數學傳播 46卷2期, pp. 102-106

多分支“橋樑”的搭建者 —— 數學大師柏原正樹

邵紅能

數學其實是一門藝術, 是關乎心靈與智力的學問, 是常人難以達到的境界。他是一位建造者, 在數學的不同領域之間搭建橋樑; 他是一位創造者, 發展了被廣泛應用的數學工具; 他更是一位遠見者, 打開了新的數學世界, 使數學家有了新的探索方向。在近 50 年的數學生涯中, 他開創了一個新的領域, 用前所未有的方法證明了驚人的定理。他, 就是柏原正樹!

在 2018 年的國際數學家大會上, 柏原正樹獲得了陳省身獎 (Chern Medal), 以表彰他在代數分析和表示論中做出的傑出和基礎的貢獻。他在當前的數學領域裡留下了獨特的印記。頒獎詞寫道 :「柏原正樹的工作具有突出的深度、廣度、才華和非凡的獨創性。如果沒有他的貢獻, 無法想像代數分析和表示論會是什麼樣子。」

柏原正樹 (Masaki Kashiwara), 日本京都大學數理解析研究所教授。他確立了 D-module (簡稱“D 模”) 理論, 對構築代數解析學發揮了決定性作用。柏原正樹在其廣泛的工作中解決了許多複雜的問題, 例如 Kazhdan-Lusztig 猜想和量子群的晶體基理論。柏原取得的成就衆多, 對數學的發展產生了持續而深遠的影響。因此, 他獲得了彌永獎 (1981)、朝日獎 (1988)、日本學士院獎 (1988)、京都數學獎 (2018) 和 陳省身獎 (2018) 等。

2016年, 柏原正樹證明了之前的黎曼-希爾伯特對應的一個延伸問題。他還在搭建不同數學領域之間的橋樑, 包括辛幾何。他的工作激發了許多數學家的靈感, 另外, 他還寫出了被多個領域奉爲“聖經”的教科書。

1. D 模的開創者, 抽象結構的核心

柏原正樹出生於 1947 年日本茨城縣結城市, 柏原正樹在東京大學完成了數學學士和碩士學位, 並於 1974 年在代數分析創始人佐藤幹夫 (Mikio Sato) 的指導下在東京大學完成博士學位。1984 年起, 他成爲京都大學數理所的高級研究員。

柏原正樹最早的重要貢獻是發展了一種叫作 D 模的工具。D 模是一種由微分方程編織而成的微分運算元的模結構, 是廣泛應用於科學領域的、最基本的數學工具之一。D 模最初是由柏原正樹在東京大學研究生院的導師佐藤幹夫創造的。他們一起工作, 發現了所有不同類型的 D 模, 以及它們之間的自反應關聯。構建這些 D 模結構的基本單元是微分方程。微分方程屬於數學分析的範疇, 它描述變數之間的關係, 處於現代科學的核心。例如, 移動物體的速度就是通過微分方程表達的, 它描述了運動距離與經過的時間之間的關係。但是, D 模使用的框架來自於數學中一個分支就是同調代數。在同調代數中, 所有細節都被剝離, 只專注於所涉及的抽象結構的核心。

因而, D 模連接了分析與代數這兩個數學領域, 使得一個領域的研究對象和方法可以進入另一個領域。柏原正樹極大地發展了 D 模理論, 使之成爲一個全新的領域, 即代數分析的基礎。然後, 柏原正樹使用 D 模來證明數學上一個長久以來懸而未決且極其重要的開放性問題 — 黎曼-希爾伯特問題, 這是希爾伯特 1900 年提出的一個問題 (希爾伯特 23 個問題的第 21 個) 的推廣。

柏原正樹在獲獎紀念演講中介紹說, 這項成就的基礎是京都大學數理解析研究所名譽教授佐藤幹夫的一項名爲 micro-local 函數的研究成果, 柏原正樹強調說, 他在東京大學讀四年級時, 遇到了當時在東大任教的佐藤, 對其之後的研究生活產生了決定性的影響。當時還是研一學生的他被京都大學數理解析研究所名譽教授河合隆裕邀請參加了由佐藤主辦的研討會。三人都到京都大學任職後聯名發表了論文《線形偏微分方程式的分類理論》, 取佐藤、河合、柏原三人首字母被稱爲 SKK 論文, 引起了數學界巨大反響。

柏原正樹回憶了自己年輕時在京都大學數理解析研究所度過的時光, 他說 :「那時每天都會聚到佐藤的房間裡, 相互報告前一天的研究成果並進行討論。晚上就在大學附近的食堂裡邊吃晚飯邊繼續談論數學的話題。當時, 京都大學在代數解析學領域走在世界的最前沿。能跟著佐藤老師學習並一起工作非常幸運」。三人與國外的數學家也有交流。佐藤、河合和柏原正樹曾受邀前往法國尼斯大學交流了 1 年時間。在紀念演講中, 柏原正樹介紹了與 J-L. Brylinski 和 P. Schapira 等海外數學家的聯合研究成果等, 關於自己的研究情況他這樣說道。

“數學與其他領域相比, 聯合研究的數量還不太多。不過, 我與 40 名研究人員共同寫過論文。通過進行聯合研究, 學到了其他領域的知識, 收穫非常大”。作爲體現聯合研究效果的具體案例, 柏原正樹在演講的最後介紹了他與擔任廣島大學和名城大學教授的岡本清鄉共同取得的成就, 二人挑戰了 “關於廣義函數與表現論的 S. Helgason 預想”, 並最終解決了該問題。演講結束時, 柏原正樹向一同進行研究的夥伴們表達了感謝之情, 他說 「我從零開始向岡本學習了之前不瞭解的表現論。邊研究邊學習是效率非常高的方法。我有很多聯合研究夥伴, 這是我的幸運」。

其實, 柏原正樹的成就是從基礎構建了名爲 D 模的代數解析學核心理論, 並將其應用於現代數學的各個領域。D 模理論還在逐漸向數論等其他領域滲透, 預計將來會對數理科學的發展產生持續而深遠的影響。

2. 發明水晶基, 表示論的重要工具

目前, 美國、法國、英國、日本以及德國是公認的數學大國。日本的數學在 20 世紀後半葉進步很快, 尤其在代數, 微分幾何, 代數幾何等領域日本數學家都做出了巨大的貢獻, 柏原正樹就是其中傑出的一位。

柏原正樹貢獻良多的另一個數學領域是表示論。這是一種可以將抽象的李代數結構描述爲一種更易於理解的事物, 作用於向量空間的矩陣的方式。表示論探索的是關於對稱的問題。數學領域中最基本的問題之一是關於可能存在的所有不同類型的對稱性。在物理世界, 我們只會體驗到幾種基本類型的對稱性 : 臉部的鏡像對稱, 雪花的旋轉對稱, 地板圖案的平移對稱, 以及它們之間的組合, 例如螺旋形的開瓶器。然而, 在更高維度, 有著無窮多種可能性。表示論提出的問題是 : 展現一種特定類型對稱性的所有不同的數學物件有哪些?

柏原正樹與合作者一起, 證明了表示論領域的 Kazhdan-Lusztig 猜想, 這一問題處於分析、代數與幾何的交匯處。他們的證明方法是如此聰明且出人意料, 甚至連該領域的數學家都讚歎不已。之後, 他又與另一位數學家合作, 證明了這個猜想更普遍的形式。這一證明如同一場革命, 使得表示論發展成了現在的形式。柏原正樹這項工作的影響超出了一般數學領域。

通常, 許多不同的數學物件會展現出同一種特定類型的對稱性, 而這些數學物件會以難以理解的複雜方式彼此關聯。爲了表示這些數學物件之間的關係, 柏原正樹引入了水晶基的想法, 使得能夠利用組合數學來回答表示論中的問題。水晶基的概念揭示了複雜數學結構 (用作用於向量空間的矩陣來表示) 的核心是圖。水晶圖的頂點是基底, 圖的邊表示這些元素是如何相互關聯的。水晶基的概念在數學物理領域非常有用, 它被用來證明粒子系統統計行爲的公式。加州大學大衛斯分校的數學教授 Anne Schilling 說 :「除了在表示論和統計力學方面的應用, 水晶基在數論領域也產生了影響, 尤其是自守形式和狄利克雷級數。事實上, 2013 年, 美國布朗大學計算與實驗數學研究所整個學期的課程都集中在組合表示論, 也就是水晶基與數論的相互作用。」柏原正樹沒有停下來, 他仍然與許多不同的人合作, 繼續做著突破性的工作。

事實上, 表示論是數學中抽象代數的一支。旨在將李代數結構中的元素 “表示” 成向量空間上的線性變換, 藉以研究結構的性質。決定一個李代數結構的所有的表示, 是表示論的中心問題之一, 這對於深入分析該代數結構是十分重要的。群及李代數表示論在物理學和化學中也有很多應用。

3. 國際數學大獎, 著名的“陳省身獎”

據日本《東京新聞》報導, 在巴西舉行的第 28 屆國際數學家大會上, 國際數學聯盟宣佈將“陳省身獎” 授予日本京都大學數理解析研究所的柏原正樹特任教授。這是日本人首次獲此殊榮。“陳省身獎”是國際數學聯盟頒佈的四大獎項之一, 是國際數學界的終身成就獎。每四年在國際數學家大會上頒發一次, 自 2010 年首次頒發以來至今已是第三屆。國際數學聯盟高度評價了柏原正樹教授爲代數解析學奠定的新型理論基礎, 讚揚了其長期爲數學教育事業做出的突出貢獻。並向其頒發 50 萬美元 (約合人民幣 340 萬元) 獎金, 按照柏原正樹本人意願將其中一半金額捐贈給了京都大學數理解析研究所。

在 2018 國際數學家大會開幕式上, 國際數學聯盟主席森重文稱讚柏原正樹 “將近五十年工作生涯在代數分析和表示論做出的傑出和重要的工作”。2018 年陳省身獎的評獎委員會成員分別是： 主席 Caroline Series (英國), Jordan Ellenberg (美國), Gerhard Huisken (德國), Michio Jimbo (日本) 和 Benoit Perthame (法國)。

陳省身獎 (Chern Medal Award) 是國際數學聯盟爲了紀念已故華人數學家陳省身而設立 , 獎勵在國際數學領域做出傑出成就的科學家, 這是國際數學聯盟首次以華人數學家命名的數學大獎。陳省身 1911 年 10 月 28 日生於浙江嘉興秀水縣, 美籍華裔數學大師、20 世紀最偉大的幾何學家之一, 生前曾長期任教於美國加州大學伯克利分校、芝加哥大學, 並在伯克利建立了美國國家數學科學研究所 (MSRI)。爲了紀念陳省身的卓越貢獻, 國際數學聯盟 (IMU) 設立了“陳省身獎”作爲國際數學界的終身成就獎。2018 年, 陳省身入選我國改革開放 40 周年最具影響力的外國專家。陳省身是 20 世紀重要的微分幾何學家, 被譽爲“微分幾何之父”之一。早在 20 世紀 40 年代, 陳省身他結合微分幾何與拓撲學的方法, 完成了兩項劃時代的重要工作 : 高斯-博內-陳定理和 Hermitian 流形的示性類理論, 爲大範圍微分幾何提供了不可缺少的工具。這些概念和工具, 已遠遠超過微分幾何與拓撲學的範圍, 成爲整個現代數學中的重要組成部分。

在那個中國國門初開的年代, 數學家華羅庚、陳景潤是人們心目中的英雄, 家喻戶曉。其實, 那時陳省身早已在國際數學界聲名鵲起, 卻爲國人所不知。有人根據狄多涅的純粹數學全貌和岩波數學百科全書、蘇聯出版的數學百科全書綜合量化分析得出的二十世紀數學家排名陳省身排在第 31 位, 華羅庚排在第 90 位, 陳景潤進入前 1500 名。陳省身在整體微分幾何上的卓越成就, 影響了整個數學的發展。

在 2018 年的國際數學家大會上, 柏原正樹獲得了陳省身獎, 以表彰他在代數分析和表示論中做出的傑出和基礎的貢獻。我們知道一個方程可能有多個解。例如, 方程 $\sin(x) = 0$ 有 0、π、2π、$k\pi$ 這一系列解。我們稱方程是多值的。另外, 有些函數在一些點是沒有定義的。例如函數 $1/x$, 當 x 趨近 0 時, 函數值趨向於無窮大, 它在 $x = 0$ 處是沒有定義的。我們稱這樣的點

爲奇點。在奇點附近, 方程的行爲變得怪異。如果這種多值性出現在奇點附近, 而不是像 sin 函數一樣週期性地變化, 就會成爲一個特殊的問題。數學家用方程對應的 monodromy 群來理解這種奇怪的行爲。這種群描述當方程的解在奇點附近變化時產生的解空間, 也就是解空間的拓撲結構。

線性微分方程是一種特殊類型的微分方程。任何一個線性微分方程都有著與之關聯的 monodromy 群。然而, 黎曼-希爾伯特問題問的是一個相反的問題: 對於每一個 monodromy 群, 是不是也存在一個相關聯的線性微分方程, 它在奇點附近的行爲由 monodromy 群來描述? 包含單個變數的線性微分方程已經在二十世紀六十年代解決了。在八十年代, 柏原正樹找到了問題的答案。他展示了對於任意一個 monodromy 群, 如何找到相關聯的線性微分方程, 也就是說, 找到在奇點附近具有特定行爲的所有線性微分方程。這是一個突出的成果, 而且, 柏原正樹的方法爲代數分析與拓撲這兩個領域搭建了一個重要的橋樑。

—本文作者任教中國上海市城市科技學校—

勘誤表

第 46 卷第 1 期 (181號), 46 頁, Line 8。

$p=2$. $X^2-X-26\equiv(X+2)^2 \pmod 5$, 因此

應爲 $p=5$. $X^2-X-26\equiv(X+2)^2 \pmod 5$, 因此。

第 46 卷第 1 期 (181號), 51 頁, Line -4。

(2) 若 k 是實二次體, 則 k 的單位群 (unit group) $\mathfrak{o}_k^\times$ 可表示成 $\{\pm\epsilon^n, n\in\}$。

應爲:

(2) 若 k 是實二次體, 則 k 的單位群 (unit group) $\mathfrak{o}_k^\times$ 可表示成 $\{\pm\epsilon^n, n\in\mathbb{Z}\}$。