \sigma_1)^{-1} = 1, \quad \forall \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in G.$$

兩個函數  $f_1, f_2 : G \times G \rightarrow L^\times$  滿足  $[f_1] = [f_2]$ , i.e.  $f_2 \cdot f_1^{-1} \in B^2(G, L^\times)$ , 如果存在函數  $g : G \rightarrow L^\times$  滿足

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2) \cdot f_1(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} = \sigma_1 g(\sigma_2) \cdot g(\sigma_1 \sigma_2)^{-1} = 1, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in G.$$

定義5: 交叉乘積 (crossed product)

若  $L/K$  是有限 Galois 擴張且  $G := \text{Gal}(L/K)$ ,  $f \in Z^2(G, L^\times)$ , 定義交叉乘積  $A(L/K, G, f)$  如下:

$$\begin{aligned} A(L/K, G, f) &:= \bigoplus_{\sigma \in G} L \cdot u_\sigma, \\ u_\sigma u_\tau &= f(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau}, \quad \forall \sigma, \tau \in G, \\ u_\sigma \cdot x &= \sigma(x) \cdot u_\sigma, \quad \forall \sigma \in G, x \in L. \end{aligned}$$

可證  $A(L/K, G, f)$  是定義於  $K$  的中心單代數, 其等價類記為  $[A(L/K, G, f)]$ 。

定理1: 若  $L/K$  是有限 Galois 擴張且  $G := \text{Gal}(L/K)$ , 則

$$H^2(G, L^\times) \rightarrow \text{Br}(L/K), \quad [f] \rightarrow [A(L/K, G, f)]$$

是同構映射。

類似的, 若  $K_{\text{sep}}$  是  $K$  的可離閉包 (separable closure), 則

$$H^2(\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K), K_{\text{sep}}^\times) \rightarrow \text{Br}(K), \quad [f] \rightarrow [A(L/K, G, f)],$$

也是同構映射, 其中  $H^2(\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K), K_{\text{sep}}^\times) := \bigcup H^2(\text{Gal}(L/K), L^\times)$ , 其中  $L/K$  跑遍  $K$  的所有有限 Galois 擴張。

定義6: 循環代數 (cyclic algebra)

交叉乘積  $A(L/K, G, f)$  的特殊情形是  $G = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}\}$  是循環群。這時叫做循環代數, 記為

$$(L/K, \langle \sigma \rangle, z) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n-1} Lu^i, \quad u^n = z \in K^\times, \quad u \cdot x = \sigma(x), \quad \forall x \in L.$$

有名的 Brauer-Hasse-Noether 定理就是以下定理 [27]。



定理2: 若  $K$  是代數體,

- (1) 則任意定義於  $K$  的中心單代數必為循環代數。  
 (2) (Hasse) 以下是交換群的正合序列 (short exact sequence of abelian groups),

$$0 \rightarrow Br(K) \rightarrow \bigoplus Br(K_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

$$\text{其中 } Br(K_v) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{如果 } v \text{ 是有限點 (finite place),} \\ \frac{1}{2}\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{如果 } K_v \simeq \mathbb{R}, \\ 0, & \text{如果 } K_v \simeq \mathbb{C}. \end{cases}$$

定義7: Noether 問題

Noether 問題是 Lüroth 問題的特殊情形。以下以實例說明。

設  $G = \langle \sigma \rangle$  是階數為  $n$  的循環群,  $K$  是任意體, 有理函數體  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是多項式環  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  的商體。  $G$  作用於  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  如下:

$$\sigma : x_1 \mapsto x_2 \mapsto \dots \mapsto x_n \mapsto x_1, \quad a \mapsto a, \quad \forall a \in K.$$

考慮不變體  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)^G := \{f \in K(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sigma(f) = f\}$ 。

問題:  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)^G$  是不是有理函數體? 換句話說, 是不是存在  $n$  個有理函數  $y_1, y_2, \dots, y_n \in K(x_1, x_2, \dots, x_n)^G$  使得  $K(x_1, x_2, \dots, x_n)^G = K(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ?

以上問題在  $n \leq 7$  或  $n = 11$  很早就證明 (請讀者自己試試)。但是當  $n = 47$ ,  $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_{47})^G$  不是有理函數體 (Swan, 1969)。參看 Swan 在 [31] 的論文。

## 6. 數學大樓落成

Peter D. Lax 在紀念 Courant 的一篇文章 [14] 列出以下論文, 為 Courant 的代表作 (Selected bibliography):

- (1) *Math. Z.* 3(1918), 321~328.
- (2) Eigenvectors of differential equations, *Math. Z.* 7(1920), 1-57.
- (3) Hurwitz-Courant, *Complex functions*, 1922, Springer.
- (4) Courant-Hilbert, *Methods of mathematical physics* vol. 1, 1924, Springer (vol. 2, 1937).
- (5) Courant-Friedrichs-Lewy, On PDE's in mathematical physics, *Math. Ann.*, 100 (1928), 32-74.

- (6) *Differential and integral calculus*, 1930~1931, Springer.
- (7) Plateau's problem and Dirichlet's principle, *Ann. Math.* 38(1937), 679-724.
- (8) Minimal surfaces, *Acta Math.* 72(1940), 51-98.
- (9) Courant-Robbins, *What is mathematics?* Oxford Press, 1941.
- (10) Courant-Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Wiley-Interscience, 1948.

比較 Courant 與 Noether 的著作 [13]。Noether 在場物理, 交換代數或 Brauer-Hasse-Noether 定理 (亦稱 Albert-Brauer-Hasse-Noether 定理) 的貢獻都較為廣闊深入。Noether 的思想透過抽象代數滲透到代數、數論、拓樸、表示論等許多領域。

不過 Courant 的貢獻在別的方面, 他是一個第一流的行政公關人才, Klein 當年朝思暮想要建立的數學大樓竟在 Courant 手中完成。

Rockefeller 基金會同意捐出35萬美元作為大樓的建築費用, 德國教育部負責維修經費。嶄新的 Göttingen 數學所大樓在 1929 年 12 月 2 日落成 [24, p.125], Courant 成為數學所的所長。而 Klein 早在 1925 年去世。

一件可怕的事, 就在新大樓落成典禮之前不到一個禮拜發生, 1929 年 11 月 29 日紐約華爾街發生股市大崩盤, 引發長達十年的全球經濟不景氣。經濟蕭條促使許多人在政治態度傾向激進的納粹黨 (右翼) 與共產黨 (左翼)。

以德國國會選舉而論, 1928 年 5 月 NAZIS (納粹黨) 只有 12 席, 1930 年 9 月 NAZIS 有 107 席, 1932 年 7 月 NAZIS 有 230 席, 11 月重新選舉仍有 196 席, 成為國會未過半的第一大黨。

1933 年 1 月 30 日德國總統興登堡任命 NAZIS 的黨魁希特勒為總理, 1933 年 3 月 15 日國會重新選舉。在重新選舉之前, 2 月 27 日發生國會大廈縱火案, 次日國會火災命令通過, 國會第二大黨共產黨被禁止參加 3 月的國會選舉, NAZIS 的衝鋒隊占領德國全國的共產黨黨部, 並逮捕共產黨領袖。3 月 15 日的國會選舉, NAZIS 贏得國會 44% 的席次。

1933 年 3 月國會通過授權法案, 希特勒已平穩地走向獨裁者之路。

NAZIS 取得政權之後, 推動各種反猶太人的法案, 造成 Göttingen 數學所的崩壞。

## 7. 數學物理方法

Courant-Hilbert 的《數學物理方法》本來規劃以 Hilbert 的講義為基礎介紹數學物理的方法。這個構想沒有付諸實現, Hilbert 實際上沒有參與這本書 (Part I 與 Part II) 的寫作, 完全是 Courant 一個人和他的學生 (或助理) 寫的。

《數學物理方法 (Part I)》在 1924 年出版, 初稿是 Pascual Jordan 寫的 [24, p.93]。Jordan 後來跟 Max Born 學物理。

Born-Jordan (1925 年), Heisenberg-Born-Jordan (1926), Jordan-von Neumann-Wigner (1934, Ann. Math.) 成爲量子物理的經典文獻 [24][p.113]。

1933 年諾貝爾物理獎頒給 Heisenberg, Schrödinger 與 Dirac 三人, 1954 年頒給 Born 與 Bothe。有人斷言 [16], [36], 如果 Jordan 不是在 1933 年加入 NAZIS, 相信也在 1954 年諾貝爾物理獎獲獎名單之中 (註9) [21, p.18]。

Ackermann-Teubner 紀念獎在 1914 年~1941 年頒給 14 位科學家, Klein 是第一位得獎人, Prandtl 是 1918 年得獎者 (見 [21][p.16]), Blaschke 是 1926 年得獎人, Emmy Noether 與 Emil Artin 共同在 1932 年得獎, Pascual Jordan 在 1937 年得獎, Hecke 在 1939 年得獎。Noether 在移民美國之前仍然是編制外的副教授; Ackermann-Teubner 紀念獎是公開認可她的學術成就的唯一獎項。

《數學物理方法》的內容是 Courant 與他的學生多次討論才定稿的。Part II 在 1937 年才出版, Friedrichs 參與這部分的討論更多。

Friedrichs 與 Lewy 在 1922 年到 Göttingen, 當時 Lewy 剛從高中畢業, Friedrichs 比他大三歲, 已唸完大學。Lewy 對於知識豐富、反應靈敏的 Friedrichs 十分佩服。他們成爲好朋友, 合寫了不少論文。Courant-Friedrichs-Lewy 更是一篇有名的論文《偏微分方程數值解, 1928 年》。

Friedrichs 是一個內向、安於現狀的學生。他在 Göttingen 工作兩年之後, 1929 年 Courant 安排他到 Aachen 大學當 von Kármán 的助手。根據 Lewy 的回憶, 他送 Friedrichs 去 Göttingen 火車站搭車到 Aachen 時, Friedrichs 十分難過, 但是這是 Courant 的安排, 他不敢違抗。Courant 要把他培養像 Runge 那樣的應用數學家。Friedrichs 日後才理解 Courant 的用意。

## 8. 出走

納粹黨人取得政權之後 (1933 年 1 月), 開始進行一系列的排猶行動。他們把 1933 年 4 月 1 日定爲「抵制日 (Boycott Day)」, 他們呼籲德國民衆不要到猶太商店消費, 不要讓猶太教授、講師進入大學校園。

1933 年 4 月 7 日國會通過「公務人員任用法 (Law for civil service)」, 規定「非雅利安人(non-Aryan)」不得擔任公務人員、教授、講師, 除非另有規定。所謂非雅利安人就是當事人的四個祖父母中至少有一個不是雅利安人; 非雅利安人主要是針對猶太人。

1935 年又通過「混合婚姻法」, 禁止雅利安人與非雅利安人結婚。雅利安教授如果不同意與非雅利安配偶離婚, 學校得予以開除其職位。

根據 1933 年 4 月 26 日 Göttingen 當地報紙報導, 根據「公務人員任用法」, Göttingen 大學有 6 個教授被勒令請假直到另有通知; 這 6 個教授有 4 個來自科學學院, 他們是數學所的

Courant, Noether, Felix Bernstein (註10) 與物理所的 Max Born。數學所的 Landau 與物理所的 James Franck 因為在第一次大戰時服役, 不適用「公務人員任用法」。這些另有規定的例外情形在 1935 年都被取消 (「紐倫堡法」)。

第一個打包移民的是 Lewy, 他申請到美國 Brown 大學兩年的職位 (1933 年~1935 年)。兩年後他得到加州 Berkeley 大學三年的職位。這時碰上 Berkeley 找來 Griffith Evans (1887~1972) 整頓 Berkeley 數學系, Evans 招聘許多年輕有潛力的數學家。如: Charles B. Morrey Jr. (1907~1984), Lewy, Neyman (統計學者), Tarski (邏輯)。Lewy 因此就留在 Berkeley。

Brauer-Hasse-Noether 定理裡面的 Richard Brauer (1901~1977) 也是 1933 年 11 月左右移民美國的。他是柏林大學 I. Schur 的學生, 被 NAZIS 開除時是 Königsberg 大學的講師。Kentucky 大學提供一個為期一年的職位, 他沒有揀精揀肥, 立即動身上道, 橫渡大西洋, 隨身帶一本英文字典。一年期滿, 他到 Princeton 當 Hermann Weyl 的助理 (IAS)。一年聘約期滿之後, 他獲得 Univ. of Toronto 的聘書, 從此穩定下來。他是有限群模表示論 (Brauer lifts, block theory) 的創立者, 有限群理論的領導者, 1950 年代後期他鼓勵研究有限單群的分類。

Hermann Weyl (1885~1955) 在 Hilbert 退休後 (1930年) 才到 Göttingen 大學任教。他本來不受 NAZIS 歧視猶太人法條的影響, 因為他是真正的雅利安人。但是他的妻子是猶太人, 因此他的兩個兒子是屬於非雅利安人。Weyl 因此在 1933 年接受 Princeton IAS 的聘書, 移民美國。

Emmy Noether 最先沒有接到任何邀約, 因為當時美國各大學幾乎沒有女性的教授。後來賓州的 Bryn Mawr College (專收女生) 的系主任邀請她去任教。她才在 1933 年 10 月移民美國。

Courant 的朋友幫助他找關係陳情, 希望 Courant 不會被政府開除。1934 年 1 月底, 紐約大學 (NYU) 表示願意提供兩年期的聘書, 兩年期滿之後有很大機會可以續約。NYU 的薪資是每年 4,000 美元, 當時德國教授的薪資 (換算成美金) 是每年 12,000 元。並且每年 4,000 美元, 比 1883 年 Johns Hopkins 邀請 Klein 的價碼還少了 1,000 元 [24, p.158]。

NYU 是一所私立大學, 靠學生繳交的學費維持運作, 促使 NYU 伸出援手的是該校一名年輕教師 Donald Flanders (1900~1958)。Flanders 似乎是一個 (思想上的) 左翼青年, 他與 Alger Hiss (1904~1996) 是好朋友 [24, p.158, p.293]。Hiss 後來因紅色間諜案與偽證罪入獄服刑。Flanders 還到監獄探望。

1934 年 8 月 21 日 Courant 全家終於抵達紐約。他將在 NYU 重新打造一個世界一流的應用數學中心, Courant Institute of Mathematical Sciences (1965)。

留在 Göttingen 的教授只剩 Landau 與 Herglotz。Landau 在 1933 年 11 月 2 日遭

到一群學生抵制上課 (註12)。他在 1934 年 2 月 7 日退休, 1938 年 2 月 19 日心臟病去世。

Herglotz 傑出的學生 Emil Artin (1898~1962), 漢堡大學教授 [18, p.11], 也移民美國 (1937 年), 因為他的妻子 Natascha 是半個猶太人, 因此他們的女兒與兒子按照納粹的法律都是非雅利安人。

## 9. Noether 去世

Bryn Mawr College, 是 19 世紀教友會信眾 (Quaker) 成立的大學, Noether 在這裡渡過快樂的兩年 (1933 年~1935 年)。1934 年 2 月起她在 Princeton IAS 主持研討會, 她的朋友 Weyl, Brauer, Vandiver, Veblen 都來聽講。1934 年夏天她還回到德國一趟。

1935 年 4 月醫生診斷她的腹部有腫瘤。兩天後開刀, 發現還有另外的腫瘤, 醫生判斷是良性腫瘤, 因此沒有處理。第四天病情突然惡化, 還發高燒, 當天就去世。

Emmy Noether 去世後, Weyl、van der Waerden、Aleksandrov 分別在美國、德國、俄國發表紀念文章:

Weyl, Emmy Noether, *Scripta Math.* 3(1935), 201-220; see [7].

Van der Waerden, *Math. Ann.* 111(1935), 469-476; see [3].

Aleksandrov, see [3].

在 Noether 的葬禮, Weyl 發表簡短動人的致辭, 原文見 [16]。

## 10. Courant Institute 的成立

1937 年秋天, Courant, Friedrichs, Stoker 在紐約見面 [24, p.202]。

James J. Stoker (1905~1992) 不是 Courant 的學生, 他是工程背景出身 (Carnegie Inst. of Technology 機械系助理教授), 到瑞士 ETH 跟拓樸學家 Heinz Hopf 寫博士論文, 論文主題是微分幾何方面的問題。

Courant 與 Stoker 在紐約第一次見面 (1936 年 12 月)。Courant 立即決定聘用 Stoker 為 NYU 的助理教授。

Friedrichs 不是猶太人, 不受納粹排猶法案影響。在希特勒成為總理四天後 [24, p.176], Friedrichs 認識一個女朋友, 她是個猶太人。在「混合婚姻法」頒布之後, 他們不能結婚。因此 Friedrichs 也必須移民美國。

Friedrichs 是役男, 不能隨意出境; 但是他有一個姊妹在法國, 他可以去探望她。他的女朋友父母住在法國, 因此她有一份法國護照, 可以先到法國等 Friedrichs。

在 1937 年 7 月 NYU 同意短期的聘用 Friedrichs, 年薪 3,000 美元, 半數由 Rockfeller

基金會提供, 半數由 NYU Graduate Center 的友人支付 (Courant?)。Friedrichs 與他的女朋友可以在加拿大會合, 再到美國。

Courant, Friedrichs, Stoker 共同把 NYU 的數學系打造成世界一流的應用數學中心。這個數學系在 1965 年改名為 Courant Institute of Mathematical Sciences。它培育許多第一流的人才, 例如, Peter D. Lax (1926~) 是來自匈牙利的猶太人, 1941 年年底才抵達美國; 他是 Friedrichs 的學生。Louis Nirenberg (1925~2020) 在加拿大 Montreal 大學唸物理, 他認識 Courant 的媳婦 Sara。透過 Sara, 他問 Courant, 到美國哪一家大學唸物理, 結果卻收到 NYU 數學系的助教獎學金的通知信函。Nirenberg 後來成為 Stoker 的學生。

Courant Institute 在成功的道路上一路走來, 卻也夾雜羨慕、嫉妒、敵對的聲音。

早在 1941 年 Courant 就開始推銷他的「國家科學基地(National Science Institute)」的構想 [24, p.226]。這時巴爾幹半島已被軸心國佔領, 英軍從北非撤退, 德軍入侵俄國。

Courant 把他的科學基地說成「緊急基地 (emergency institute)」, 他期望政界、新聞界、學術界的人能公開支持他。學術界的人, 他心裡想的一個人, 就是 Theodore von Kármán (1881~1963, [21, p.1819]); Courant 與 von Kármán 都出身自 Göttingen。von Kármán 卻不認為 Courant 是一個真正的應用數學家。他覺得 Courant 的構想只不過是一種山寨版的 Klein 計劃 (a cheap imitation of Felix Klein) [24, p.226]。

事實上有許多人並不喜歡 Courant, 如 G. Szegő 與 von Neumann (註 13) [1, p.143]。最有力的反對 Courant 的計劃來自 Brown 大學的 R. G. D. Richardson (1878~1949)。Richardson 來自加拿大, 是 Yale 大學的博士, 1908 年到 Göttingen 大學進修。Richardson 搶先一步在 Brown 大學推動類似的應用數學計劃 [24, p.228]。

## 11. George D. Birkhoff

反對 Courant 的另外一股勢力來自 Harvard 大學的 George D. Birkhoff (1884~1944)。Birkhoff 是當時美國數學界的領袖。

Birkhoff 是芝加哥大學 E. H. Moore 的學生 (1907 年博士)。Poincaré 在 1912 年提出 Poincaré Last Geometric Theorem, 這是 3-body problem 的特殊情形; Poincaré 只是在幾個情況給出證明, 1913 年 Birkhoff 發現完整的證明。

Birkhoff 的研究領域涵蓋面相當寬廣, 主要以動力系統與 ergodic theory 為主。他的學生有: Carmichael (1911年), Marston Morse (1917年), J. Walsh (1920年), R. Langer (1922年), D. Widder (1924年), Marshall Stone (1926年, [19, p.13]), Hassley Whitney (1932年)。本文第 8 節提到的 Charles B. Morrey Jr. 也是 Birkhoff 的學生(1931年)。詳見 [15], [35], [34], [22]。

Birkhoff 交遊廣闊, 來往密切的歐洲數學家有: Hadamard (法國)、Levi-Civita (義大

利) Whittaker (英國)。他的兒子 Garrett Birkhoff (1911~1986) 也是有名的數學家, 但是距離他傑出的父親甚遠。

Courant 與 George Birkhoff 衝突的來源是資源分配的問題。

Courant 想盡辦法要替他的 Göttingen 學生與友人爭取美國大學的職位。Birkhoff 站在美國本土培育的年輕學者的立場, 當然要反對。

1938 年 9 月 Birkhoff 在美國與加拿大數學聯合會呼籲大家要正視歐洲難民對美國本土數學家的成長可能產生的傷害 [24, p.212]。當時美國還沒有從經濟大蕭條恢復, 許多年輕人找不到工作 (見本文註11)。人道的考量與「美國優先」的立場是不共容的。

許多與會者對 Birkhoff 的演講報以掌聲。Courant 卻認為 Birkhoff 的觀點是狹隘而且錯誤的 [24, p.213]。

Birkhoff 在 1944 年去世。但是 Reid 的書 [24] 卻引起反彈。Birkhoff 的學生 Stone 在書評 [32] 指出, Reid 的書 [24] 是由 Courant 與他的學生單方面提出的資料建構而成, 沒有善盡歷史學者從各個角度查證的責任。他進一步質疑 Courant 的數學成就。

Courant 只是現代社會高級的「行銷者」, 並不是尖端技術的「研發者」。他當然不能與 Göttingen 先賢: Gauss, Riemann, Schwarz, Hilbert 相提並論。在硬功夫方面, 他連 Klein 都比不上, 然而他是第一流的行政公關人才, 功不可沒。

## 後記

1928 年年底 Aleksandrov 邀請 Noether 到莫斯科大學講學 (「近世代數」, 一學期), Deuring 做筆記。聽眾有: Aleksandrov, Pontryagin, Kurosh [17, p.22, p.29]。Noether 回國後盛讚俄國的社會改革, 因此被視為馬克斯主義者。

Courant-Robbins 的書《*What is mathematics?*》原先有一個比較平實的書名: 《*Mathematical Discussions of Basic Elementary Problems for the General Public*》, 爲了促銷才採用現在的書名。這本書作者原先只有 Courant 一個作者, 經過 Robbins 激烈的抗議, 才變成兩人共著。詳見 [24, p.223-p.232]。

## 註釋

註1: Klein 退休後還會開一些課, 就在他自己家中上課。例如, Klein 的書《*Development of mathematics in the 19th century*》就是在他家中上課的記錄。

有一次 Klein 感覺他的體力衰退得很快, 他預感離死亡之日已不久了, 於是找來秘書與助理, 交代他的喪禮一些事項。事後 Klein 並沒有去世, 使他非常沮喪 [24, p.100]。

Klein 關心所有階段的數學教育。他在數學圖書館的閱覽室擺放一些初等數學的書籍。後

來的管理員 Otto Neugebauer (1899~1990, Hilbert 的學生, 是個很好的數學家) 把這些初等數學的書放在最頂層的書架 (束之高閣), Klein 知道後, 把 Neugebauer 叫來, 只說了一句話:『新來一個不知道法老王 (Pharaoh) 威權的摩西 (Moses)』[24, p.100]。

註2: Carathéodory 三歲時, 他的父親被任命為土耳其駐布魯塞爾的大使, 從此他在歐洲長大受教育 (主要在比利時)。Carathéodory 最先接受工程師的養成教育, 曾參與埃及的鐵路與水壩的建造。27 歲時決心唸數學, 1900 年 5 月他參加柏林大學的 Schwarz 研討會, 每個月兩次的研討會由 Schwarz 親自講解他的全集的部分論文。1902 年夏天他到 Göttingen 大學唸書, 1904 年完成博士論文, 指導教授是 Minkowski, 論文是 Calculus of variations 方面的問題, 次年做 Habilitation, 接著在 Göttingen 大學當了三年的講師。

Carathéodory 的專長是分析, 他在實函數、複變函數、測度論、PDE、熱力學有許多創見 [2, p.107]。

註3: 1925 年 Klein 去世, 同年 Runge 退休。Runge 的職位由 Gustav Herglotz (1881~1953) 繼任。Herglotz 兼具純數與應用數學的專長, 是 Emil Artin 博士論文的指導教授 [18]。

Herglotz 在捷克出生, 在維也納長大, Munich 大學博士 (指導教授是 Seelinger 與 Boltzmann), 曾擔任 Göttingen 大學副教授 (1907年), 維也納大學 (1908年) 與 Leipzig 大學 (1909年) 教授。

註4: Ernst Fischer (1875~1954) 來自維也納大學, 他是 Franz Mertens 的學生 (1899 年博士)。Mertens 是個數論學者, Mertens 與 Fischer 對於把數論方法應用到代數問題的想法並不陌生。Fischer-Riesz 定理證明: 如果  $a < b$ , 則  $L^2([a, b])$  是完備的。Fischer 另一個定理證明: 如果  $G$  是有限交換群, 且  $G$  作用於  $n$  維向量空間  $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{C} \cdot x_i$ , 則  $\mathbb{C}(V)^G$  是純超越擴張體, 其中  $\mathbb{C}(V) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  是多項式環,  $\mathbb{C}(V)$  是  $\mathbb{C}[V]$  的商體,  $\mathbb{C}(V)^G = \{f \in \mathbb{C}(V) : \sigma \cdot f = f, \forall \sigma \in G\}$ 。

註5: 枚舉幾何 (enumerative geometry) 典型的問題是: 給定平面已知三圓, 求解同時與這三個圓相切的所有圓的數目 (Apollonius 問題)。Schubert 有一套方法計算這個數目 (Schubert calculus), 可惜 Schubert calculus 沒有嚴謹的理論基礎。Hilbert 第 15 個問題要求對 Schubert calculus 給予嚴謹的理論證明。由此 van der Waerden 對於幾何理論的嚴格基礎興趣極高。

從 1926 年到 1934 年, van der Waerden 寫了許多論文討論代數幾何的基礎, 他建立了一般點 (generic point) 與相交重數 (intersection multiplicity) 的概念。這些結果經 André Weil 發展成更完整的理論 [18, p.15]。Weil 重寫的代數幾何基礎與 Zariski 重寫的並不相同。

註6: Courant 與 Hopf 中學時代有一個叫做 Maschke 的老師 (這個 Maschke 與表現理論的 Maschke 是不同的人), 他搜羅一些數學難題給心愛的學生做。每次 Hopf 解決一個問題,



Maschke 就說：『這個問題，Courant 以前也會做。』

Breslau 出了不少知名數學家，如：Otto Toeplitz (1881~1940)，Max Born (1882~1970)，Ernst Hellinger (1883~1950)，Courant，Hopf 以及 Hans Lewy。Toeplitz 是他們的老大哥，由於他的鼓吹，後來的 Born 等人才到 Göttingen。但是 Toeplitz 只是在 Göttingen 做博士後研究，他是 Breslau 大學的博士。

註7: Tsen's 定理：若  $V$  是定義在  $\mathbb{C}$  的不可約代數曲線，且  $K := \mathbb{C}(V)$  是  $V$  的函數體，則  $Br(K) = 0$ 。

註8: Lasker 定理是 Kummer-Dedekind 定理在多項式裡的推廣。Lasker 定理：設  $K$  是體， $A = K[x_1, \dots, x_n]$  或  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  是  $K$  或  $\mathbb{Z}$  的多項式環。如果  $I \subsetneq A$  是任意的理想集 (ideal)，則  $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ ，其中  $Q_j$  是某些擬質理想集 (primary ideal)。

Noether 把 Lasker 定理的多項式環推廣到滿足 ACC 條件 (ascending chain condition on ideals) 的交換環。有關 Lasker-Noether 定理，見《*Zariski-Samuel, Commutative Algebra*, vol. 1, 208-213》。

Lasker 是 Hilbert 的學生，他是國際西洋棋的冠軍，從 1894 年打敗 Wilhelm Steinitz 到 1921 年敗給 J. R. Capablanca，連續 27 年的冠軍。

註9: Pascual Jordan 是不排猶太人的納粹黨員。像 Hasse 一樣，他只是 German Nationalist。他使用匿名寫文章反對 Bieberbach 支持的 Deutsche Math. 與 Deutsche Physics 的論點。

註10: Felix Bernstein (1878~1956) 是集合論裏面 Schröder-Bernstein 定理的 Bernstein (兩個集合  $S$  與  $T$ ，如果存在單射  $f : S \rightarrow T$  與單射  $g : T \rightarrow S$ ，則  $|S| = |T|$ )。這個 Bernstein 後來變成統計學家，1921 年創立 Göttingen 大學的統計所。

註11: Lewy 在 Brown 大學那兩年，每年可領到 3,000 美金 [1]。根據 [24, p.213]，1938 年美國還沒有從大蕭條復元，當時新進人員最幸運的一年可領到 2,400 美元，Princeton 高等研究所 (IAS) 的博士後每年 1,000 美元，有些大學的助教獎學金每年 750 美元，更悲慘的是有些人任何職位都沒有。

註12: 領導這些納粹學生的不是別人，而是 Oswald Teichmüller (1913~1942)。Teichmüller 是 Göttingen 大學的天才學生。Teichmüller space 是幾何函數論一個重要研究課題。在 1940 年 1 月 Teichmüller 在 NAZIS 軍方從事破譯密碼的工作 (cryptography)，Noether 的學生 Witt 也在同一單位工作 [36]，[16]。同樣的時間，英國有一個規模更大的破譯密碼的團隊 (Bletchley Park)，參與的人有 Turing, Max Newman, J. H. C. Whitehead; 詳見 [4]。史達林格勒戰役時 (1942 年 7 月~1943 年 2 月)，Teichmüller 自動請纓到德國東戰場前線，參加史達林格勒戰役。1942 年 9 月德軍潰敗時，他似乎還活著，以後就失蹤，相信已經戰死了。

史達林格勒 (Stalingrad) 在俄羅斯南部, 伏爾加河 (窩瓦河) 西岸, 原名 Tsaritsyn, 1925 年改名史達林格勒, 1961 年再改名為伏爾加格勒 (Volgograd)。

註13: G. G. Szegő (1895~1985) 與 John von Neumann (1903~1957) 來自奧匈帝國 (匈牙利猶太人), G. Szegő 的專長是函數論、正交多項式、等周不等式, von Neumann 的專長是量子力學、game theory、computer。他們都曾在柏林大學工作 [2]。1931 年 von Neumann 到 Princeton 大學訪問, 1933 年獲 Princeton IAS 聘為教授。在納粹施行排猶政策之後, G. Szegő 離開德國, 1935 年擔任 Stanford 大學教授, 1939 年擔任數學系系主任。Stanford 數學系在三任系主任 (Blichfeldt, Uspensky, G. Szegő) 經營之下才脫胎換骨 [11]。

Von Neumann 在高中時代就已經是數學資優生, G. Szegő 被指定是他的 tutor [16]。G. Szegő 是 Lax 的 uncle-in-law [16], 因此他們對 Courant 的評價, 在 Lax 面前, 是不掩飾 [1, p.143]。

## 參考文獻

1. D. J. Albers, G. L. Alexanderson and C. Reid (editors), *More Mathematical People*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1990, Florida.
2. H. G. W. Begehr, etc. (editors), *Mathematics in Berlin*, Birkhäuser, 1998, Berlin.
3. J. W. Brewer and M. K. Smith (editors), *Emmy Noether: a tribute to her life and work*, Marcel Dekker, New York, 1981.
4. J. Copeland, *Colossus: the secrets of Bletchley Park's code-breaking computer*, Oxford, 2006.
5. E. Chislenko and Y. Tschinkel, The Felix Klein Protocol, *Notices AMS*, 54(2007), 960-970.
6. E. Chislenko, The development of mathematics in Göttingen, Göttingen library project (website translations, 7 pages).
7. A. Dick, *Emmy Noether (1888~1935)*, English translation, Birkhäuser, 1981.
8. S. S. Ding, M. Kang, and E. -T. Tan, Chiung-Tze Tsen (1898~1940) and Tsen's Theorems, *Rocky Mountain J. Math.*, 29(1999) 1237-1269.
9. Y. Dold-Samplonius, Interview with Bartel Leendert van der Waerden, *Notices AMS*, 44(1997), 313-320.
10. P. R. Draxl, *Skew fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
11. P. Diaconis and S. Zabell, In praise (and search) of J. V. Uspensky, arXiv: 2201.13417v1 [math. HO] 31 Jan 2022.
12. P. Gille and T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge University Press, 2006, Cambridge.
13. N. Jacobson, Introduction, in "*The Collected Works of Emmy Noether*", Springer-Verlag, Berlin, 1983.
14. P. D. Lax, Richard Courant, Biographic Memoire, National Academy of Science USA, 2003.

15. M. Morse, George David Birkhoff, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 357-391.
16. Mac Tutor, History of Mathematics Archive,  
URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
17. 康明昌, Egorov 與 Luzin, 數學傳播季刊, 44(2), 18-31, 2020。
18. 康明昌, Bourbaki 與 André Weil, 數學傳播季刊, 44(4), 3-20, 2020。
19. 康明昌, Jean Leray (1906 1998), 數學傳播季刊, 45(1), 3-16, 2021。
20. 康明昌, 幾個印度數學家與統計學家, 數學傳播季刊, 45(3), 3-19, 2021。
21. 康明昌, Felix Klein (1849~1925), 數學傳播季刊, 46(1), 3-20, 2022。
22. D. D. Kosambi, G. D. Birkhoff: a tribute, *Math. Student*, 12 (1945), 116-120; also available in [16].
23. C. Reid, *Hilbert*, Springer, Berlin, 1970.
24. C. Reid, *Courant in Göttingen and New York*, Springer, New York, 1976.
25. D. E. Rowe and M. Koreuber, *Proving it her way*, Springer, Cham, 2020.
26. D. E. Rowe, *Emmy Noether - Mathematician extraordinaire*, Springer, Cham, 2021.
27. P. Roquette, *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in historical perspective*, Springer-Verlag, 2005.
28. N. Schappacher, A historical sketch of B. L. van der Waerden's work, in algebraic geometry: 1926~1946, in "Episodes in the history of modern algebra (1800~1950)", edited by J. J. Gray and K. H. Parshall, AMS and LMS, 2007.
29. S. L. Segal, *Mathematicians under the Nazis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.
30. R. Siegmund-Schultze, *Mathematicians fleeing from Nazi Germany*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2009.
31. B. Srinivasan and J. Sally (editors), *Emmy Noether in Bryn Mawr*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
32. M. H. Stone, Book review of "Courant" by C. Reid, *Bull. AMS*, 84(1978), 234~241.
33. M. Teicher (editor), *The heritage of Emmy Noether*, IMCP, Bar-Ilan Univ., Ramat-Gan, Israel, 1999.
34. H. S. Vandiver, Some of my recollections of George David Birkhoff, *J. Math. Analysis Appl.*, 7(1963), 271-283.
35. O. Veblen, *George David Birkhoff (1884~1944)*, Biographical Memoirs by National Academy of Sciences, U.S.A.
36. Wikipedia, available via Google.