

Operational Calculus 的教學與 學習分享

陳正宗 · 吳庭安 · 周彥廷 · 陳彥亨

前言: 傅立葉轉換與拉普拉斯轉換和其他積分轉換的各種理論和應用, 屬於英國電氣學家 O. Heaviside (1850~1925) 所提的 Operational Calculus 範疇。其基本思想是將電路學的微分方程轉換為代數方程, 可以稱之為『微分方程的代數化』, 之後再藉由代數方程的理論得出原微分方程的解。由於 Heaviside 沒有顯赫的背景與學位, 而這套方法又缺少嚴格的數學證明, 因此被當時的劍橋、牛津等學院派所反對。然而真理終究會浮出水面, Heaviside 的方法在真實世界的成功反而促進了數學界的發展。後來的研究也發現, 原來 Operational Calculus 本質上便是 Laplace 轉換 (Laplace transform)。本研究就五個運算數學的案例做分享。前兩部分以 \sin 函數與 \cos 函數為例, 透過引入階梯函數與脈衝函數, 可解得不連續函數與簡諧函數的積分轉換解, 透過廣義函數嚴謹地導得對應的轉換。第三、四部份則分別求解 e^{-t^2} (或 te^{-t^2}) 的傅立葉轉換與 \sqrt{t} (或 $1/\sqrt{t}$) 的拉普拉斯轉換。有別於傳統直接由定義作法, 本文透過積分轉換的基本性質列出轉換後兩函數滿足微分方程而求得該函數的轉換解。最後第五部分, 本文以尤拉-柯西微分方程為例, 探討其兩次拉普拉斯轉換後, 與原微分方程的關係。

關鍵字: 工程數學、創意教學、傅立葉轉換、拉普拉斯轉換。

1. 傅立葉轉換基本性質探討

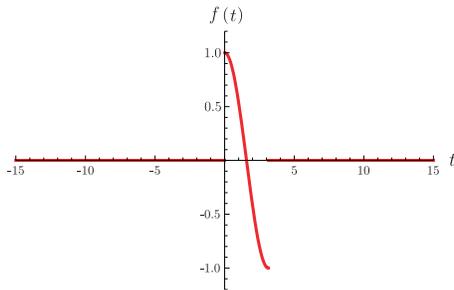
1.1. 暫態 (Transient state) 的 $\cos(t)$ 與 $\sin(t)$ 函數在 $t \in (0, \pi)$ 才有值的微分轉換關係是否成立?

傅立葉分析可用於訊號在時域 (時間區域) 和頻域 (頻率區域) 之間的轉換, 在物理學和工程學中有許多應用。因此本節針對傅立葉轉換基本性質進行探討。透過實例, 點出轉換中一些似是而非的地方, 並對實例分析探討, 提供解決方案。訊號函數分別定義如下:

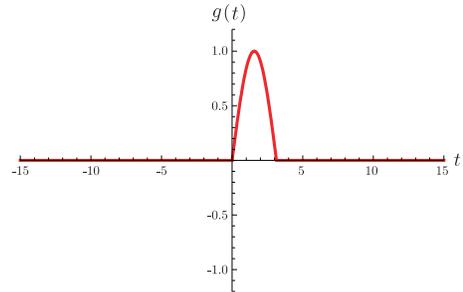
$$f(t) = \begin{cases} \cos(t), & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

$f(t)$ 和 $g(t)$ 圖形分別如圖一與圖二所示。



圖一: $f(t)$ 的函數圖



圖二: $g(t)$ 的函數圖

依傅立葉轉換之定義, 得 $f(t)$ 的傅立葉轉換為

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{i\omega(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)}. \quad (3)$$

同樣由定義, 得 $g(t)$ 的傅立葉轉換為

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)}. \quad (4)$$

透過 $\sin(t)$ 與 $\cos(t)$ 之導函數關係, 一般會認為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 將滿足關係式如下:

$$g'(t) = f(t), \quad (5)$$

$$f'(t) = -g(t). \quad (6)$$

其傅立葉轉換後關係式如下:

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \mathcal{F}\{-g(t)\}. \quad (8)$$

在傅立葉轉換基本關係中, 在時域的微分操作相當於在傅立葉頻率域上乘以 $i\omega$, 則 (7) 式與 (8) 式在頻率域應滿足

$$i\omega G(\omega) = F(\omega), \quad (9)$$

與

$$i\omega F(\omega) = -G(\omega). \quad (10)$$

表一: $f(t)$ 與 $g(t)$ 在時間域與頻率域關係

轉換前 (t 域)	轉換後 (ω 域)
$g'(t) = f(t)$	$i\omega G(\omega) = F(\omega)$
$f'(t) = -g(t)$	$i\omega F(\omega) = -G(\omega)$

聯立後等式不成立

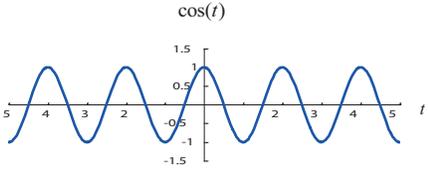
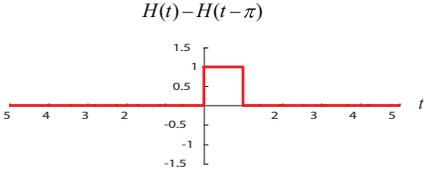
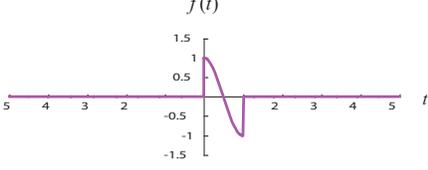
然而 (9) 式與 (10) 式矛盾, 無法同時成立, 如表一所示。將 (3) 式與 (4) 式之 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 代入 (9) 式與 (10) 式, 可得

$$i\omega G(\omega) = i\omega \frac{(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)} = \frac{i\omega(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)} = F(\omega), \quad (11)$$

$$i\omega F(\omega) = -\omega^2 \frac{(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)} \neq \frac{(e^{-i\omega\pi} + 1)}{(1 - \omega^2)} = -G(\omega). \quad (12)$$

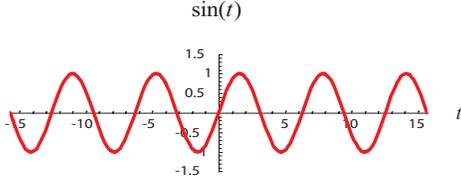
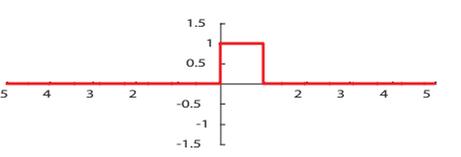
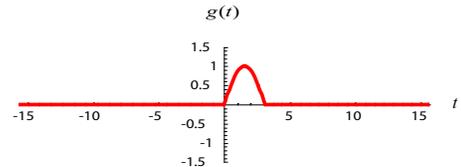
換言之, $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 滿足 (9) 式之關係式, 而 (10) 式並不成立。這是為什麼呢? 是什麼原因使得基本轉換性質不適用呢? 難道是微分過程有問題? 還是基本操作有問題? 跟複數有沒有關係? 轉換界限? 暫態或穩態 (Steady state)? 正餘弦函數的不同? 於是本文將從兩者的運算過程做探討, 找出不適用的原因。首先, 引入單位階梯函數 (Heaviside Function/Unit Step Function, $H(t)$), 並將 (1) 式與 (2) 式之原函數以單位階梯函數、 $\cos(t)$ 函數與 $\sin(t)$ 函數表示, 進而能輕鬆的做微分和傅立葉轉換, 而不需分段描述 $f(t)$ 與 $g(t)$ 。故 $f(t)$ 可透過 $H(t)$ 與 $\cos(t)$ 表示, 如表二所示。

表二: 廣義函數表示

$\cos(t)$	
$H(t) - H(t - \pi)$	
$f(t) = (H(t) - H(t - \pi)) \cos(t)$	

同理, $g(t)$ 可透過 $H(t)$ 與 $\sin(t)$ 表示, 如表三所示。

表三: 廣義函數表示

$\sin(t)$	
$H(t) - H(t - \pi)$	
$g(t) = (H(t) - H(t - \pi)) \sin(t)$	

$f(t)$ 經由微分後可得

$$f'(t) = (\delta(t) - \delta(t - \pi)) \cos(t) - g(t), \tag{13}$$

$g(t)$ 經由微分後可得

$$g'(t) = (\delta(t) - \delta(t - \pi)) \sin(t) + f(t), \tag{14}$$

其中 $\delta(t)$ 為單位脈衝函數 (Dirac-Delta Function)。接著比對其兩者微分後傅立葉轉換的過程, 探討是什麼數學操作導致 $i\omega G(\omega) = F(\omega)$ 而 $i\omega F(\omega) \neq -G(\omega)$ 。根據 (13) 式, 可發現 $f'(t)$ 不直接等於 $-g(t)$ 。而 (13) 式與 (14) 式經傅立葉轉換後, 可得

$$i\omega F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t) - \delta(t - \pi)) \cos(t) e^{-i\omega t} dt - G(\omega), \tag{15}$$

與

$$i\omega G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t) - \delta(t - \pi)) \sin(t) e^{-i\omega t} dt + F(\omega). \tag{16}$$

再利用 $\delta(t)$ (Dirac-Delta Function) 的特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) k(t) dt = k(a), \tag{17}$$

令 $k(t) = \sin(t)e^{-i\omega t}$ 並將 (17) 式代入 (16) 式後, 可得

$$i\omega G(\omega) = \sin(0)e^{-i\omega 0} - \sin(\pi)e^{-i\omega\pi} + F(\omega), \quad (18)$$

化簡後得

$$i\omega G(\omega) = F(\omega), \quad (19)$$

故得證 (9) 式成立。令 $k(t) = \cos(t)e^{-i\omega t}$ 並將 (17) 式代入 (15) 式後, 可得下式:

$$i\omega F(\omega) = \cos(0)e^{-i\omega 0} - \cos(\pi)e^{-i\omega\pi} - G(\omega). \quad (20)$$

化簡後得

$$i\omega F(\omega) = 1 - (-1)e^{-i\omega\pi} - G(\omega). \quad (21)$$

雖然 $i\omega F(\omega) \neq -G(\omega)$, 但是 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 是滿足 $i\omega F(\omega) = 1 - (-1)e^{-i\omega\pi} - G(\omega)$ 。由此例可證實, 當函數為連續函數時, 其微分後不會產生有強度的 $\delta(t)$ 。若函數不連續時, 其微分後會產生有強度的 $\delta(t)$, 其積分結果不為零。因為 $g(t)$ 本身為連續函數, 所以:

$$g'(t) = f(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (22)$$

成立。又根據傅立葉轉換基本操作關係, 因此 (11) 式成立。但 $f(t)$ 在 0 與 π 處函數不連續, 所以:

$$f'(t) \neq -g(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (23)$$

因此導致 (12) 式之結果。當考慮不連續處微分所產生之 $\delta(t)$ 函數的影響, 而此案例中之轉換結果即為 (21) 式。總而言之, 原先預期的 (9) 式 $g'(t) = f(t)$ 與 (10) 式 $f'(t) = -g(t)$, $-\infty < t < \infty$, 若對廣義函數而言是不能直接斷定該關係式成立的, 只有在函數連續時才得以成立。不連續時引入階梯函數來表示, 微分後產生 $\delta(t)$ 函數項, 因此依基本性質轉換之計算需特別小心。

1.2. 簡諧函數 $\cos(t)$ 可以看成是 $\sin(t)$ 的微分, 也可以看成 $-\sin(t - \frac{\pi}{2})$, 其所對應的傅立葉轉換是否相同, 並做探討。

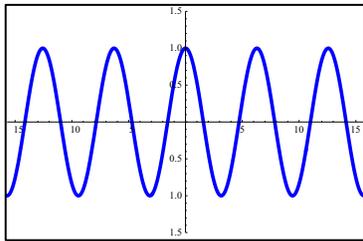
前一節探討傅立葉在時域的微分操作相當於傅立葉在頻率域上乘以 $i\omega$, 得知基本轉換性質應用時應小心函數的連續性。本節則將透過穩態的簡諧函數 $\cos(t)$ 與 $\sin(t)$ 之間的微分關係, 以及引入 $\delta(t)$ 函數的表示式, 說明看似不相等的兩轉換結果, 如何利用 $\delta(t)$ 函數的特殊性質而證明其兩者相等, 並探討可否透過頻率的運算公式, 即可求出其傅立葉轉換。穩態函數定義

如下:

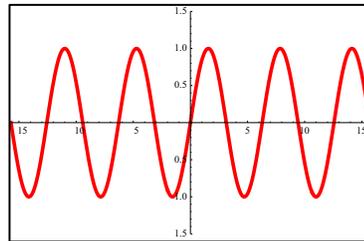
$$f_c(t) = \cos(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (24)$$

$$g_s(t) = \sin(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (25)$$

$f_c(t)$ 和 $g_s(t)$ 函數圖分別如圖三與圖四所示。



圖三: $f_c(t) = \cos(t)$ 的函數圖



圖四: $g_s(t) = \sin(t)$ 的函數圖

將 $\cos(t)$ 既可表示為 $\frac{d\sin(t)}{dt}$ 也可表示為 $-\sin(t - \frac{\pi}{2})$, 再比對其兩者之轉換結果是否相等, 整理如表四。

表四: $f_c(t)$ 和 $g_s(t)$ 在時間域與頻率域關係

轉換前 (t 域)	轉換後 (ω 域)
$g'_s(t) = f_c(t)$	$i\omega G_s(\omega) = F_c(\omega)$
$g(t - \frac{\pi}{2}) = f_c(t)$	$-e^{-i\omega \frac{\pi}{2}} G_s(\omega) = F_c(\omega)$

聯立

本文發現聯立後函數式在一般函數空間中 $G_s(\omega)$ 無解。但在廣義函數空間中, $G_s(\omega)$ 必定有解, 因而引入 $\delta(t)$, 進入廣義函數空間以求得轉換解。首先, $\delta(t)$ 的傅立葉轉換等於 1, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1, \quad (26)$$

1 的傅立葉反轉換等於 $\delta(t)$, 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{i\omega t} d\omega = \delta(t). \quad (27)$$

令 $t = -\tau$, 則可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(-\tau) = 2\pi\delta(\tau). \quad (28)$$

(28) 式可改寫成

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega), \quad (29)$$

換言之, 1 的傅立葉轉換為 $2\pi\delta(\omega)$ 。又由傅立葉轉換的頻率平移性質 $\mathcal{F}\{e^{i\omega a} f(t)\} = F(\omega - a)$, (29) 式可導得 e^{it} 的傅立葉轉換如下式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} 1e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - 1), \quad (30)$$

與 e^{-it} 的傅立葉轉換如下式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it} 1e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega + 1). \quad (31)$$

又由 $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ 與 $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, 引入 (30) 式與 (31) 式, 可知 $f_c(t)$ 與 $g_s(t)$ 之傅立葉轉換分別為

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}\{f_c(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-i\omega t} dt = \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)), \quad (32)$$

與

$$G_s(\omega) = \mathcal{F}\{g_s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{i}(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)). \quad (33)$$

則 (32) 與 (33) 式分別可改寫成

$$F_c(\omega) = \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)), \quad (34)$$

與

$$G_s(\omega) = \frac{\pi}{i}(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)). \quad (35)$$

由 (35) 式與傅立葉轉換性質, $\mathcal{F}\{g'_s(t)\} = i\omega G(\omega)$ 與 $\mathcal{F}\{g_s(t - a)\} = e^{-i\omega a} G(\omega)$, 可得

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d \sin(t)}{dt}\right\} = \omega\pi(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)), \quad (36)$$

與

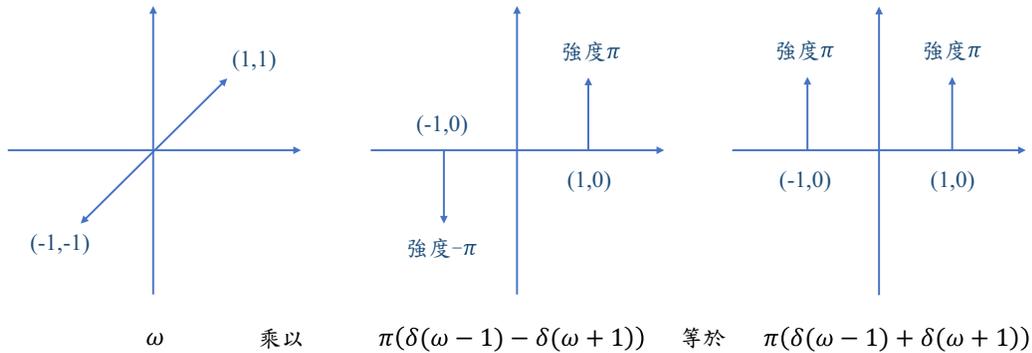
$$\mathcal{F}\left\{-\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = -e^{i\omega\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{i}(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)). \quad (37)$$

根據歐拉公式 (Euler's Formula), (37) 式可表示為

$$\mathcal{F}\left\{-\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left(i \cos(\omega\frac{\pi}{2}) + \sin(\omega\frac{\pi}{2})\right)\pi(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)). \quad (38)$$

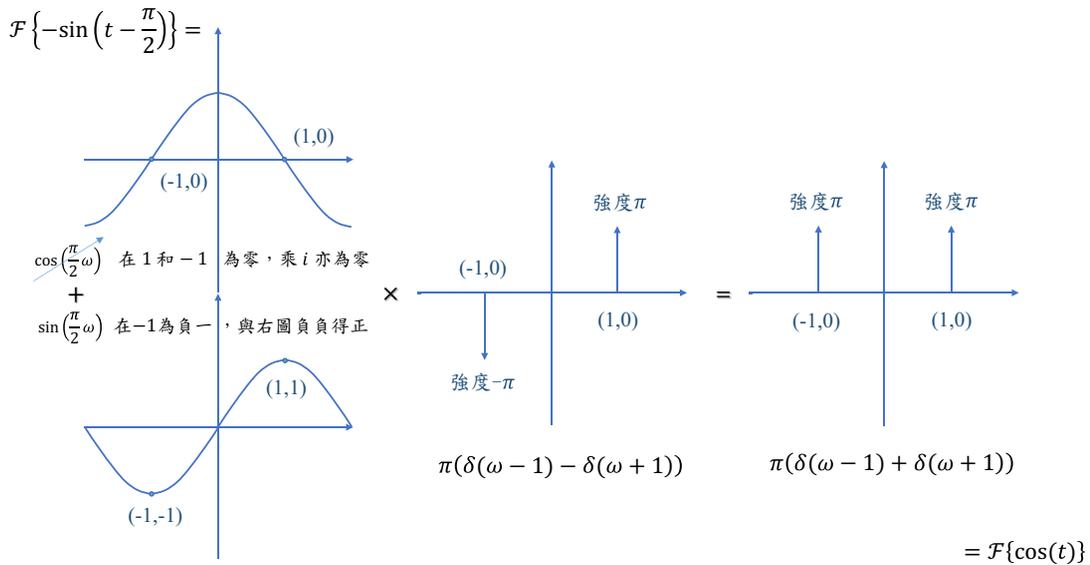
根據 $\sin(t)$ 和 $\cos(t)$ 的關係, 原本猜想 (36) 式與 (38) 式這兩個結果應該與 $F(\omega)$ 相等。但觀察後卻發現, 很難以算式本身推導互通, 於是本文便改由函數圖判斷。首先分析 (36) 式, 如圖五所示。

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d\sin(t)}{dt}\right\} =$$



圖五：以廣義函數解代入證明 $i\omega G(\omega) = F(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(t)\}$

由於 $\delta(\omega)$ 的特性, $\pi(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1))$ 在 $\omega = 1$ 與 $\omega = -1$ 上才有值, 因此兩函數相乘後恰可等於 $\pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1))$, 也就是 $F(\omega)$, 故得證 $\mathcal{F}\{d\sin(t)/dt\} = F(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(t)\}$ 。接著分析 (38) 式, 如圖六所示。



圖六：以廣義函數解代入證明 $-e^{-i\omega}G(\omega) = F(\omega)$

同理, 由於 $\delta(\omega)$ 的特性, 兩函數相乘恰可等於 $F(\omega)$, 得證 $\mathcal{F}\{-\sin(t - \pi/2)\} = F(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(t)\}$ 。因此, 回來探討表四的聯立方程式, 得證其聯立後有解但存在於廣義函數空間。

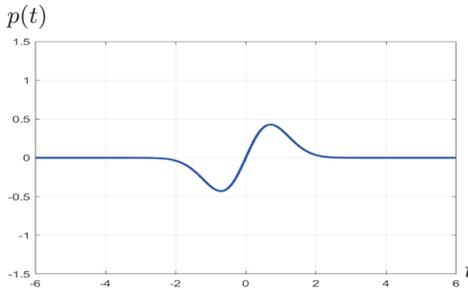
1.3. 高斯函數 e^{-t^2} 的傅立葉轉換與機率密度分布函數探討

本節的目的在探討如何利用基本轉換性質快速並嚴謹的求解 e^{-t^2} 的傅立葉轉換，而不需用到複變中的解析函數圍道積分（若直接由定義去做的話）。訊號函數定義如下：

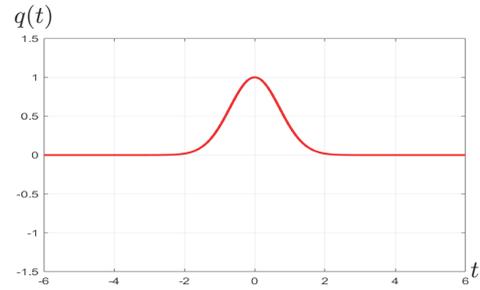
$$p(t) = te^{-t^2}, \quad (39)$$

$$q(t) = e^{-t^2}, \quad (40)$$

其相對應之函數圖形如下：



圖七: $p(t) = te^{-t^2}$ 的函數圖



圖八: $q(t) = e^{-t^2}$ 的函數圖

$p(t)$ 與 $q(t)$ 兩函數在時間域存在如下關係：

$$tq(t) = p(t), \quad (41)$$

$$q'(t) = -2p(t). \quad (42)$$

轉換後，於頻率域得另一種關係式：

$$iQ'(\omega) = P(\omega), \quad (43)$$

$$i\omega Q(\omega) = -2P(\omega), \quad (44)$$

其對應之關係可整理如表五所示。

表五: $p(t)$ 與 $q(t)$ 在時間域與頻率域關係

轉換前 (t 域)	轉換後 (ω 域)
$tq(t) = p(t)$	$iQ'(\omega) = P(\omega)$
$q'(t) = -2p(t)$	$i\omega Q(\omega) = -2P(\omega)$

本文利用傅立葉轉換的基本性質如表五所示，在頻率域找到 $Q(\omega)$ 的一階常微分方程，解 $Q(\omega)$ ，進而避開直接由定義求 e^{-t^2} 的傅立葉轉換之繁雜的運算過程。如表五所示，聯立後得一 $Q(\omega)$

的一階常微分方程

$$Q'(\omega) = \frac{-1}{2}\omega Q(\omega), \quad (45)$$

解得 $Q(\omega)$

$$Q(\omega) = ce^{-\frac{1}{4}\omega^2} \quad (c \text{ 爲常數}). \quad (46)$$

高斯函數的傅立葉轉換這個積分裡面的被積分函數是兩個指數函數相乘，其依然為指數函數，因此積分後亦為指數函數。也就是說高斯函數傅立葉轉換後還是高斯函數，因此高斯函數是傅立葉轉換操作之特徵函數。且由於指數函數是唯一微分之後等於自己（或差一個倍數）的函數，也因此可以預見高斯函數的傅立葉轉換會滿足一階微分方程，而透過以上的推導方法，也得到證實。同時由傅立葉轉換的定義可知

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt. \quad (47)$$

令 $\omega = 0$ ，由 (46) 式與 (47) 式，則可決定待定係數

$$c = \sqrt{\pi}, \quad (48)$$

可得 e^{-t^2} 的傅立葉轉換如下：

$$Q(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}\omega^2}. \quad (49)$$

透過上述運算數學方法所導得之 e^{-t^2} 的傅立葉轉換，以及線性、平移、縮放等轉換性質，同樣可以求得機率密度分佈函數的傅立葉轉換解

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right\} = e^{-\mu i\omega} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}, \quad (50)$$

其中 μ 為平均值， σ 為標準差。而傳統方法的詳細過程如下，有一高斯函數：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (51)$$

由定義進行傅立葉轉換可得

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} + i\omega t\right)} dt. \quad (52)$$

令

$$u = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}, \quad du = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dt, \quad (53)$$

由變數變換後, 化簡得

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu i \omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2 + i\omega\sqrt{2}\sigma u)} du, \quad (54)$$

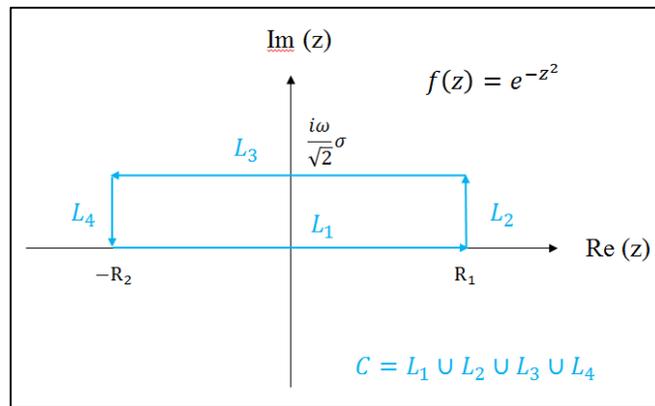
指數部分做配方可得

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu i \omega} e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2} du. \quad (55)$$

關於 (55) 式中 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2} du$ 的計算, 由於 Cauchy 之前 Laplace, Legendre, Poisson, Fourier 等人就已經得出許多特殊的定積分, 其中最重要的就是高斯 (Gaussian) 分佈的 Fourier 變換。因此一般 YouTube 影片或書中 [15, 16, 17], 才得以利用已知結果的高斯分佈之傅立葉轉換列出下式。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi} \quad (56)$$

雖然有了答案但是推導的過程卻是不夠嚴謹, 這裡面的癥結在於《複數的變數變換是否仍然成立?》。這些已經有了答案的定積分正是導致 Cauchy 發展複變函數論的根本緣由, 所以 Cauchy 定理證明了 Laplace 等人計算積分時所運用的《複數的變數變換是成立的》, 嚴謹推導過程如下所示。



圖九: 圍道積分示意圖

如上圖九, 令 $L_1: z = u$, 得其實軸路徑積分爲

$$\int_{L_1} f(z) dz = \int_{-R_2}^{R_1} e^{-u^2} du. \quad (57)$$

令 $L_3: z = u + \frac{i\omega}{2}\sqrt{2}\sigma$, 得其路徑積分爲

$$\int_{L_3} f(z) dz = \int_{R_1}^{-R_2} e^{-\left(u + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma\right)^2} du. \quad (58)$$

利用 e^{-z^2} 的相關性質，證明 L_2 和 L_4 的路徑積分爲零。首先令 $L_2 : z = R_1 + \frac{i\omega t}{2}\sqrt{2}\sigma$, $0 \leq t \leq 1$, 得其路徑積分爲

$$\int_{L_2} f(z)dz = \int_0^1 e^{-(R_1 + \frac{i\omega t}{2}\sqrt{2}\sigma)^2} dt = \int_0^1 e^{-R_1^2} e^{\frac{\omega^2 t^2 \sigma^2}{2}} e^{-i\sqrt{2}R_1\omega t} dt, \quad (59)$$

且知

$$|f(z)| = e^{-R_1^2} e^{\frac{\omega^2 t^2 \sigma^2}{2}} \leq e^{-R_1^2} e^{\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} = M_R. \quad (60)$$

由於有界函數在有界區域 [14] 可得下式，

$$\left| \int_c f(z)dz \right| \leq ML, \quad (61)$$

其中 L 爲積分曲線 c 之長度，而 $|f(z)| \leq M$ ，可得

$$\left| \int_{L_2} f(z)dz \right| \leq \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma \cdot e^{-R_1^2} e^{\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}. \quad (62)$$

當 $R_1 \rightarrow \infty$ 時，得

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma \cdot e^{-R_1^2} e^{\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} = 0, \quad (63)$$

則可得證

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{L_2} f(z)dz = 0. \quad (64)$$

同理， $R_2 \rightarrow \infty$ 時，可得

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{L_4} f(z)dz = 0. \quad (65)$$

由此證得 L_2 和 L_4 的路徑積分爲零。由解析函數圍道積分 $\int_{L_1+L_2+L_3+L_4} e^{-z^2} dz = 0$ 配合 (64) 式與 (65) 式，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u + \frac{i\omega}{\sqrt{2}}\sigma)^2} du. \quad (66)$$

將此等式代回 (55) 式則可得

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu i \omega} e^{\frac{-\omega^2 \sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (67)$$

最後將 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ 代入上式，成功解得 $f(t)$ 的傅立葉轉換解

$$F(\omega) = e^{-\mu i \omega} e^{\frac{-\omega^2 \sigma^2}{2}}. \quad (68)$$

若試將上式整理為機率密度分佈函數型式，如 (51) 式 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，首先對指數部分做配方，可得

$$F(\omega) = e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\left(\frac{\omega\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{\mu i}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}. \quad (69)$$

再做整理，可得

$$F(\omega) = e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(\omega - (-\mu i/\sigma^2))^2}{2(1/\sigma)^2}}. \quad (70)$$

又可將上式寫做標準常態機率密度分佈函數，如下：

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)} e^{-\frac{(\omega - (-\mu i/\sigma^2))^2}{2(1/\sigma)^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} N\left(-\frac{\mu i}{\sigma^2}, \frac{1}{\sigma}\right); \quad (71)$$

其中， $N(\mu, \sigma)$ 表示平均值為 μ ，標準差為 σ 的常態機率密度分佈函數。將上式與 (51) 式比對後，可得新的平均值為 $\bar{\mu} = -(\mu/\sigma^2)i$ ，新的標準差為 $\bar{\sigma} = 1/\sigma$ ，新的機率密度分佈函數振幅為原振幅的 $(\sqrt{2\pi}/\sigma) \cdot e^{\mu^2/2\sigma^2}$ 倍。由上述結果可得知常態分佈函數進行傅立葉轉換後，若令新的平均值為 $\bar{\mu} = -(\mu/\sigma^2)i$ 為零，則仍是常態分佈的函數，但函數圖形下面積不為 1。但若新的平均值為 $\bar{\mu} = -(\mu/\sigma^2)i$ 不為零，則需進入複數平面作圖，將 (71) 式中之 ω 代入以虛數，並且新的標準差 $\bar{\sigma} = 1/\sigma$ 亦需利用 $i^2 = -1$ 來配給一個虛數進去，改寫為 $\bar{\sigma} = i/\sigma$ 。經由如上定義與操作可將 (71) 式改寫如下：

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i/\sigma)} e^{\frac{(\omega - (-\mu i/\sigma^2))^2}{2(i/\sigma)^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} i \cdot \bar{N}\left(\frac{-\mu}{\sigma^2} i, \frac{1}{\sigma} i\right), \quad (72)$$

其中 ω 為虛數，且此時的 $F(\omega)$ 在複數平面上已不再是機率密度分佈函數，其中

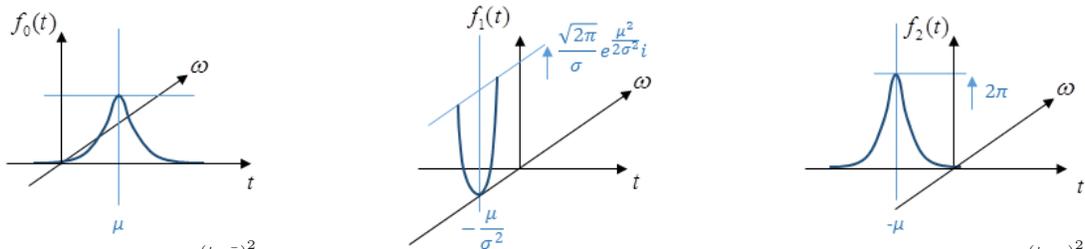
$$\bar{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} e^{\frac{(\omega - \bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}}; \quad (73)$$

函數開口向上，而非 $N(\mu, \sigma)$ 的開口向下。綜上所述，一次轉換後的機率密度分佈函數，將有五大改變，自變數 ($t \rightarrow \omega$)、平均值 ($\mu \rightarrow -\mu i/\sigma^2$)、標準差 ($\sigma \rightarrow -i/\sigma$)、振幅倍率 ($1 \rightarrow (\sqrt{2\pi}/\sigma)e^{\mu^2/2\sigma^2} i$) 與函數圖形的開口方向 ($e^{-t^2} \rightarrow e^{\omega^2}$)。一次轉換後仍為常態分佈函數的案例，為 $\bar{\mu} = 0$ 時且未進入複數平面， ω 仍為實數的情況下所產生之特例，若已進入複數平面，則即使 $\bar{\mu} = 0$ ，該函數圖形開口仍然向上，非為一常態分佈函數。在或然率與統計中，最基本也最正常的機率密度分佈函數即為常態分佈函數，亦稱為高斯分佈函數。針對文獻與網路資料回顧，得知可直接從定義導得其傅立葉轉換解，然而過程中需詳細探討解析函數圍道積分 [14]，有些 YouTube 網站上的影片 [15, 16, 17] 推導過程並不嚴謹且會跳過此段。而若是表五的運算數學操作，則可參考 MSV 的 YouTube 影片 [18]。第一作者教授工程數學近三十年，每次教到此，有感於學生還沒學過複變函數如鯁在喉，乃想出此替代方案如表五所示，即是以運

算數學操作來導其傅立葉轉換。一次傅立葉轉換後也是得到高斯函數，依樣畫葫蘆再做一次傅立葉轉換則又回來一樣標準差但振幅變 2π 倍的映射高斯函數。高斯函數不管幾次傅立葉轉換均是高斯函數，只是平均值、標準差與振幅變化而已。將一有平均值與標準差的常態機率密度函數，做一次與兩次傅立葉轉換，並對其零次、一次與兩次矩做推導，從中可感受到時頻域測不準原理的數學體現。最後整理如下圖表（圖十、圖十一、表六、表七）。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i/\sigma)} e^{\frac{(\omega - (-\mu i/\sigma^2))^2}{2(i/\sigma)^2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-\frac{(t+\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$N(\mu, \sigma) \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} i \cdot \bar{N}\left(-\frac{\mu}{\sigma^2} i, \frac{1}{\sigma} i\right) \rightarrow 2\pi N(-\mu, \sigma).$$



其中, $\bar{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}} e^{-\frac{(t-\bar{\mu})^2}{2\bar{\sigma}^2}}$, $N(\mu, \sigma)$ 表示平均值為 μ , 標準差為 σ 的常態機率密度分佈函數 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

圖十：機率密度分佈函數的零次、一次、兩次傅立葉轉換變化圖

時間域的正常機率密度分佈函數，取傅立葉轉換後為頻率域的正常機率密度分佈函數，但兩者標準差互為導數，這與海森堡測不準原理中位置與動量對應到週期與頻率有異曲同工之妙。

當 $\mu = 0$ 時		
$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$		
零次矩	一次矩	二次矩
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$ total probability (全部發生機率=1)	$\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = 0$ mean value(均值)	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \sigma^2$ covariance(變異數)

圖十一：機率密度分佈函數的零次矩、一次矩、二次矩（以 $\mu = 0$ 為例）

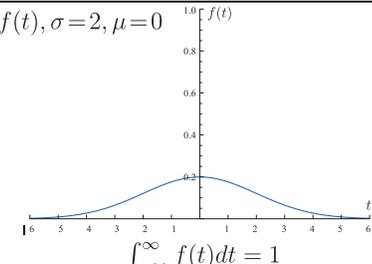
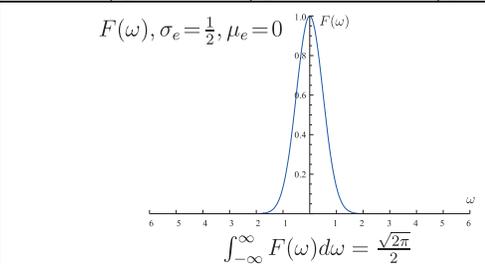
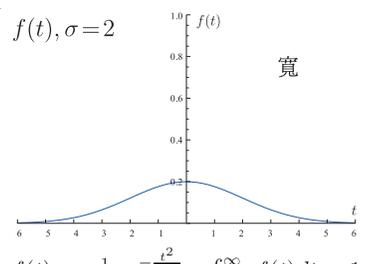
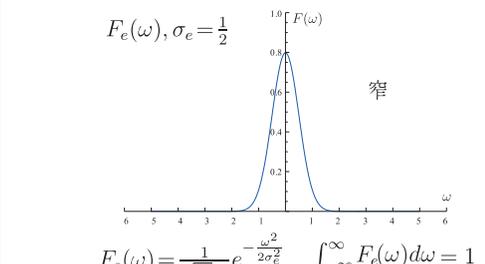
表六：原始函數與一次、二次轉換後函數的三個矩(以 $\mu = 0$ 為例)

	零次矩	一次矩	二次矩
原始函數 $f_0(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)dt = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} t f_0(t)dt = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_0(t)dt = \sigma^2$
一次轉換 $f_1(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}$	$\int_{-\infty}^{\infty} t f_1(t)dt = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_1(t)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3}$
二次轉換 $f_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt = 2\pi$	$\int_{-\infty}^{\infty} t f_2(t)dt = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_2(t)dt = 2\pi\sigma^2$

表七：機率密度分佈函數的傅立葉轉換 ($\mu = 0$)

	時間域	頻率域
函數定義	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-\mu i\omega} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$
	常態分佈normal distribution t 為隨機變量 (隨機變數) μ 為樣本平均數 σ 為樣本標準差	若 μ, σ 保持原本在時間域的定義下, 當 $\mu=0$ 時, 其機率密度函數的傅立葉轉換, 在頻率域中也是常態分佈
μ, σ 任意其 $-\infty \sim \infty$ 涵蓋的面積	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} (\mu=0)$

比較 $\mu = 0$ 且機率密度函數面積為 1 的情況

常態分佈 函數定義)	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$F(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}/\sigma}\right)^2} = e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_e^2}}, \sigma_e = \frac{1}{\sigma}$ set $F_e(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} F(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}/\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_e^2}}$
無振幅正規化 (頻率域)	$f(t), \sigma=2, \mu=0$  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$	$F(\omega), \sigma_e = \frac{1}{2}, \mu_e = 0$  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$
振幅正規化	$f(t), \sigma=2$  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$	$F_e(\omega), \sigma_e = \frac{1}{2}$  $F_e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_e^2}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_e(\omega)d\omega = 1$

2. 拉氏轉換基本性質探討

拉氏分析可用於訊號在時域和 s 域之間的轉換, 在物理學和工程學中有許多應用, 因此本章將以二例針對拉氏轉換基本性質進行探討。透過實例, 點出轉換中一些原先繁瑣的計算方式, 可透過運算數學技巧, 提供更快速方案。

2.1. t^n 的拉氏轉換

一般由數學歸納法所得之轉換解通式 $n!/s^{n+1}$ 中, 其中 n 為整數, 若 n 為非整數則需代入 $\Gamma(n+1) = n!$ 來計算。而本節將使用運算數學技巧, 導出不論 n 是否為整數皆可通用之轉換解通式。定義:

$$p(t) = t^{n-1}, \quad (74)$$

$$q(t) = t^n. \quad (75)$$

表八: $p(t)$ 和 $q(t)$ 在時間域與 s 域關係

轉換前 (t 域)	轉換後 (s 域)
$q(t) = tp(t)$	$Q(s) = -P'(s)$
$q'(t) = np(t)$	$sQ(s) - 0 = nP(s)$

聯立

由表七所示, 聯立後可得 $Q_n(s)$ 的一階 ODE 如下:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = Q_n(s) = \frac{-1}{n} \cdot (Q_n(s) + s \cdot Q_n'(s)). \quad (76)$$

解得:

$$Q_n(s) = k_n s^{-(n+1)} \quad (k_n \text{ 為常數}). \quad (77)$$

由於 k_n 亦隨 n 值變動, 取 $n = 1/2$ 為例, 也就是求取 $Q_{1/2}(s)$, 或者說是求取 $t^{1/2}$ 的拉氏轉換解。由定義與所解得之通式 (76) 式, 可得

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = Q_{1/2}(s) = \int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-st} dt, \quad (78)$$

與

$$Q_{1/2}(1) = k_{1/2}. \quad (79)$$

由 (78) 式與 (79) 式, 可知

$$k_{1/2} = \int_0^\infty \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt. \quad (80)$$

此時卻發現所得之 (80) 式相當難解, 因此再運用一次運算數學方法, 利用 $\sqrt{t} = t \cdot (1/\sqrt{t})$, 可先求 $1/\sqrt{t}$ 的拉氏轉換, 再利用基本轉換性質輕易求得 \sqrt{t} 的轉換解。由定義 $1/\sqrt{t}$ 的拉氏轉換為

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = Q_{(-1/2)}(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-st} dt, \quad (81)$$

變數變換令 $t = v^2$ 後可得

$$Q_{(-1/2)}(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} \cdot e^{-sv^2} 2v dv = 2 \int_0^{\infty} e^{-sv^2} dv. \quad (82)$$

將 $s = 1$ 代入 (77) 式之通式, 則可得

$$Q_{(-1/2)}(1) = k_{(-1/2)}. \quad (83)$$

由 (82) 式與 (83) 式, 可得待定係數

$$k_{(-1/2)} = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}. \quad (84)$$

將 (84) 所得之待定係數的結果, 代回 (77) 式, 可得

$$Q_{(-1/2)}(s) = k_{(-1/2)} s^{-(1/2+1)} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad (85)$$

此為 $1/\sqrt{t}$ 的拉氏轉換結果。最後由基本轉換性質, 在時域乘 t 相當於在 s 域做微分加負號, 得 \sqrt{t} 的轉換解為

$$Q_{1/2}(s) = -\frac{d}{ds} \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}. \quad (86)$$

綜上所述, t^n 中 n 只要為有理數, 透過拉氏轉換, s 代入 1 來求出 k_n 值, 如此就能得到其 s 域函數。

2.2. 尤拉-柯西 (Euler-Cauchy) 微分方程的兩次拉氏轉換

通常我們的認知是拉普拉斯轉換只能應用到常係數的微分方程。但更準確地說, 由於尤拉-柯西微分方程有很好的特質, 可透過變數變換 $s = \log t$, 將 $t^m = e^{m \log t}$ 改成 $t^m = e^{ms}$, 使尤拉-柯西微分方程轉換為常係數微分方程, 所以仍可利用拉普拉斯轉換。而在因次分析中, 微分兩次 y'' 因次少兩次但係數 t^2 補了兩次、微分一次 y' 因次少一次但係數 t 補了一次, 滿足這樣的微分方程之函數必定是 $y = t^m$, 其中 m 並沒有限定為整數。綜合上述可知拉氏轉換可透過變數變換來求解尤拉-柯西微分方程, 而本文探討拉氏轉換是否也能直接用來解尤拉-柯西微分方程式? 若不能, 是否會有回復性? 以尤拉-柯西微分方程式為例。

給定一尤拉-柯西微分方程式如下:

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0 \quad (\text{其中 } a, b, c \text{ 爲常數}), \quad (87)$$

先求解其常係數微分項之拉式轉換過程如下, $cy(t)$ 的轉換依基本轉換性質可得

$$L\{cy(t)\} = cY(s), \quad (88)$$

$by'(t)$ 的轉換依基本轉換性質可得

$$L\{by'(t)\} = bsY(s) - by(0), \quad (89)$$

$ay''(t)$ 轉換依基本轉換性質可得

$$L\{ay''(t)\} = as^2Y(s) - asy(0) - ay'(0). \quad (90)$$

以上推導已解決常係數微分項之拉式轉換, ty 依基本轉換性質可得 $-Y'(s)$ 如下:

$$L\{ty\} = -Y'(s) \quad (91)$$

透過 (90) 式可建立出尤拉-柯西微分方程式之拉式轉換, 將 (90) 式在時間域乘 t^2 透過 (91) 式之轉換關係可得:

$$L\{at^2y''(t)\} = as^2Y''(s) + 4asY'(s) + 2aY(s). \quad (92)$$

將 (89) 式在時間域乘 t 透過 (91) 式轉換關係可得:

$$L\{bty'(t)\} = -bsY'(s) + bY(s). \quad (93)$$

將 (88) 式、(92) 式及 (93) 式合併, 可得出尤拉-柯西微分方程式之拉式轉換如下:

$$L\{at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t)\} = as^2Y''(s) + (4a - b)sY'(s) + (2a - b + c)Y(s). \quad (94)$$

再做一次拉氏轉換透過 (94) 式轉換關係可得:

$$L\{as^2Y''(s) + (4a - b)sY'(s) + (2a - b + c)Y(s)\} = at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t). \quad (95)$$

上述運算數學的操作, 可整理於表九。

表九: 尤拉-柯西微分方程的兩次拉氏轉換結果

$y(t) \backslash Y(s)$	$s^2 Y''(s)$	$s Y'(s)$	$Y(s)$	
$at^2 y''(t)$	a	$4a$	$2a$	第一次 拉氏 轉換
$+bt y'(t)$		$-b$	$-b$	
$+cy(t)$			$+c$	
$at^2 y'' + bt y' + cy$	$a = A$	$4a - b = B$	$2a - b + c = C$	
$at^2 y''(t)$	$A = a$	$4A = 4a$	$2A = 2a$	第二次 拉氏 轉換
$+(4a - b)ty'(t)$		$-B = -(4a - b)$	$-B = -(4a - b)$	
$+(2a - b + c)y(t)$			$+C = +(2a - b + c)$	
$At^2 y'' + Bty' + Cy$	a	b	c	

拉氏轉換無法求解尤拉-柯西微分方程, 但其轉換兩次後的結果有回復性, 而且初始值條件因在轉換過程中逐漸被微分去除掉, 並不影響此結果的回復性。欲求解可由 $y(t) = t^m$ 嘗試解之。由於微分方程有很好的對稱性 (經過時間 t 平移) 所以拉普拉斯轉換可以將常係數微分方程轉換為代數方程。但如何求得拉普拉斯逆轉換? 這就需要複變函數更深的理論。

3. 結論

本文前兩部分引入階梯函數、脈衝函數與廣義函數, 利用運算數學的思路來求得函數的傅立葉轉換。第三與第四部分則利用在轉換域的關係式, 進而避開直接由定義去做的繁複計算來求解。尤其是求 e^{-t^2} 的傅立葉轉換, 照定義的算法相當繁瑣, 需用到複變函數的解析函數圍道積分, 這在一些不嚴謹的 YouTube 影片中是被忽略的。然而利用本文的技巧, 便可簡單又嚴謹的求其轉換。第五部分則是發現尤拉-柯西微分方程做兩次拉氏轉換後是不變的, 且初始條件不影響其結果。透過基本轉換性質的靈活運用, 相信未來運算數學也能夠繼續有效率的解決問題。此文希望對老師與學生提供有意義的教與學經驗參考與分享。

致謝

本研究結果, 第二作者吳庭安感謝教育部海大教學中心, 教學卓越計畫大暑案 NTOU E-14 的經費贊助、教育部基礎研究人才培育計畫 USP-109A0162 的經費贊助以及感謝中研院數學所前副所長李志豪博士、淡大土木系李家瑋老師、海大河工系李應德老師、高政宏博士、高聖凱助理、邵程祥學長、戴暉宸學長、高浩真學長, 提供寶貴意見。

參考文獻

1. Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Application of Laplace Transform*, Springer-verlag New York Heidelberg Berlin, 1970.
2. Mikusinski, J., *Operational Calculus*, Pergmon Press, 1958.
3. Yosida, K., *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions*, Applied Mathematics Science Vol. 55, Springer, 1984.
4. 林琦焜。傅立葉分析與應用。滄海書局, 2010。
5. 陳正宗。工程數學講義。海洋大學, 基隆, 2021。
6. 陳正宗。工程數學教學經驗談。工程力學與數學創意教學研討會, 台北, 2004。
7. 陳正宗。工程數學教學拾趣。數學傳播季刊, 31(4), 18-37, 2007。
8. Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, New York: McGraw-Hill Book Co., 1958.
9. Lighthill, M.J., *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 1958.
10. Carslaw, H. S. and Jaeger J. C., *Operational Methods in Applied Mathematics*, Dover Publications, 1963.
11. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, New York: Wiley, 1988.
12. O'Neil, P.V., *Advanced Engineering Mathematics*, Boston: Thomson, 1995.
13. Riley, K. F., Hobson M.P., and Bence S.J., *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2002.
14. <https://www.youtube.com/watch?v=8yp640Iz0yM> (rigorous)
15. https://www.youtube.com/watch?v=_wWk84m4_x0 (not rigorous)
16. <https://www.youtube.com/watch?v=iLQ-E0FA85Q&t=1068s> (not rigorous)
17. <https://www.youtube.com/watch?v=KxiAoDLRyFc> (not rigorous)
18. <https://www.youtube.com/watch?v=QmjVdjW23VU> (NTOU/MSV new approach).
19. 林琦焜。private communication, 2021。

—本文作者陳正宗特聘講座教授任教國立臺灣海洋大學河海工程學系, 吳庭安投稿時就讀國立臺灣海洋大學河海工程學系大學部三年級, 周彥廷投稿時就讀國立臺灣海洋大學河海工程學系碩士班一年級, 陳彥亨投稿時就讀國立清華大學電機工程學系大學部四年級—