數學傳播 46卷2期, pp. 77-84

擴充神算的簡單機率模型

胡 欣

一、引言

科學研習月刊 2015 年 54 卷 4 期第 48 頁第 6 題神算, 提到一個倒立正三角形, 一共由 n 個紅、綠、藍三種球各若干個排成第一列。在下一列排 $n-1$ 個球 (每個球插空隙) 成第二列, 以此類推排第三列 ⋯⋯, 直到最後一列只有一個球。如下圖 1 所示, 其中, 配色規則是兩顆異色時配第三色, 兩顆同色時配同色:

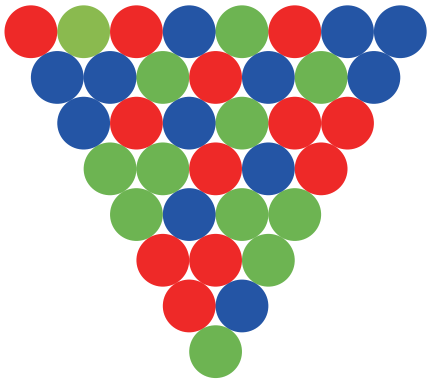

圖 1: $n=8$ 例子 (圖片引自參考文獻 [5])

關於這個問題, 第 56 屆全國科展中, 周家萱、詹雅涵、黃子恆在神算作品中, 將色球編號, 並以同餘等技巧, 詳細探討此問題, 進而推廣至立體之正四面體。隨後, 徐祥峻、郭君逸 (2017) 更一步將其建模為彩球遊戲, 以彩球遊戲求解的觀點, 得到一般性的結果與推廣 [3]。神算問題之所以那麼吸引人注目, 在於問題描述簡單, 國小程度的學生都可以讀懂, 但實際解題操作起來, 確有著如同玩線上遊戲一樣, 魅力無窮讓人著迷, 所以, 我也不例外, 把玩之餘, 突然有一個念頭, 前述的文獻 [2,3,5] 均未考慮機率, 我為什麼不能結合高中所學的機率, 將原問題推廣變成帶有機率的問題。

於是我利用高二科學班專題研究課程, 在指導老師龔詩尹老師與楊昌宸老師的指導下, 完成了簡單機率模型之結果, 並獲得第 61 屆第三區科展特優, 經重新改寫內容, 擬作為拋磚引玉, 希冀激發對這個主題有興趣之讀者, 一起來挑戰更一般的情形。

二、簡單機率模型與符號設定

極端化原則下, 將神算問題的顏色簡化成只有黑色與白色, 二維模型的配色規則是黑色與黑色配成白色, 黑色與白色配成黑色, 令 n 表示第一列的球數, $p \in (0,1)$, 隨機變數 X_i 表示第一列由左到右數第 i 球的球色狀態, 且

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ 黑球}, & \text{機率 } p, \\ 0, \text{ 白球}, & \text{機率 } 1-p. \end{cases}$$

假設 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 爲獨立。

三維模型假設底座排成一個每邊 n 之正三角形, 如圖 2 所示, 配色規則是三球黑色配成黑色, 兩球黑色與一球白色配成白色, 兩球白色與一球黑色配成黑色, 三球白色配成白色。

圖2: 三維模型

爲方便起見, 這 $\frac{n(n+1)}{2}$ 球, 由左到右依序排列爲 $X_{11}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, \cdots, X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ii}, \cdots, X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nn}$, 例如: $n=5$ 時, 如圖 3 所示:

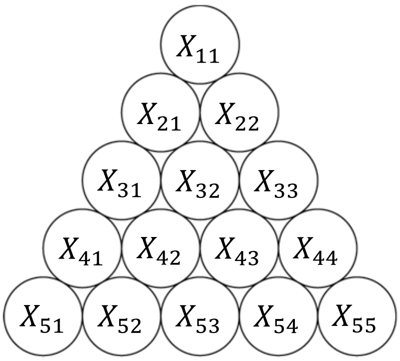

圖3: 三維模型底座 ($n=5$ 之情形)

令 X_{ij} 之取值爲

$$X_{ij}=\begin{cases}1, \text{ 黑球}, & \text{機率 } p,\\ 0, \text{ 白球}, & \text{機率 } 1-p.\end{cases}$$

假設 $X_{11}, X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{nn}$ 爲獨立。

另一方面, 令 Y_n 表示第一列爲 n 球之二維模型中, 最底下那顆球的球色狀態, 若爲黑色, 則取值 1, 若爲白色則取值 0。同理, Z_n 表示底座爲每邊 n 球之三維模型中, 最上面那顆球的球色狀態, 若爲黑色, 則取值 1, 若爲白色則取值 0。又對任意 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$W=\min\{i\in\mathbb{N}: Y_{i+1}=1\},\quad S=\min\{i\in\mathbb{N}: Z_{i+1}=1\}.$$

此外, 複習隨機變數 W 與 S 之期望值如下:

$$E(W)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(W=n),\quad E(S)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(S=n).$$

三、研究問題

基於上述動機, 本文之研究問題如下:

(1) 對任意 $n\in\mathbb{N}$, 探討 $P(Y_n=1)$ 與 $P(Z_n=1)$ 之值。

(2) 探討 $E(W)$ 與 $E(S)$ 之值。

四、二維結果

結論 4.1. 對任意正整數 n,

$$P(Y_n=1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_n},$$

這裡 Ψ_n 之值, 等於二項係數 $C_0^{n-1}, C_1^{n-1}, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$ 中, 值是奇數的個數總數。

證明: 根據二維模型之配色規則, 可得

$$Y_n\equiv X_1+C_1^{n-1}X_2+C_2^{n-1}X_3+\cdots+C_{n-2}^{n-1}X_{n-1}+X_n \pmod 2. \tag{4.1}$$

因爲 $C_0^{n-1}, C_1^{n-1}, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$ 中, 共有 Ψ_n 個的值是奇數, 所以從 (4.1) 式可得,

$$P(Y_n=1)=P\left(X_{i_1}+X_{i_2}+\cdots+X_{i_\gamma}\equiv 1 \pmod 2\right),$$

其中 $\gamma=\Psi_n$, $i_1=1$, $i_\gamma=n$,

$$i_k=\min\{m>i_{k-1}: C_m^{n-1} \text{ 之值是奇數}\},\quad k>1.$$

令

$$a_n = P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \equiv 1 \pmod 2\right).$$

因爲 X_1, X_2, X_3, $\cdots$ 爲獨立且具同分佈, 故

$$P(Y_n = 1) = a_\gamma = a_{\Psi_n}.$$

根據 X_n 之取值, 可得遞迴式

$$\begin{aligned}
a_n &= P\left(X_n = 1, \sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 0 \pmod 2\right) + P\left(X_n = 0, \sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 1 \pmod 2\right)\\
&= P(X_n = 1) P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 0 \pmod 2\right) + P(X_n = 0) P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i \equiv 1 \pmod 2\right)\\
&= p\left(1 - a_{n-1}\right) + (1-p)a_{n-1} = p + (1-2p)a_{n-1}.
\end{aligned}$$

因爲 $a_1 = p$, 且 a_n 滿足遞迴關係式

$$a_n - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right),\ \forall n \geq 2,$$

故得

$$a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^n.$$

因此

$$P(Y_n = 1) = a_{\Psi_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_n}. \qquad \square$$

結論 4.2.

$$E(W) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

證明: 根據 W 之定義, 可得

$$\begin{aligned}
\{W = 2\} &= \{Y_2 = 0, Y_3 = 1\}\\
&= \{X_1 + X_2 \equiv 0, X_2 + X_3 \equiv 1 \pmod 2\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{W = 3\} &= \{Y_2 = 0, Y_3 = 0, Y_4 = 1\}\\
&= \{X_1 + X_2 \equiv 0, X_2 + X_3 \equiv 0, X_3 + X_4 \equiv 1,\ \pmod 2\}.
\end{aligned}$$

據此歸納得到 $n > 3$ 時,

$$\begin{aligned}\{W=n\} &= \{Y_i = 0, 2 \le i \le n, Y_{n+1} = 1\} \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i + X_{i+1} \equiv 0 \pmod 2\}\right) \cap \{X_n + X_{n+1} \equiv 1 \pmod 2\} \\ &= \{X_i = 0, 1 \le i \le n, X_{n+1} = 1\} \cup \{X_i = 1, 1 \le i \le n, X_{n+1} = 0\},\end{aligned}$$

利用 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 爲獨立, 交集的機率變成相乘, 故得

$$P(W=n) = p(1-p)^n + (1-p)p^n.$$

再根據 [1], 第 72 頁, 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^n = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n = \frac{1-p}{p^2},$$

因此

$$\begin{aligned}E(W) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(W=n) \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} np^n + p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n \\ &= \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} + \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.\end{aligned}$$

五、三維結果

結論 5.1. 對任意正整數 n,

$$P(Z_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p)^{\lambda_n},$$

這裡

$$\lambda_n = \left(C_0^{n-1} \pmod 2\right)\Psi_n + \left(C_1^{n-1} \pmod 2\right)\Psi_{n-1} + \cdots + \left(C_{n-1}^{n-1} \pmod 2\right)\Psi_1,$$

其中 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$ 之定義, 請參照結果 4.1。

證明: 根據三維模型之配色規則, 逐一計算可得

$$Z_2 \equiv X_{11} + X_{21} + X_{22}, \quad Z_3 \equiv X_{11} + X_{31} + X_{33} \pmod 2.$$

$$Z_4 \equiv X_{11}+X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44} \pmod 2.$$

$$Z_5 \equiv X_{11}+X_{51}+X_{55} \pmod 2.$$

$$Z_6 \equiv X_{11}+X_{21}+X_{22}+X_{51}+X_{55}+X_{61}+X_{62}+X_{65}+X_{66} \pmod 2.$$

$$Z_7 \equiv X_{11}+X_{31}+X_{33}+X_{51}+X_{55}+X_{71}+X_{73}+X_{75}+X_{77} \pmod 2.$$

歸納發現計算 Z_n 時, 底座每邊 n 球之三維模型, 由左到右依序排列爲 X_{11}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, $\cdots$, X_{i1}, X_{i2}, $\cdots$, X_{ii}, $\cdots$, X_{n1}, X_{n2}, $\cdots$, X_{nn}, 乘在 X_{ij} 前面的係數, 剛好對應底下三角形之第 i 行第 j 列之數 (在同餘 2 之下的取值):

$$\begin{array}{llllll}
C^{n-1}_{n-1}C^0_0, & & & & & \\
C^{n-1}_{n-2}C^1_0, & C^{n-1}_{n-2}C^1_1, & & & & \\
C^{n-1}_{n-3}C^2_0, & C^{n-1}_{n-3}C^2_1, & C^{n-1}_{n-3}C^2_2, & & & \\
 & & & \cdots\cdots, & & \\
C^{n-1}_{2}C^{n-3}_0, & C^{n-1}_{2}C^{n-3}_1, & C^{n-1}_{2}C^{n-3}_2, & \cdots, & C^{n-1}_{2}C^{n-3}_{n-3}, & \\
C^{n-1}_{1}C^{n-2}_0, & C^{n-1}_{1}C^{n-2}_1, & C^{n-1}_{1}C^{n-2}_2, & \cdots, & \cdots, & C^{n-1}_{1}C^{n-2}_{n-2}, \\
C^{n-1}_{0}C^{n-1}_0, & C^{n-1}_{0}C^{n-1}_1, & C^{n-1}_{0}C^{n-1}_2, & \cdots, & \cdots, & \cdots, \quad C^{n-1}_{0}C^{n-1}_{n-1},
\end{array}$$

也就是

$$Z_n \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(C^{n-1}_{n-i}C^{i-1}_{j-1} \pmod 2\right) X_{ij} \pmod 2. \tag{5.1}$$

接著, 利用 X_{11}, X_{21}, X_{22}, $\cdots$, X_{nn} 爲獨立且同分佈, 此時, 如同結果 4.1 之證明, 只要知道幾個非 0 的 X_{ij} 留在 (5.1) 式中即可。實際比對發現共有 λ_n 個非 0 的 X_{ij} 留在 (5.1) 之表達式中, 故

$$P(Z_n=1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\lambda_n}. \qquad \square$$

結論 5.2.

$$E(S)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(S=n),$$

這裡

$$\begin{aligned}
P(S=n) = {} & p\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_{n+1}}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_i}\right\} \\
& + q\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_{n+1}}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_i}\right\},
\end{aligned}$$

其中 $q=1-p$ 且 Ψ_1, Ψ_2, $\cdots$, Ψ_n, Ψ_{n+1} 之定義, 請參照結果 4.1。

證明: 根據 S 之定義, 可得

$$\begin{aligned}
\{S=2\} &= \{Z_2=0, Z_3=1\}\\
&= \{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 1 \pmod 2\},\\
\{S=3\} &= \{Z_2=0, Z_3=0, Z_4=1\}\\
&= \{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0,\\
&\qquad X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 1 \pmod 2\},\\
\{S=4\} &= \{Z_2=0, Z_3=0, Z_4=0, Z_5=1\}\\
&= \{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0,\\
&\qquad X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 0,\\
&\qquad X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55}\equiv 1 \pmod 2\},
\end{aligned}$$

歸納可得

$$\begin{aligned}
\{S=n\} &= \{Z_i=0, 2\le i\le n, Z_{n+1}=1\}\\
&= \{X_{11}+X_{21}+X_{22}\equiv 0, X_{21}+X_{22}+X_{31}+X_{33}\equiv 0,\\
&\quad X_{31}+X_{33}+X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\equiv 0,\\
&\quad X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{51}+X_{55}\equiv 0,\\
&\quad \cdots\cdots\\
&\quad X_{n\alpha_1}+X_{n\alpha_2}+\cdots+X_{n\alpha_{\Psi_n}}+X_{(n+1)\beta_1}+\cdots+X_{(n+1)\beta_{\Psi_{n+1}}}\equiv 1 \pmod 2\},
\end{aligned}$$

這裡 $\alpha_1=1$, $\beta_1=1$,

$$\alpha_i=\min\{i>\alpha_{i-1} : C_i^{n-1} \text{ 之值是奇數}\},\quad \beta_i=\min\{i>\beta_{i-1} : C_i^{n} \text{ 之值是奇數}\}.$$

進一步將 X_{11} 的取值拆成 $X_{11}=1$ 與 $X_{11}=0$ 兩部份, 且觀察一節一節的下列事件之取值, 在同餘 2 之下是 0 或 1, 以及每一個事件是幾個 X 相加:

$$\{X_{21}+X_{22}\},\ \{X_{31}+X_{33}\},\ \{X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\},\ \{X_{51}+X_{55}\},\ \cdots,$$

則如同結果 4.2 處的證明, 利用 X_{11}, X_{21}, X_{22}, $\cdots$, X_{nn} 為獨立, 可得

$$\begin{aligned}
P(S=n) &= p\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_{n+1}}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_i}\right\}\\
&\qquad + q\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_{n+1}}\right\}\prod_{i=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^{\Psi_i}\right\},
\end{aligned}$$

其中 $q=1-p$。最後, 將上式代入 S 的期望值定義中即可。 □

六、結語

本文探討 $P(Y_n=1)$ 之主要理由, 是想了解隨機配置第一列後, 機率如何刻畫最底下那顆球的狀態, 且隨著 n 值增加, 想了解機率的起伏情形。而探討 $E(W)$ 之主要理由, 是源自數學課堂作業, 老師給我們練習收集贈劵, 剛好收集到一套時, 就停止購買, 請問平均購買次數之問題。同理, 這樣的思維類化到三維, 即計算 $P(Z_n=1)$ 與 $E(S)$ 之理由。

另外, 從本文所得之 4 個結果, 看得出 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 所扮演的重要角色, 有關它的實際計算, 請參閱張鎮華教授 [4] 之文章。

如同引言所述, 神算問題是一個看似簡單, 但其實是內涵豐富的題材, 本文所建立的簡單機率模型, 亦充滿無限可延伸推廣的可能性, 有興趣的讀者, 可以繼續挑戰多球色的機率模型, 或是更一般的配色規則。

從應用的角度來看, 本文所建立的機率模型, 因可以具體實驗操作, 且考慮到彼此相鄰的交互作用, 因此, 非獨立的隨機變數列 $\{Y_n\}_{n=2}^{\infty}$ 與 $\{Z_n\}_{n=2}^{\infty}$, 可作爲有交互作用的模型來使用, 進而再結合統計技術, 這方面亦可期待很多後續可進行的研究。

本文再次感謝科展指導老師龔詩尹老師、楊昌宸老師, 以及專題課程指導老師中興大學應用數學系李林滄教授之耐心指導, 最後, 本文感謝匿名審查委員的指正與提供寶貴之修正意見。

參考文獻

1. 林宜嬪、張福春。級數求和、對消和與對消乘積 (上)。數學傳播季刊, 36(3), 59-73, 2012。
2. 周家萱、詹雅涵、黃子恆。神算。第 56 屆全國科學展覽國小組最佳創意獎, 科展群傑廳, 2016。
3. 徐祥峻、郭君逸。單人彩球遊戲。數學傳播季刊, 41(3), 39-50, 2017。
4. 張鎮華。組合數學與電腦的關係。數學傳播季刊, 10(2), 10-19, 1986。
5. 游森棚。十二個課堂遊戲探索問題。科學研習月刊, 54(4), 46-49, 2015。

—本文作者投稿時就讀國立彰化高級中學科學班三年級—