數學傳播 46卷2期, pp. 85-101

圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積一般化方程式 —— 深化統合托勒密定理 ——

李輝濱

壹、前言

自三角形的正弦定理可推廣證明出所有圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理、從三角形與四邊形面積公式可循其軌跡推廣求證出平面凸 n 邊形面積公式、三角形餘弦定理亦可推廣到平面凸 (凹) n 邊形的餘弦定理、$\cdots$ 等等, 在平面幾何學的範疇裡, 研究創新者往往都有這樣的一般化推廣理念。凡順勢透過一般化操作運算、推廣成功的作品, 必然都會擁有完美獨一的統合特質! 現在, 要由圓內接四邊形各頂角的合角、分角性質開始探討分析起, 之後再將它逐一推廣延伸到圓內接多邊形的各同類情況! 而在推證演繹過程中, 又衍生開展出新的主題; 那就是圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的組合關係方程式! 這個被嚴格延伸的廣義一般化方程式能完美的統合所有圓內接任意邊形相對應的方程式, 更確切地說; 它實已完全統一了下述的托勒密定理 (Ptolemy's theorem): 圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_1}=V_4$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=x$, $\overline{A_2A_4}=y$, 則托勒密定理關係方程式為 $xy=V_1V_3+V_2V_4$。如圖 T。

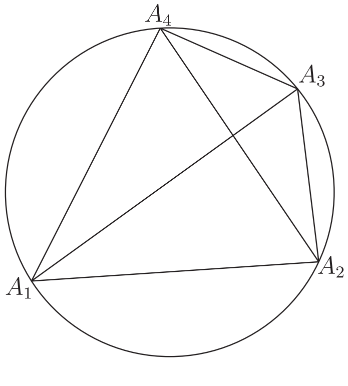

圖 T

細心比對圓內接四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、$\cdots$ 等圖形內各邊長與對角線長度之間相關連的方程式, 發現到這所有公式彼此之間都存在著共同一致規律特性! 即每一公式中的各項式長度乘積組合皆遵守著特定規則, 而項式集體結合其來就形成整齊秩序排列的方程式! 因此, 特地將它們彙整、歸納, 進而編著成圓內接 n 邊形一般化公式中各項式依序排列完整的 2 個綜合法則。循著這法則的指引, 可以精準細膩的書寫出任一個圓內接 n 邊形完備特有的正確方程式!

貳、本文

接著在本文敘述的導證過程中, 將詳盡列舉、闡述出圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的關係方程式的2個綜合法則, 並逐步解說各種不同公式推證時, 在規則下見證出他們相互之間的一致共同規律秩序關係! 當在理論驗證時必頻繁引用到最普遍的三角形正弦定理公式, 以及平面幾何學中慣常應用到的輔助線幾何圖形作圖法, 來達成推理實證的演繹工作。同時, 在下列撰文推理引證的運算過程中, 需應用或對照到下述已知的 2 個基本數學性質;

一、基本數學性質—引理:

引理1: 三角形正弦定理：請見下圖 1, 半徑 R 的圓內接三角形 $A_1A_2A_3$, 令邊長

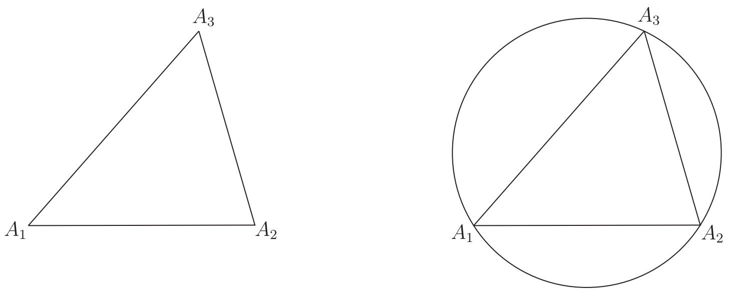

圖1

線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_1}=V_3$, 則精簡、對稱的正弦定理公式爲:

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R \tag{T-1}$$

證明: 略。

引理2: 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理:

圖 1-a, 半徑 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\ldots$, $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_1}=V_n$,
而邊長 V_1 所對應的圓周角爲 θ_1, V_2 所對應的圓周角爲 θ_2, V_3 所對應的圓周角爲 θ_3, $\ldots$,

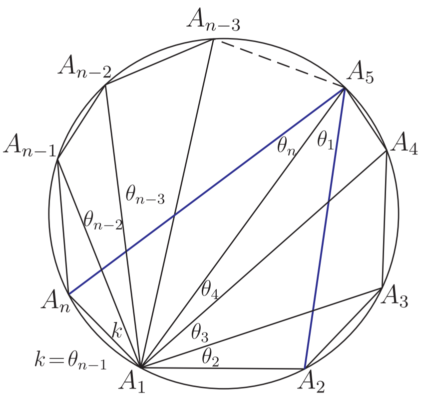

圖 1-a

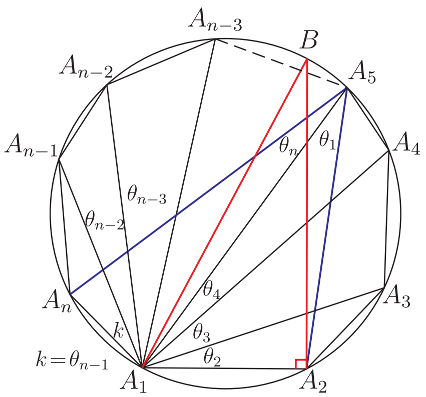

圖 1-b

V_{n-2} 所對應的圓周角爲 θ_{n-2}, V_{n-1} 所對應的圓周角爲 θ_{n-1}, V_n 所對應的圓周角爲 θ_n, 則此多邊形各邊長所對應的圓周角的正弦定理方程式爲下列 (T-2) 式:

$$\frac{V_1}{\sin\theta_1}=\frac{V_2}{\sin\theta_2}=\frac{V_3}{\sin\theta_3}=\cdots=\frac{V_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}=\frac{V_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{V_n}{\sin\theta_n}=2R \tag{T-2}$$

證明: 應用輔助線幾何圖形作圖法來達成推理實證。

見圖 1-b, 自頂點 A_1 作一直線通過圓心並與圓周相交於 B 點, 線段長 A_1B 等於此圓的直徑長 $2R$, 再連接線段長 A_2B, 得 $\triangle A_1A_2B$ 爲直角三角形, 邊長 V_1 所對應的圓周角 $\theta_1=\angle A_1BA_2$, 所以 $V_1=2R\sin(\angle A_1BA_2)=2R\sin\theta_1$。仿此過程並引申推廣成; 弦 $V_1,V_2,\ldots,V_n$ 對應的圓周角大小分別爲 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$, 根據正弦定理及外接圓半徑 R 的關係而有 (T-2) 式。

二、圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的一般化方程式

首先要先行證明出圓內接四邊形各頂角的合角、分角性質關係式, 再擴增推廣到圓內接 n 邊形各頂角的合角、分角性質關係式, 之後再推展到此圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的關係方程式。於此就由合、分角性質開始;

A. **圓內接多邊形各頂角的合角、分角正弦式性質**:

[A-1]. 圓內接四邊形各頂角的合角、分角正弦式性質:

請見圖 2 半徑 R 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_1}=V_4$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=x$, $\overline{A_2A_4}=y$, 頂角 $A_1=k+m$, k 是弧長 A_3A_4 的圓周角, m 是弧長 A_2A_3 的圓周角, 頂角 A_1 是合角, 而 k 與 m 則是頂角 A_1 的分角。接下來要對圖 2 作適宜的輔助線以連繫相關的幾何形量, 藉以增益思考力襄助解題, 並詳實解說輔助線完成圖形所具體呈現的幾何意義;

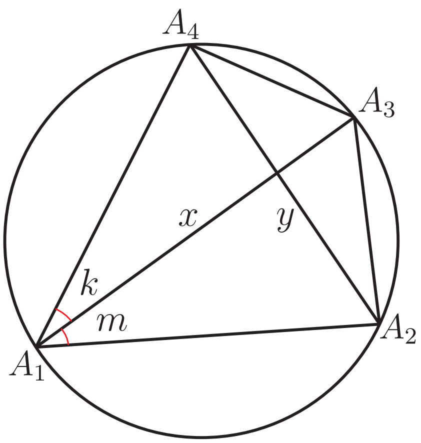

圖2

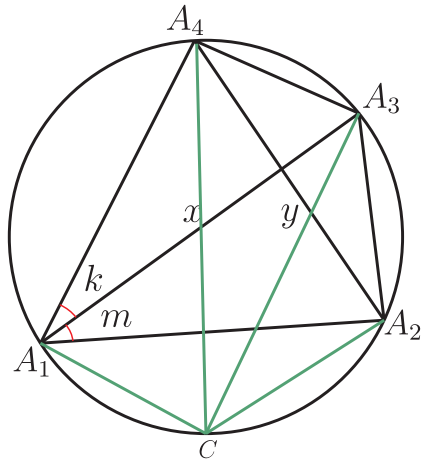

圖3

(A-1-1). 作幾何輔助線圖:

(a) 請看圖 3 通過頂點 A_2 作一直線平行對角線長 $\overline{A_1A_3}$ 且與圓周交於 C 點,

(b) 連接線段 CA_1、CA_4、CA_3, 得一新構的四邊形 $A_1CA_2A_3$, 檢視這圖形的幾何意義, 得知其恰為一個等腰梯形, 因此又得 $\overline{A_1C} = \overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_1A_2} = V_1 = \overline{CA_3}$,

(c) 再通過頂點 A_1 作一直線 A_1N 平行線段 CA_4, 見下圖4。

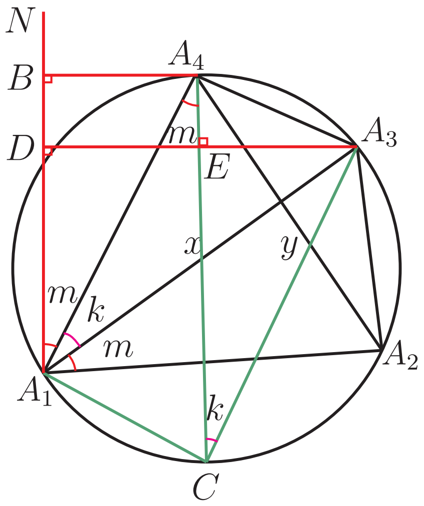

圖4

(d) 通過頂點 A_3 作一直線 A_3D 垂直於直線 A_1N, 使相交於垂直點 D, 且 A_3D 又與 CA_4 垂直相交於 E 點。另通過頂點 A_4 作一直線 A_4B 垂直於直線 A_1N, 使相交於垂直點 B, 所有相對應的圓周角皆標示在圖中的正確適當位置。輔助線作圖完成。

(A-1-2). 圖 4 輔助線圖形的正弦式幾何意義:

(a) 圖 4 就直角三角形 $\triangle A_1A_3D$ 言, 斜邊長 x, 線段長 $\overline{A_3D} = x\sin(k+m) = x\sin A_1$。

(b) 就直角 $\triangle A_1A_4B$ 言, 斜邊長 V_4, 線段長 $\overline{A_4B} = \overline{DE} = V_4 \sin m$。

(c) 就直角 $\triangle CA_3E$ 言, 斜邊長 V_1, 線段長 $\overline{A_3E} = V_1 \sin k$。

(d) 由線段長

$$\overline{A_3D} = \overline{A_3E} + \overline{DE} = \overline{A_3E} + \overline{A_4B} \Rightarrow x \sin A_1 = V_4 \sin m + V_1 \sin k, \qquad (1)$$

由 (1) 式等號兩側同除以

$$xV_4V_1 \Rightarrow \frac{\sin A_1}{V_4V_1} = \frac{\sin(m+k)}{V_4V_1} = \frac{\sin m}{V_1 x} + \frac{\sin k}{xV_4}. \qquad (2)$$

方程式 (2) 式對圖 2 而言, 因頂角 $A_1 = k + m = m + k$, 兩相比較, 等式型態類似; 兩個圓周角 k 與 m 相加等於頂角 A_1, 而分別由 $\sin k$ 與 $\sin m$ 組成的各自分式型式相加等於由頂角 $\sin A_1$ 組成的分式型式, 可看出方程式 (2) 式也具類似加法性等式型態。而 (2) 式的特別處是各項的分母皆爲角度兩側的邊長乘積。(2) 式稱爲頂角與圓周角的合分角正弦性質分式型組合式。因頂角共計有 4 個, 所以必然可再得到另外 3 組與 (2) 式完全對稱的正弦性質分式型組合方程式。

[A-2]. 托勒密定理 (Ptolemy theorem)

對圖 2 而言, 再由 (1) 式 $x \sin A_1 = V_4 \sin m + V_1 \sin k \Rightarrow$ 等號兩側同乘以 $2R \Rightarrow 2Rx \sin A_1 = 2RV_4 \sin m + 2RV_1 \sin k \Rightarrow$ 再引用三角形正弦定理, 得 $2R \sin A_1 = y$, $2R \sin m = V_2$, $2R \sin k = V_3$, 代入等式中, 移項後, 得

$$xy = V_1V_3 + V_2V_4 \qquad \text{(Ptolemy's theorem)}. \qquad (3)$$

方程式 (3) 式即爲著名的圓內接四邊形兩對角線長度乘積的托勒密公式。所以由圓內接四邊形圖形的方程式 (1) 式與三角形正弦定理即可推導出托勒密公式。

[A-3]. 圓內接五邊形各頂角的合角、分角正弦式性質:

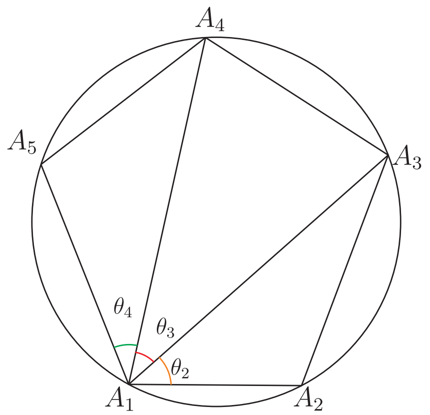

圖 5

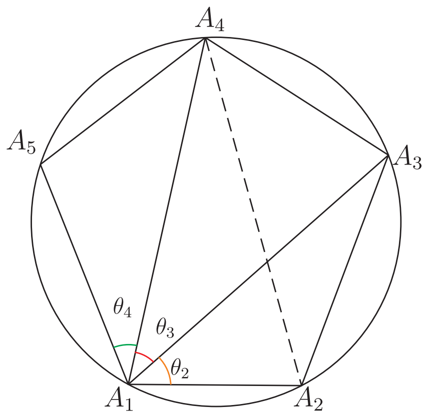

圖 6

請見圖 5 半徑 R 的圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_5}=V_4$, $\overline{A_5A_1}=V_5$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, $\overline{A_2A_5}=d_{25}$, 而頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4$, 對圖 6 中的四邊形 $A_1A_2A_4A_5$ 言, 由圓內接四邊形頂角的合分角正弦式性質, 可得

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin(\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}. \tag{4}$$

而再對圖 5 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 得 $\dfrac{\sin(\theta_3+\theta_2)}{d_{14}V_1}=\dfrac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$, 代回上(4) 式, 因而獲得

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1}=\frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}. \tag{5}$$

方程式 (5) 式稱爲圓內接五邊形頂角與圓周角的合分角正弦性質分式型組合式。方程式 (5) 式的全體完整排列式的內涵型態是呈現規律性分佈的!

[A-4]. 圓內接六邊形各頂角的合角、分角正弦式性質:

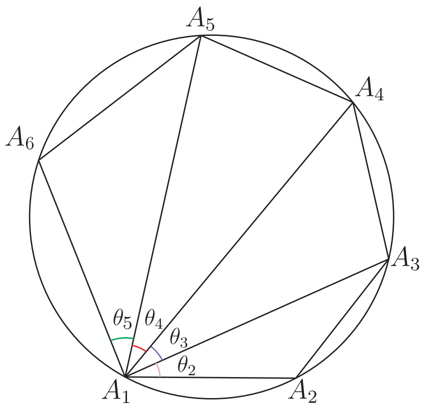

圖7

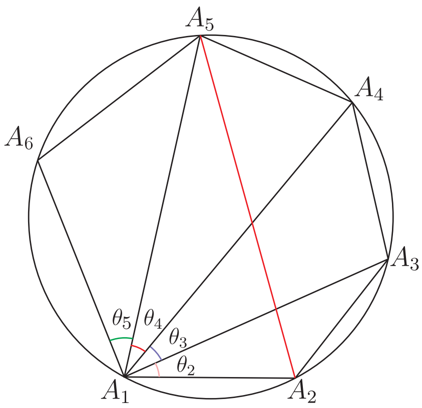

圖8

參考圖 7 半徑 R 的圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\ldots$, $\overline{A_5A_6}=V_5$, $\overline{A_6A_1}=V_6$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, $\overline{A_1A_5}=d_{15}$, 而頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5$, 仿效上述五邊形操作法, 對圖 8 中的四邊形 $A_1A_2A_5A_6$ 言, 可得

$$\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=\frac{\sin(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_6V_1}=\frac{\sin\theta_5}{V_6d_{15}}+\frac{\sin(\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{d_{15}V_1},$$

又對圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 言,

$$\frac{\sin(\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{d_{15}V_1}=\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.$$

代回上式, 即得

$$\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=\frac{\sin(\theta_5+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{V_6V_1}=\frac{\sin\theta_5}{V_6d_{15}}+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}. \tag{6}$$

方程式 (6) 式稱爲圓內接六邊形頂角與圓周角的合分角正弦性質分式型組合式。

[A-5]. 圓內接七邊形各頂角的合角、分角正弦式性質:

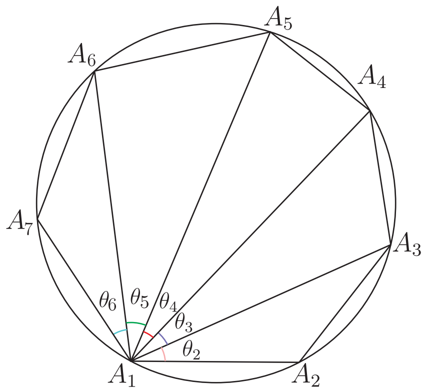

圖 9

見圖 9 半徑 R 的圓內接七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\ldots$, $\overline{A_6A_7}=V_6$, $\overline{A_7A_1}=V_7$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, $\overline{A_1A_5}=d_{15}$, $\overline{A_1A_6}=d_{16}$, 而頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6$, 仿效上述五、六邊形推演證明法, 省略證明過程, 得

$$\frac{\sin A_1}{V_7V_1}=\frac{\sin\theta_6}{V_7d_{16}}+\frac{\sin\theta_5}{d_{16}d_{15}}+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}. \tag{7}$$

方程式 (7) 式稱爲圓內接七邊形頂角與圓周角的合分角正弦性質分式型組合式。

$\vdots$

[A-n]. 圓內接 n 邊形各頂角的合角、分角正弦式性質:

見下圖 10 半徑 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, 令邊長線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$,

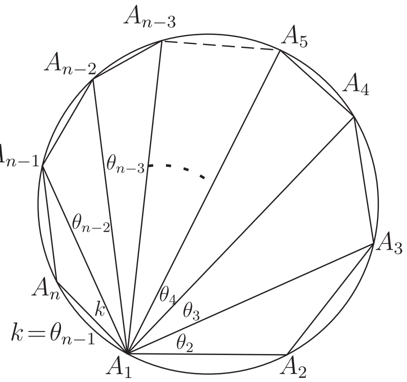

圖 10

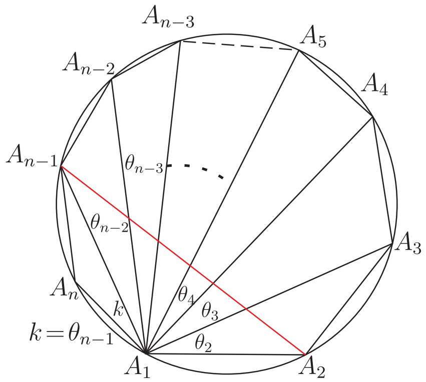

圖 11

$\overline{A_2A_3}=V_2$, ..., $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_1}=V_n$, 對角線長 $\overline{A_1A_3}=d_{13}$, $\overline{A_1A_4}=d_{14}$, $\overline{A_1A_5}=d_{15}$, $\overline{A_1A_6}=d_{16}$, ..., $\overline{A_1A_{n-3}}=d_{1(n-3)}$, $\overline{A_1A_{n-2}}=d_{1(n-2)}$, $\overline{A_1A_{n-1}}=d_{1(n-1)}$ 而頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3+\theta_4+\cdots+\theta_{n-3}+\theta_{n-2}+\theta_{n-1}$, 接下來, 要以數學歸納法來證明圓內接 n 邊形各頂角的合角、分角正弦式性質;

(1) 對圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4 \Rightarrow \dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}=\dfrac{\sin\theta_3}{V_4d_{13}}+\dfrac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$ 關係式成立。

(2) 對圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5 \Rightarrow \dfrac{\sin A_1}{V_5V_1}=\dfrac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}}+\dfrac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\dfrac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}$ 成立。

(3) 令圓內接 $n-1$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}$, 下列關係式成立;

$$\frac{\sin A_1}{V_{n-1}V_1}=\frac{\sin\theta_{n-2}}{V_{n-1}d_{1(n-2)}}+\frac{\sin\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}}+\cdots+\frac{\sin\theta_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.$$

(4) 參閱圖 10 的圓內接 n 邊形;

(a) 先取定圖 10 的圓內接四邊形 $A_1A_2A_{n-1}A_n$, 見圖 11, 由圓內接四邊形合分角性質即得起首式;

$$\begin{aligned}\frac{\sin A_1}{V_nV_1}&=\frac{\sin[\theta_{n-1}+(\theta_{n-2}+\theta_{n-3}+\cdots+\theta_4+\theta_3+\theta_2)]}{V_nV_1}\\&=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin(\theta_{n-2}+\theta_{n-3}+\cdots+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{d_{1(n-1)}V_1}.\end{aligned}\tag{8}$$

(b) 再取定圖 10 的圓內接 $n-1$ 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}$ 的接續式, 得

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\angle A_{n-1}A_1A_2)}{d_{1(n-1)}V_1}&=\frac{\sin(\theta_{n-2}+\theta_{n-3}+\theta_{n-4}+\cdots+\theta_4+\theta_3+\theta_2)}{d_{1(n-1)}V_1}\\&=\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\frac{\sin\theta_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}}+\cdots+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.\end{aligned}\tag{9}$$

(c) 將 (9) 式代入 (8) 式即得下列所求的 (10) 式;

$$\frac{\sin A_1}{V_nV_1}=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\cdots+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.\tag{10}$$

(5) 綜合上述 (1)、(2)、(3)、(4) 證明, 可知: 對任意正整數 n, (10) 式皆成立。方程式 (10) 式稱爲圓內接 n 邊形頂角與圓周角的合分角正弦性質分式型組合式。方程式 (10) 式的全體完整排列式的各項內涵也是完全呈現規律性分佈的型態!

B. 圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的一般化方程式

[B-1]. 歸納圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積方程式的綜合法則

現在重新審視方程式 (10) 式的各項內容, 可察覺到各個分式項的分母是由 2 個邊長與 $(n-3)$ 段對角線長有序排列而成。而各個分式項的分子部份都是單一角度的正弦函數, 因這些單一角度都是圓周角, 故分子部份也都必定與邊長長度有關連。在同一個圓周裡藉著充分應用每一個邊長與其所對應的圓周角正弦定理, 即能證明出圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積組合的關係方程式。

以下就是透過比對研究歸納出的 2 個綜合法則, 用來指引如何搜尋邊長與對角線長的乘積組合, 再編列出此圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積關係方程式, 請看圖 12, 半徑 R 的圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$, 有前述圖 10

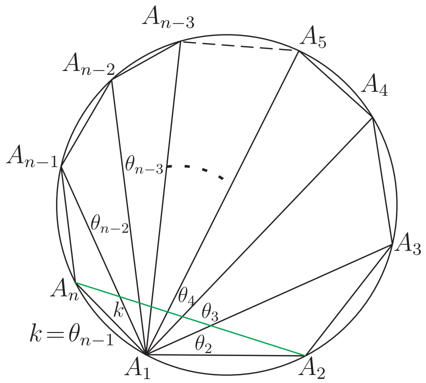

圖 12

所列的各邊長與對角線長度, 在圖 12 處又多加一對角線長 $\overline{A_2A_n} = d_{2n}$, 理論上求證計算這些公式時, 由圖形的一般性, 直觀的選取頂點 A_1 作爲定點, 再由此定點 A_1 引出 $(n-3)$ 段對角線長, 這些對角線都集中相交在定點 A_1 處而不再有其它相互的交點, 則這被預先歸納列舉出的每一個圓內接多邊形公式的法則是;

綜合法則 [1]. 公式的等號左側內容是定點處的頂角 A_1 在圓周所張開的對角線長 d_{2n} 與由此定點 A_1 所引出的 $(n-3)$ 段對角線長的連乘積, 其內涵完全沒有牽涉到各邊邊長, 此項連乘積是

$$d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1} d_{1i} = d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}.$$

綜合法則 [2]. 公式的等號右側內容總計有 $(n-2)$ 項, 且每一項都是 $(n-2)$ 條線段長度的連乘積; 法則 [2] 內有 $(n-2)$ 項, 且每項都不一樣, 需詳盡描述於下:

(2-1) 先將圖 12 圓內接多邊形內的所有線段長區分成 2 個集合; 第 1 集合是與指定點 A_1 有直接連結關係的線段長, 其爲 $\{V_n, V_1, d_{13}, d_{14}, d_{15}, \ldots, d_{1(n-2)}, d_{1(n-1)}\}$, 此集合總計有 $(n-1)$ 條線段長。第 2 集合是此多邊形上與定點 A_1 無直接連結的其餘邊長線段長, 其依圖形順序排列爲 $\{V_2, V_3, V_4, V_5, \ldots, V_{n-4}, V_{n-3}, V_{n-2}, V_{n-1}\}$, 而此集合總計

有 $(n-2)$ 條邊長線段長。※ 現在要在第 2 集合內依序取出 1 元素, 並與第 1 集合內相異的 $(n-3)$ 條適當線段長相乘以形成不同連乘積的各項。

(2-2) 公式的等號右側內第 1 項是由第 2 集合內第 1 個邊長元素 V_2 所引領的項; 邊長 V_2 要和第 1 集合內的 $(n-3)$ 條線段長形成連乘積, 看圖 12, 與邊長 V_2 有直接連結關係的線段是 V_1 和 d_{13}, 扣掉這兩者, 則第 1 項的線段長連乘積為
$V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$, 是個有$(n-2)$條線段長度連乘積的項。

(2-3) 由圖 12 知, 與邊長 V_3 有直接連結關係的線段是 d_{14} 和 d_{13}, 扣掉這兩者, 則第 2 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$。

(2-4) 由圖 12 知, 與邊長 V_4 有直接連結關係的線段是 d_{14} 和 d_{15}, 扣掉這兩者, 則第 3 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$。

(2-5) 同理, 與邊長 V_5 有直接連結關係的線段是 d_{15} 和 d_{16}, 扣掉這兩者, 則第 4 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}d_{19}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$。

(2-6) 同理, 與邊長 V_6 有直接連結關係的線段是 d_{16} 和 d_{17}, 扣掉這兩者, 則第 5 項的 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$。

(2-7) 持續上述同樣的操作模式, $\cdots$ 直到邊長 V_{n-4}, 與邊長 V_{n-4} 有直接連結關係的線段是 $d_{1(n-4)}$ 和 $d_{1(n-3)}$, 扣掉這兩者, 則此第 $(n-5)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-4}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}\cdot d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$。

(2-8) 與邊長 V_{n-3} 有直接連結關係的線段是 $d_{1(n-3)}$ 和 $d_{1(n-2)}$, 則此第 $(n-4)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-3}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}\cdot d_{1(n-1)}$。

(2-9) 與邊長 V_{n-2} 有直接連結關係的線段是 $d_{1(n-2)}$ 和 $d_{1(n-1)}$, 則此第 $(n-3)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-2}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}$。

(2-10) 與邊長 V_{n-1} 有直接連結關係的線段是 $d_{1(n-1)}$ 和 V_n, 則此第 $(n-2)$ 項的所有 $(n-2)$ 條線段長連乘積為 $V_{n-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}$。

(2-11) 現在特將上述第 1 項、第 2 項、第 3 項、$\cdots$、第 $(n-4)$ 項、第 $(n-3)$ 項、第 $(n-2)$ 項等總計有 $(n-2)$ 項的結果全部相加起來, 就必得到綜合法則 [2] 所規範出方程式公式的等號右側完整精確的詳盡內容!

只要遵循上述研究歸納出的2個綜合法則, 任何學習者皆能自己編列出屬於這圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積的關係方程式。

[B-2]. 展示圓內接多邊形各邊長與對角線長度乘積方程式與驗證

[1]. 圓內接四邊形

[1-a]. 展示圓內接四邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式: 參考下圖 13。

由 $n = 4$ 並根據 [B-1] 的 2 個綜合法則, 先列出兩組線段長集合; $\{V_4, V_1, d_{13}\}$ 與 $\{V_2, V_3\}$, 由法則 [2] 得 $V_2V_4 + V_3V_1$, 再由法則 [1] 得 $d_{24}d_{13}$, 將兩關係式結合就形成 $\Rightarrow\ d_{24}d_{13} = V_2V_4 + V_3V_1$ (Ptolemy theorem).

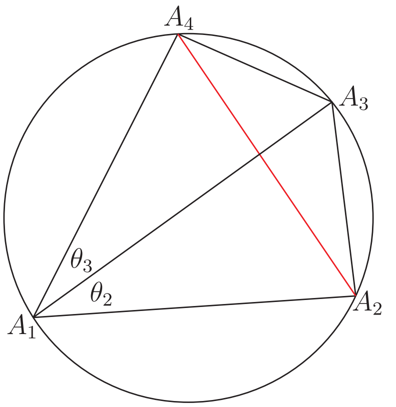

圖 13

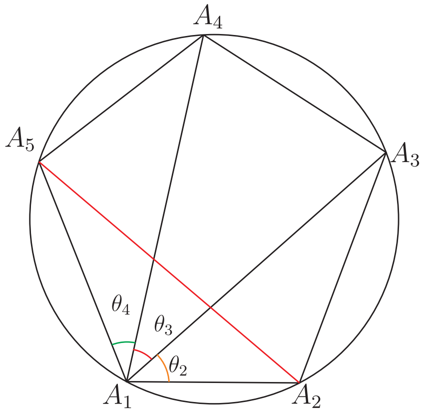

圖 14

[1-b]. 證明：略。請參考 [A-2] 的證明過程。

[2]. 圓內接五邊形

[2-a]. 展示圓內接五邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式： 參考圖 14。由 $n = 5$ 並根據 [B-1] 的 2 個綜合法則, 由法則 [1] 得 $d_{25}d_{13}d_{14}$, 由法則 [2] 再列出兩組線段長集合; $\{V_5, V_1, d_{13}, d_{14}\}$ 與 $\{V_2, V_3, V_4\}$, 得 $V_2V_5d_{14} + V_3V_5V_1 + V_4V_1d_{13}$, 將兩關係式結合

$$\Rightarrow\ d_{25}d_{13}d_{14} = V_2V_5d_{14} + V_3V_5V_1 + V_4V_1d_{13}. \tag{11}$$

方程式 (11) 式爲圓內接五邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式!

[2-b]. 證明：由方程式 (5) 式:

$$\frac{\sin A_1}{V_5V_1} = \frac{\sin\theta_4}{V_5d_{14}} + \frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.$$

見圖 14 並應用引理 2 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理, 分別得下列各式;

$$\sin A_1 = \frac{d_{25}}{2R},\quad \sin\theta_4 = \frac{V_4}{2R},\quad \sin\theta_3 = \frac{V_3}{2R},\quad \sin\theta_2 = \frac{V_2}{2R},$$

一起同步代入 (5) 式, 並化簡, 得

$$\frac{d_{25}}{V_5V_1} = \frac{V_4}{V_5d_{14}} + \frac{V_3}{d_{14}d_{13}} + \frac{V_2}{d_{13}V_1},$$

再將等號兩側同乘以 $V_5V_1d_{13}d_{14}$, 並移項, 整理, 最後即證明出

$$d_{25}d_{13}d_{14} = V_2V_5d_{14} + V_3V_5V_1 + V_4V_1d_{13}.$$

[3]. 圓內接六邊形

[3-a]. 展示圓內接六邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式：參考圖 15。

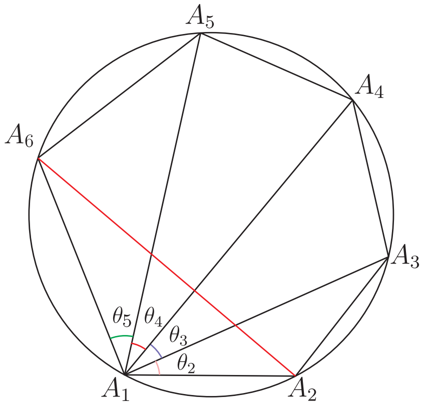

圖 15

由 $n=6$ 並根據 [B-1] 的 2 個綜合法則, 由法則 [1] 得 $d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}$, 由法則 [2] 再列出兩組線段長集合; $\{V_6, V_1, d_{13}, d_{14}, d_{15}\}$ 與 $\{V_2, V_3, V_4, V_5\}$, 得 $V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14}$, 將兩關係式結合成多項式

$$\Rightarrow\ d_{26}d_{13}d_{14}d_{15}=V_2V_6d_{14}d_{15}+V_3V_6V_1d_{15}+V_4V_6V_1d_{13}+V_5V_1d_{13}d_{14}. \tag{12}$$

方程式 (12) 式為圓內接六邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式!

[3-b]. 證明：略。請參閱下列 [5-b] 節的同類證明。

[4]. 省略繼續展示與證明 $n=7,8,9,10,11,\ldots,(n-1)$ 等等的各同類情形。

$\vdots$

[5]. 圓內接 n 邊形

[5-a]. 展示圓內接 n 邊形內各邊長與對角線長度乘積方程式：參考圖16。

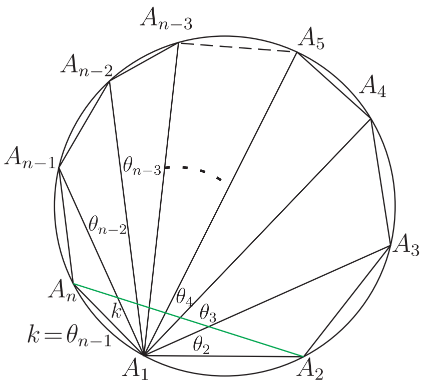

圖 16

依據前述 [B-1] 的 2 個綜合法則, 由法則 [1] 得下列對角線乘積式;

$$d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i}=d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)},$$

再由法則 [2] 歸納出總計有 $(n-2)$ 項乘積式全部相加的結果, 現在要將法則 [1] 與法則 [2] 兩關係式結合成完整的多項式方程式於下述的證明內容中 (因方程式很長, 不再重複敘述);

[5-b]. 證明：由 [A-n] 推證出的下列完全對稱的方程式 (10) 式:

$$\frac{\sin A_1}{V_nV_1}=\frac{\sin\theta_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\cdots+\frac{\sin\theta_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{\sin\theta_2}{d_{13}V_1}.$$

見圖 16 並應用引理 2 圓內接多邊形各圓周角的正弦定理, 仿效五邊形證明模式, 得

$$\sin A_1=\frac{d_{2n}}{2R},\ \sin\theta_{n-1}=\frac{V_{n-1}}{2R},\ \sin\theta_{n-2}=\frac{V_{n-2}}{2R},\ldots,\ \sin\theta_3=\frac{V_3}{2R},\ \sin\theta_2=\frac{V_2}{2R},$$

將這許多正弦式一起同步代入 (10) 式, 並化簡, 得下列分式型組合的方程式;

$$\frac{d_{2n}}{V_nV_1}=\frac{V_{n-1}}{V_nd_{1(n-1)}}+\frac{V_{n-2}}{d_{1(n-1)}d_{1(n-2)}}+\frac{V_{n-3}}{d_{1(n-2)}d_{1(n-3)}}+\cdots+\frac{V_4}{d_{15}d_{14}}+\frac{V_3}{d_{14}d_{13}}+\frac{V_2}{d_{13}V_1},$$

再將上述線段長組合方程式的等號兩側同乘以所有分母部份的最小公倍數

$$V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)},$$

而形成純線段長度乘積的整式項多項式, 並移項, 整理, 最後即證明出完整精確內容的下列詳盡方程式 (13) 式;

$$\begin{aligned}d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i}&=d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&=V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&\quad+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&\quad+V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&\quad+V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&\quad+V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+\cdots\\&\quad+V_{n-4}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}\cdot d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\&\quad+V_{n-3}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}\cdot d_{1(n-1)}\\&\quad+V_{n-2}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}\\&\quad+V_{n-1}V_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}.\end{aligned}\tag{13}$$

方程式 (13) 式爲圓內接 n 邊形內各邊長與對角線長度乘積一般化方程式! 方程式 (13) 式的等號右側總計有 $(n-2)$ 項式相加而成, 且每一項也都由 $(n-2)$ 個線段長度連乘積組合成型。仔細觀察比對每一項, 可看到其線段排列的順序結構完全呈現共同一致規律特性!

C. 方程式的統合性

方程式 (13) 式的結構型態完全統一了圓內接任意邊形內各邊長與對角線長度乘積一般化方程式, 試看以下敘述所作逐步縮減推理的統合分析過程;

(1). 見下圖 17, 若使頂點 A_{n-1} 趨近於頂點 A_n, 則頂點 A_{n-1} 必疊置於頂點 A_n 上,

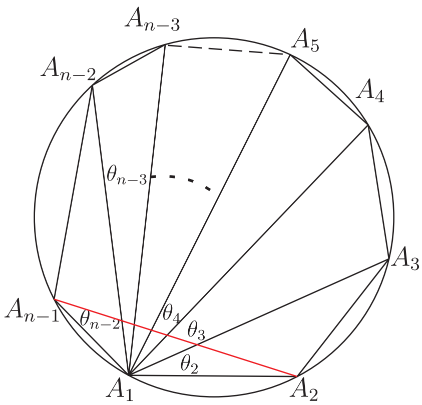

圖 17

使 $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}=0$, 而 $\overline{A_2A_n}=d_{2n}$ 要變換成 $\overline{A_2A_{n-1}}=d_{2(n-1)}$, 方程式 (13) 式最末一項爲 0, 修正爲

$$\begin{aligned}
d_{2(n-1)}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i}&=d_{2(n-1)}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&=V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_4V_nV_1d_{13}\cdot d_{16}d_{17}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_5V_nV_1d_{13}d_{14}\cdot d_{17}d_{18}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_6V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdot d_{18}d_{19}d_{1(10)}\cdots d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}+\cdots\\
&\quad+V_{n-4}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}\cdot d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_{n-3}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-6)}d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}\cdot d_{1(n-1)}\\
&\quad+V_{n-2}V_nV_1d_{13}d_{14}d_{15}\cdots d_{1(n-5)}d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}.
\end{aligned}$$

再將上列的縮減修正方程式全部除以 $d_{1(n-1)}$, 得下式;

$$\begin{aligned}
d_{2(n-1)} \cdot \prod_{i=3}^{n-2} d_{1i} &= d_{2(n-1)} d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&= V_2 V_n d_{14} d_{15} d_{16} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&+ V_3 V_n V_1 d_{15} d_{16} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&+ V_4 V_n V_1 d_{13} \cdot d_{16} d_{17} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&+ V_5 V_n V_1 d_{13} d_{14} \cdot d_{17} d_{18} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&+ V_6 V_n V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdot d_{18} d_{19} d_{1(10)} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} + \cdots \\
&+ V_{n-4} V_n V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-6)} d_{1(n-5)} \cdot d_{1(n-2)} \\
&+ V_{n-3} V_n V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-6)} d_{1(n-5)} d_{1(n-4)} \\
&+ V_{n-2} V_n V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-5)} d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} / d_{1(n-1)}.
\end{aligned} \tag{13*}$$

至此, n 邊形已經退化成 $n-1$ 邊形, 圖 17 中 $\overline{A_n A_1} = V_n$ 要變換成 $\overline{A_{n-1} A_1} = V_{n-1}$, 而 $d_{1(n-1)}$ 也要變換成 $\overline{A_{n-1} A_1} = V_{n-1}$, 方程式 (13^*) 式也要變換成下式;

$$\begin{aligned}
d_{2(n-1)} \cdot \prod_{i=3}^{n-2} d_{1i} &= d_{2(n-1)} d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} d_{17} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&= V_2 V_{n-1} d_{14} d_{15} d_{16} d_{17} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&\quad + V_3 V_{n-1} V_1 d_{15} d_{16} d_{17} \cdots d_{1(n-4)} d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&\quad + V_4 V_{n-1} V_1 d_{13} \cdot d_{16} d_{17} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&\quad + V_5 V_{n-1} V_1 d_{13} d_{14} \cdot d_{17} d_{18} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} \\
&\quad + V_6 V_{n-1} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdot d_{18} d_{19} d_{1(10)} \cdots d_{1(n-3)} d_{1(n-2)} + \cdots \\
&\quad + V_{n-4} V_{n-1} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-6)} d_{1(n-5)} \cdot d_{1(n-2)} \\
&\quad + V_{n-3} V_{n-1} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-6)} d_{1(n-5)} d_{1(n-4)} \\
&\quad + V_{n-2} V_1 d_{13} d_{14} d_{15} \cdots d_{1(n-5)} d_{1(n-4)} d_{1(n-3)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

方程式 (14) 式爲圓內接 $n-1$ 邊形內各邊長與對角線長度乘積一般化方程式! 方程式 (14) 式的等號右側總計有 $(n-3)$ 項式相加而成, 且每一項也都由 $(n-3)$ 個線段長度連乘積組合成型。

(2). 若換成使頂點 $A_4, A_5, A_6, \ldots, A_{n-1}$ 等都聚集一起同步趨近於頂點 A_n, 則頂點 $A_4, A_5, A_6, \ldots, A_{n-1}$ 必疊置於頂點 A_n 上, 使 $\overline{A_{n-1} A_n} = V_{n-1} = 0 = V_{n-2} = V_{n-3} = \cdots = V_6 = V_5 = V_4$, 代入 (13) 式, 方程式 (13) 式的等號右側就剩下 2 項爲下式;

$$
\begin{aligned}
d_{2n}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}d_{1i} &= d_{2n}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&= V_2V_nd_{14}d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}\\
&\quad +V_3V_nV_1d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}.
\end{aligned}
$$

而 $\overline{A_2A_n}=d_{2n}$ 要變換成 $\overline{A_2A_4}=d_{24}$, 且公因式 $d_{15}d_{16}\cdots d_{1(n-4)}d_{1(n-3)}d_{1(n-2)}d_{1(n-1)}$ 要消去, 則上述化成下式; $d_{24}d_{13}d_{14}=V_2V_nd_{14}+V_3V_nV_1$, 現在 V_n 要變換成 V_4, 退化成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$, 而等號兩側的 d_{14} 也要變換成 V_4, 代入後再化簡, 最後即得出托勒密方程式; $d_{24}d_{13}=V_2V_4+V_3V_1$ (Ptolemy theorem)。所以, 方程式 (13) 式也涵蓋統一了托勒密方程式! 至此, 所有的推演驗證過程再次強化了本文各節次內容裡這所有公式獲得證明的嚴謹理論基礎!

參、結論

1. 本文由開始搜尋主題, 觀察, 比對, 分類, 彙整歸納, 統合編著等等依序的完整處理步驟, 是有效率的提供了思考、解決問題的六大流程! 只要循序漸進分析探討, 配合經驗與智慧的融合, 就能試煉出豐富的整合創意能力, 發覺新事物。由於時今的國高中會考、大學學測與指考、特色班招生等都須強調解析推理與統合歸納論證能力, 即須透過這六大流程的堅定洗禮來成就美好願望!
2. 圓內接 n 邊形或是圓內接任意邊形內各邊長與對角線長度乘積一般化方程式其內容竟然是由選定點開始發展; 由選定點的頂角在圓周所張開的對角線長與由此定點所引出的 $(n-3)$ 段對角線長的連乘積這個特徵思維所起動, 引發了各邊長所引領的相異線段連乘積項, 因而組合連結成同類的各方程式, 也促使集結各方程式的共同一致規律特性而歸納編理出 2 個綜合法則。這樣的法則順暢精準的規範排列出所有方程式的各個完整要項。
3. 輔助線幾何作圖法的妙用是; 加多了可資應用的輔助思考條件, 能增益更寬廣的思考力, 像可適當裁剪枝葉免除複雜繁瑣, 使原命題的解析脈絡更趨於明朗、簡單化, 襄助解題, 特別是能將某些外觀上看似毫無關連的線段與角度, 透過若干輔助線的作圖連結即可讓這些幾何形量整合成相依附的關鍵方程式!
4. 明顯無疑地, 本文就是圓內接四邊形托勒密定理的推廣! 將四邊形延伸一般化到圓內接多邊形的任意情形, 所以, 方程式 (13) 式就完美統一了圓內接多邊形類型的任何方程式, 使托勒密定理、圓內接五邊形、圓內接六邊形、$\cdots$、圓內接 $n-2$ 邊形、圓內接 $n-1$ 邊形等公式都成爲圓內接 n 邊形方程式 (13) 式的特例!

參考文獻

1. 林倉億。數學歸納法專輯。HPM 通訊第八卷第二、三期, 2005年 3月。
2. 李輝濱。圓內接奇數邊數多邊形的正弦定理。數學傳播季刊, 148期, 37(4), 84-93, 2013。
3. 李輝濱。預測與驗證平面凸多邊形面積公式。科學教育月刊, 398、399期, 2017年5、6月出版發行。
4. 蔡聰明。數學拾貝—星空燦爛的數學。三民書局, 2000。
5. 黃武雄。中西數學簡史。人間文化事業公司, 1980。
6. 世部貞市郎。幾合學辭典。九章出版社, 1988。
7. 林聰源。數學史—古典篇。凡異出版社, 1995。
8. 項武義。基礎幾何學。五南圖書出版公司。
9. 項武義。基礎分析學。五南圖書出版公司。
10. E. W. Hobson, *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Dover, 1957.
11. Z. A. Melzek, *Invitation to Geometry*, John Wiley and Sons, 1983.

—本文作者爲嘉義市私立輔仁中學退休教師—

勘誤表

第 46 卷第 1 期 (181號), 35 頁, Line -1。

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{113}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{113}}{2}}.$$

應爲：

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{49}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{49}}{2}}.$$

第 46 卷第 1 期 (181號), 36 頁, Line 2。

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{113}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{113}}{2}}=3,$$

應爲：

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{49}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{49}}{2}}=3,$$