數學傳播　46卷2期, pp. 20-41

d'Alembert 的降階法

林琦焜

1. 啓蒙運動的健將 — 達朗貝爾

> 『因此, 形而上學和數學是在所有屬於理性的科學中, 想像力扮演著最重要的角色。 $\cdots$ 想像力對於同樣具有創造力的數學家與詩人而言是一樣重要的。$\cdots$ 在所有古代偉人中, 阿基米德可能是最值得放在荷馬旁邊的人。』
>
> — Jean d'Alembert (1717~1783) —

達朗貝爾[1] (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert; 1717~1783), 他的故事就好像法國大文豪維克多 – 雨果 (Victor Hugo, 1802~1885) 所著、於 1831 年 1 月 14 日出版的小說《鐘樓怪人 (*The Hunchback of Notre-Dame*)》的主角, 出生時親身媽媽是未婚生子, 而被遺棄在 St Jean Le Rond 教堂的階梯 (step) 上。所以按當時的習慣依教堂之名取 Jean-Baptiste le Rond 爲名 (first name), 這同時也就透漏了其出身。最終這個棄嬰成爲與同時代瑞士最著名數學家歐拉 (Euler) 齊名的法國數學家, 並在啟蒙運動中扮演著舉足輕重的角色。

啟蒙 (Enlightenment) 原意是「照亮」, 意指運用人的理性之光袪除一切蒙昧、無知與渾濁的思想;「啟蒙運動」是指十七、十八世紀在西歐所產生波瀾壯闊的思想解放運動。1784 年德國哲學家康德 (Immanuel Kant, 1724~1804) 在啟蒙運動最鼎盛時期撰寫了一篇《什麼是啓蒙?》(*What is Enlightenment*?) 的文章, 他一開始便將啟蒙定義爲:『人類脫離由自我所導致的不成熟狀態。』啟蒙運動的目的是獲得思想自由。人們需要解放自己, 擺脫對權威的依賴。《敢於認知》(*Sapere aude*) 是康德對於那個時代的呼籲! 所以, 探索並獲得思想自由也是關乎道德, 因爲懶惰與怯弱是阻礙開啟探索過程的罪魁禍首。

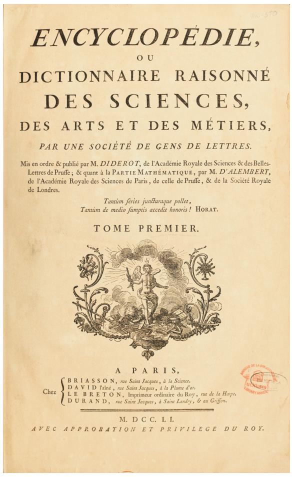
ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science. DAVID l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or. LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe. DURAND, rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.
M. DCC. LI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

圖 1: 百科全書

[1] d'Alembert 是法文, 最後的 t 不發音, 所以應翻爲達朗貝爾不是達朗伯特。

啟蒙運動時期的思想家們爲原本黑暗的世界帶來了光明, 清晰明瞭取代疑雲重重, 人們得以撥雲見日。此時知識是公共財, 不是私人物品, 所以不應被私藏, 而是人人共享。知識共享而非少數知識菁英或特權階級之專利。這可能是啟蒙運動最具革命性色彩的思想, 也是當今民主社會結構的根基之一。接受教育不再是王公貴族或教士們的特權, 於是百科全書誕生了。十八世紀啟蒙運動時期的傑出豐碑是由法國一群作家與科學家 (包含數學家) 編撰完成的百科全書。這些人完全有意識地摒棄了宗教與形而上學 (metaphysics), 轉而在科學中 (特別是牛頓力學) 尋找新的知識動力。所以百科全書就成爲反對威權及愚民政策強而有力的工具, 除了編排方式變得更加通俗易懂之外, 書寫的語言也從拉丁文變成各國的方言。啟蒙運動時期的百科全書中最著名的是由狄德羅 (Danis Diderot, 1713∼1784) 主編的法國百科全書 (L'Encyclopédie), 而其中達朗貝爾有 12 年時間擔任這套書有關科學與數學的編輯, 尤其這套書的導論要歸功於他。達朗貝爾是一個對於哲學與文學懷有廣泛興趣的數學家。

理性的自由運用是啟蒙運動的本質。這基本上是承襲了古希臘的精神: 大自然是根據理性而設計的, 所有的自然現象都遵循著一個不變的計畫, 可以說是《數學計畫》。人類的心智可以藉由理性來認識大自然。理性的思維是驅動力, 帶動人們發現真理, 這是一種至高無上的核心價值。文藝復興使人們重新發現數學的力量, 它不再是神祕的, 反之而是強而有力的理性工具。人們試圖透過數學來揭示大自然的奧秘與規律。特別地, 1687 年牛頓發表的鉅著《自然哲學的數學原理》提供理性的工具, 因此極大地推動了啟蒙運動的興起。我們的宇宙是高度數學化, 祂遵循的自然律最終總是可以用微積分的語言和微分方程的形式表達出來。若沒有微積分以及微積分所揭開的自然世界內在運作模式, 現代世界將會是一個無法想像的樣貌。藉由微積分人們終於可以理解上帝的心意, 這是數學家最可以自豪之處。

在微積分發展的歷史第一次危機是來自愛爾蘭的英國大主教喬治 · 柏克萊極端刻薄的批評:

> 『這些流數到底是甚麼?逐漸消失的增量的速度有多麼大?這些相同的逐漸消失的增量是甚麼?它們既不是有限的量、也不是無窮小的量, 更不是零。難道我們不能把它們稱之爲消逝的量的鬼魂嗎?』
>
> — George Berkeley (1685∼1753) —

這引發了整個微積分之根基的論戰, 有心之士發覺有必要建立微積分的邏輯基礎。達蘭貝爾是第一個提出要將微積分的基礎建立在《極限(limit)》上, 但是他幾乎都用幾何學來解釋。由於達朗貝爾的幾何思維模式無法提供適當的專業術語來對極限觀念做詳細的詮釋。雖然他無力解決, 但鼓勵他的學生與後繼者仍然要有信心, 最後微積分或分析的嚴格化就必須等到柯西 (A. Cauchy, 1789∼1857) 與 K. Weierstrass (1815∼1897) 藉由算術的概念才得以解決, 通常我們將他們兩人的工作稱爲《分析的算術化 (*Arithmetization of analysis*)》[2], 就是現在我們

[2]分析的算術化之鼻祖應歸功於 B. Bolzano 1781∼1848, 捷克人, 他是一個天主教教士和宗教哲學家。他數學研究的來源是受到經院哲學的影響。

所熟悉的 ϵ-δ 這套語言。

達朗貝爾 (d'Alembert) 最爲人們所知的是 1747 年發表的論文《張緊的弦振動時形成的曲線研究》。在這篇文章中達朗貝爾藉由牛頓定律推導出科學史上第一個偏微分方程 (弦振動方程或波動方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{1.1}$$

這裡 T 是琴弦的張力、ρ 是密度、c 則是琴弦的傳播速度。並且只用到微積分的知識, 他就證明了弦振動方程 (1.1) 的解 $u(x,t)$ 可以表示爲

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct). \tag{1.2}$$

其中 f、g 是任意的好函數 (意思是二次可微), 通常我們稱 (1.2) 爲 d'Alembert 公式以紀念他的貢獻。與達朗貝爾同年代的瑞士數學家 L. Euler (1707~1783), 從 d'Alembert 的研究成果出發也推得波動方程 (有邊界), 並且給了一個特殊的三角級數解:

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}, \\ u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \end{cases} \qquad 0 \le x \le L. \tag{1.3}$$

這就是 Fourier 級數的最初形式。在此之前瑞士 Bernoulli 家族的 Daniel Bernoulli (1700-1782) 在 1727 年也研究了波動方程, 他引進分離變數法 (separation of variables), 根據他的理論, 最一般的解可以表示爲無窮多個正弦波的疊加 (即三角級數)。因此與 d'Alembert 及 Euler 的成果有差異, 後來法國數學家 Louis Lagrange (1736~1813) 也加入這一場爲期將近一個世紀的論戰。整個論戰的核心是那種函數才可以表示成三角函數之和, 在那個年代人們對於「函數是什麼?」仍然是非常的分歧。這個問題一直要等到法國數學家 Fourier 才解決, 而 Fourier 分析就是這場論戰的結晶。

達朗貝爾可以說是法國數學物理 (Mathematical Physics) 的創始人, 他直接或間接影響了 J.L. Lagrange (1736~1813), G. Monge (1746~1818), P.S. Laplace (1749~1827), A. Legendre (1752~1833), J. Fourier (1768~1830) 還有 S. Poisson (1781~1840)。這些偉大的數學家們共同創造了法國大革命 (啟蒙運動) 之後數學的黃金時代, 更開創了數學史上最偉大的世紀。

圖 2: Jean d'Alembert (1717∼1783)

二、降階法(Reduction of order)

第一次將降階法與達朗貝爾連接在一起是讀了 Yosida [13] 的書。按照吉田耕作 (Kosaku Yosida) 教授做學問的嚴謹度我相信他有考據過, 也從此我確信降階法應歸功於達朗貝爾。達朗貝爾的降階法直接影響了 Lagrange 的參數變數法 (Lagrange's variation of parameters), 這是解決非齊次微分方程最重要的方法。有興趣的讀者可以比較兩者之間的共通性。給定二階線性微分方程

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

微分方程 (2.1) 告訴我們: 要找一個函數 y 使得一次微分與二次微分跟自己一樣可以相加減, 滿足這性質的函數必然是《指數函數》。這是指數函數所有性質的來源, 也是重要應用的根本原因。可以假設 $y = e^{mx}$, 如此就將微分方程轉化爲代數方程的問題

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{2.2}$$

如果 (2.2) 有兩個相異實根 $m = m_1, m_2$ 則微分方程 (2.1) 的一般解爲 (利用線性!)

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

但是如果 (2.2) 有重根 $m = m_1, m_1$ 時, 顯然 $y_1 = e^{m_1 x}$ 是一個解, 那第二個解呢? 這就是降階法想解答的問題。我們從簡單的例子出發

$$D^2 y = y'' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = (c_1 + c_2 x) \cdot 1. \tag{2.4}$$

這裡$D=\frac{d}{dx}$表示微分算子。平面上的曲線滿足二次微分等於 0, 這相當於曲率 (curvature) 爲 0, 而一條沒有彎曲的曲線必然是直線。或者由牛頓力學的角度, 二次微分相當於加速度。一個加速度爲 0 的運動軌跡一定是直線運動。(2.4)可以推廣爲

$$(D-m)^2y=0 \quad\Longrightarrow\quad y=(c_1+c_2x)\cdot e^{mx}. \tag{2.5}$$

微分平移 $D\to D-m$ 等價於將 e^{mx} 作用到 $y_1=1$:

$$D\to D-m \quad\Longrightarrow\quad 1\to e^{mx}.$$

例題2.1: 試討論二階微分方程

$$y''-2my'+m^2y=0, \qquad m\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

解: 由 (2.3)–(2.4) 的分析可知若 $y_1(x)=e^{mx}$ 爲 (2.6) 的一個解則第二個解可以設爲

$$y_2(x)=y(x)=v(x)y_1(x)=v(x)e^{mx}. \tag{2.7}$$

代入 (2.6) 計算得

$$y''-2my'+m^2y=v''e^{mx}=0,$$

所以

$$v''(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad v(x)=c_1+c_2x.$$

因此第二個解爲

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^{mx} \quad\Longrightarrow\quad y_2(x)=xe^{mx}. \tag{2.8}$$

令 $u=v'$ 則

$$v''=0 \quad\Longrightarrow\quad u'=0. \tag{2.9}$$

u 滿足一階微分方程, 這也是爲何稱爲降階法的緣由。 □

定理2.2 (d'Alembert **降階法**): 已知 p,q 是連續函數, $y=y_1(x)$ 是二階線性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2.10}$$

的一個解, 則第二個解爲

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}\exp\left(-\int p(\xi)d\xi\right)d\eta. \tag{2.11}$$

解: 根據降階法第二個解可以假設爲

$$y = y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

代入 (2.10) 計算得知 $v = v(x)$ 滿足二階微分方程

$$v'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)v' = 0. \tag{2.12}$$

令 $v' = u$ 則 u 滿足一階微分方程 (降階了!)

$$u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)u = 0. \tag{2.13}$$

因爲 $y_1(x)$ 是已知函數, 微分方程 (2.13) 可分離變數 (也就是 (2.12) 或 (2.13) 是可積的意思!)

$$\frac{u'}{u} + 2\frac{y_1'}{y_1} + p = 0,$$

積分得

$$\ln u + 2\ln y_1 + \int p(\xi)d\xi = K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

之後再取指數

$$uy_1^2 \exp\left(\int p(\xi)d\xi\right) = e^K = c_2,$$

根據 v 的定義

$$v'(x) = u(x) = \frac{c_2}{y_1^2(x)} \exp\left(-\int p(\xi)d\xi\right),$$

$$v(x) = c_2 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(\xi)d\xi\right)d\eta + c_1.$$

所以

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = c_1y_1(x) + c_2y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(\xi)d\xi\right)d\eta. \tag{2.14}$$

取 $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ 則第二個解爲 (2.11);

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p(\xi)d\xi\right)d\eta.$$

另外也可以藉由積分因子來解 (2.13)

$$\mu(x) = \exp\left(\int 2\frac{y_1'}{y_1} + p(\xi)d\xi\right) = y_1^2(x)\left(\int p(\xi)d\xi\right). \tag{2.15}$$

則 (2.13) 成爲全微分

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)y_1^2(x)\exp\left(\int p(\xi)d\xi\right)\right]=0,$$

積分得

$$u(x)y_1^2(x)\exp\left(\int p(\xi)d\xi\right)=c_2. \qquad \square$$

註解:

(i) 二階微分方程的一般解有兩個常數 c_1, c_2, 從線性空間而言其意義是線性組合, 但更精確從微分方程的角度而言則是不定積分兩次, 我們在第四節可以看得更清楚。

(ii) 就算 (2.2) 只有重根 $m=m_1, m_1$, 我們仍然可以由 $y_1(x)=e^{m_1x}$ 求得 (2.1) 的第二個解。想法是微分

$$\frac{e^{mx}-e^{m_1x}}{m-m_1}, \qquad m\neq m_1. \tag{2.16}$$

對所有的 m 上式都是 (2.1) 的解, 可以令 $m\to m_1$

$$\lim_{m\to m_1}\frac{e^{mx}-e^{m_1x}}{m-m_1}=xe^{m_1x}, \tag{2.17}$$

這就是第二個解

$$y_2(x)=xe^{m_1x}.$$

(iii) 第二個解$y_2(x)=xe^{mx}$也可以這麼看:

$$L[y]=L[e^{mx}]=a(m-m_1)^2e^{mx}. \tag{2.18}$$

(2.18) 對 m 微分

$$\frac{d}{dm}L[e^{mx}]=L[xe^{mx}]=ax(m-m_1)^2e^{mx}+2a(m-m_1)e^{mx}=0. \tag{2.19}$$

所以 $y_2(x)=xe^{mx}$ 是第二個解。

(iv) (2.12) 是 (2.9) 的推廣, 因此降階法並沒有限定是重根。而是告訴你: 如果事先得知一個解則可以藉由降階法得到第二個解。

降階法並沒有限定在常係數的微分方程。

例題 2.3: Legendre 微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0, \qquad -1<x<1. \tag{2.20}$$

解: 首先忽略 y'' 只看一階微分

$$-2xy' + 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = x.$$

由此可知 $y_1(x) = x$ 爲 (2.20) 的一個解則第二個解可以設爲

$$y = y_2 = vy_1 = vx, \qquad v = v(x).$$

代入 (2.20) 計算得

$$x(1-x^2)v'' + (2-4x^2)v' = 0.$$

令 $u = v'$ 則 v 滿足一階微分方程 (降階了!)

$$x(1-x^2)u' + (2-4x^2)u = 0. \tag{2.21}$$

利用分離變數或積分因子得

$$u(x) = v'(x) = \frac{c_1}{x^2(1-x^2)},$$

$$v(x) = c_1 \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx = c_1 \bigg(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \bigg) + c_2.$$

所以

$$y(x) = xv(x) = c_1 \bigg(-1 + \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \bigg) + c_2 x.$$

取 $c_1 = -1, c_2 = 0$ 則第二個解爲

$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \tag{2.22}$$

□

3. **Abel** 公式

Abel 公式有時也稱爲 Abel-Jacobi-Liouville 公式, 這是挪威最偉大數學家 Niels Henrik Abel (1802∼1829) 發表在《Journal für die reine und angewandte Mathematik(純數學與應用數學雜誌)》關於微分方程的重要成果。這雜誌是德國建築師暨業餘數學家 August Leopold Crelle (1780∼1855) 於1826年所創辦第一本專業數學期刊, 而 Abel 就是這份期刊的第一個撰稿人, 該雜誌前三卷刊載了 Abel 二十二篇開創性文章。Abel 的偉大工作使這份期刊旗開得勝, 最後這個雜誌使得 Crelle 成了名, 最早的時候人們稱這個雜誌爲《*Crelle* 的雜誌》。雖然 Crelle 並不是專業的數學家但這份雜誌的創辦卻是他對於數學發展最大的貢獻。關於 Crelle 雜誌的創立及其早期的影響德國數學家 F. Klein (哥廷根偉大傳統的建立者) 在 [9] 的第三章有非常精采的論述。

定理 3.1 (Abel **公式**): 已知 $p = p(x)$, $q = q(x)$ 是連續函數, y_1, y_2 是二階微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.1}$$

的兩個獨立解, 則 Wronskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{3.2}$$

滿足一階微分方程

$$W' + p(x)W = 0, \tag{3.3}$$

所以

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right). \tag{3.4}$$

證明: 主要的想法是利用微分方程式 (3.1) 與行列式的性質

$$\begin{aligned} W'(x) &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= -p(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) = -p(x)W(x). \end{aligned}$$

□

Abel 公式給了我們達朗貝爾的降階法之所以可行的理論基礎, 它還有幾種推廣:

定理 3.2 (Abel **公式二**): 已知 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是連續函數, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是 n 階微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{3.5}$$

的n個獨立解, 則其Wronskian

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

滿足一階微分方程

$$W' + p_1(x)W = 0. \tag{3.7}$$

所以

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(\xi)d\xi\right). \tag{3.8}$$

定理 3.3 (Abel **公式三**): 已知 $n \times n$ 矩陣 $A(t)$ 是連續函數, 而向量函數

$$\boldsymbol{x}_i(t) = (x_{1,i}(t), x_{2,i}(t), \ldots, x_{n,i}(t))^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

是一階 (聯立) 微分方程組

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{3.9}$$

的 n 個獨立解, 則其 Wronskian

$$W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n](t) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \cdots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \cdots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \cdots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

滿足一階微分方程

$$W' + \mathrm{tr}A(t)W = 0, \tag{3.11}$$

其中 $\mathrm{tr}A(t)$ 是矩陣 $A(t)$ 的跡 (trace) 也就是對角線的和;

$$\mathrm{tr}A(t) = a_{11}(t) + \cdots + a_{nn}(t). \tag{3.12}$$

所以

$$W(t) = W(0)\exp\left(-\int_0^t (a_{11}(s) + \cdots + a_{nn}(s))ds\right). \tag{3.13}$$

註解:

(i) Abel 公式 (3.3) 告訴我們微分方程 (3.1) 的 Wronskian W 基本上是一個指數函數, 因此要麼全等於 0 要麼不等於 0 (全憑 $W(0)$), 也就是說 (3.1) 的兩個解 y_1, y_2 不是函數相關 (functional dependent) 就是函數獨立 (functional independent), 這是線性相關與線性獨立的推廣。

(ii) Wronskian 是行列式可以視爲面積或體積, 所以 Abel 公式基本上是探討面積或體積之變化。所以 Abel 公式在流體力學相當於 Euler 展開公式 (Euler expansion formula), 可以說明流體是可壓縮或不可壓縮。另外 Abel 公式在統計力學相當於 Liouville 公式。有興趣的讀者可以參考 Arnold 的書 [2] 或其它相關書籍與文獻。

(iii) 假設 $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n=e^{\lambda_n x}$ 為 (3.5) 的 n 個獨立解, 則

$$W=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

此時 Vandermode 行列式自然出現。

(iv) 通常大學部是學不到微分方程的存在唯一定理, 但是又沒有進階的課程銜接以至於學生缺少 Picard 定理這個常識。但是 Abel 定理可以彌補這個不足。假設 y_1, y_2 是 (3.1) 的兩個解, 所以 $W(x_0)=0$。再由 Abel 定理得 $W(x)=0$ 故 $y_1(x)=y_2(x)$。

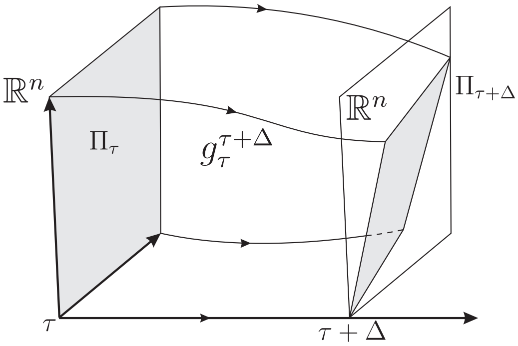

圖3: Liouville 定理

例題3.4: 利用 Abel 公式討論微分方程 (2.6)

$$(D-m)^2 y=y''-2my'+m^2 y=0.$$

解: 首先 $y_1=e^{mx}$ 是一個解但根據 Abel 公式 (3.4)

$$W=\begin{vmatrix} e^{mx} & y_2 \\ me^{mx} & y_2' \end{vmatrix}=c_1 e^{2mx}, \qquad c_1\in\mathbb{R}.$$

所以 y_2 滿足一階非齊次微分方程

$$y_2'-my_2=c_1 e^{mx}. \tag{3.14}$$

藉由積分因子 $\mu(x)=e^{-mx}$ 得

$$(y_2 e^{-mx})'=c_1 \quad\Longrightarrow\quad y_2=c_1 x e^{mx}+c_2 e^{mx}, \qquad c_2\in\mathbb{R}.$$

取 $c_1=1, c_2=0$ 就是第二個獨立解 $y_2=xe^{mx}$。 □

註解:

(i) 由 $y_1 = c_1 e^{mx}$ 與 (3.14) 可以看得出來 y_1, y_2 滿足的聯立微分方程組正是 Jordan 型

$$\begin{cases} y_1' = my_1 \\ y_2' = my_2 + y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} Ty \ = (D-m)y_1 = 0 \\ T^2 y = (D-m)^2 y_2 = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

$T = D - m$ 是一個冪零算子 (Nilpotent operator), 也就是說: Abel 公式是有 Jordan 型的內涵。

4. **Jordan** 標準型

雖然在 (2.4)、(2.11) 我們已經看出降階法的端倪。但從矩陣的角度而言降階法是有 Jordan 型的內涵。從簡單的例子出發

$$D^2 y = y'' = (y')' = 0. \tag{4.1}$$

令 $z = y'$ 則 (4.1) 等價於

$$y'' = 0 \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = y'' = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

個別處理先解 z 然後解 y 得

$$\begin{aligned} z' = \quad 0 \quad &\Longrightarrow z = c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}, \\ y' = z = c_2 &\Longrightarrow y = c_2 x + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

令 $U = (y, z)^{\mathrm{T}}$, $U_0 = U(0) = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ 可以重新將 (4.2) 表示爲

$$U' = J_0 U, \qquad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

矩陣 J_0 正是基本 Jordan 型 (Elementary Jordan form)

$$U(x) = e^{xJ_0} U_0 = (I + xJ_0) U_0 = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

取第一項就是 (4.1) 的解。將 (4.4) 的解 $U(x)$ 刻意表示爲

$$U(x) = c_1 \boldsymbol{e}_1 + c_2 (x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2), \qquad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

換句話說

$$\{\boldsymbol{e}_1, x\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\} \tag{4.6}$$

是一階聯立微分方程組 (4.3) 的兩個獨立解。此時標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 正是 J_0 的廣義固有向量 (generalized eigenvectors);

$$\begin{cases} J_0\boldsymbol{e}_1 = 0\boldsymbol{e}_1 \\ J_0\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2. \end{cases} \tag{4.7}$$

細心觀察從類比的角度而言, (4.7) 本質上是微分方程 (4.2) 在矩陣 (或算子) 的一種表現 (representation)。

例題 4.1: 利用因式分解與 Jordan 型討論微分方程

$$(D-m)^2y = y''-2my'+m^2y=0. \tag{4.8}$$

解: 我們可以將前面 (4.1)–(4.7) 的計算完全移植過來。首先將微分方程 (4.8) 分解為

$$y''-my'-(my'-m^2y) = (y'-my)'-m(y'-my)=0.$$

令$z=y'-my$ 則 (4.8) 等價於

$$y''-2my'+m^2y=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y'=my+z \\ z'=mz. \end{cases} \tag{4.9}$$

先解 z 然後利用積分因子解 y 得

$$\begin{aligned} z'=mz \quad &\Longrightarrow \quad z=c_2e^{mx}, & c_2\in\mathbb{R}, \\ y'=my+z \quad &\Longrightarrow \quad y=c_2xe^{mx}+c_1e^{mx}, & c_1\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

令 $U=(y,z)^{\mathrm{T}}, U_0=U(0)=(c_1,c_2)^{\mathrm{T}}$ 可以重新將 (4.9) 表示為

$$U'=J_mU, \qquad J_m=\begin{bmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{bmatrix} = mI+J_0. \tag{4.10}$$

矩陣 J_m 正是 Jordan 型 (Jordan form)

$$\begin{aligned} U(x) &= e^{xJ_m}U_0 = e^{mx}(I+xJ_0)U_0 \\ &= e^{mx}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{mx}+c_2xe^{mx} \\ c_2e^{mx} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

取 $U(x)$ 的第一項就是 (4.8) 或 (2.6) 的解。$U(x)$ 可以進一步表示為

$$U(x) = c_1 e^{mx}\boldsymbol{e}_1 + c_2 e^{mx}(\boldsymbol{e}_2 + x\boldsymbol{e}_1), \tag{4.12}$$

所以

$$\{e^{mx}\boldsymbol{e}_1, e^{mx}(x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\} \tag{4.13}$$

是一階聯立微分方程組 (4.10) 的兩個獨立解。此時$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$正是$J_m$的廣義固有向量 (generalized eigenvectors);

$$\begin{cases} J_m\boldsymbol{e}_1 = m\boldsymbol{e}_1 \\ J_m\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2. \end{cases} \tag{4.14}$$

□

註解:

(i) 典型將二階微分方程轉化為一階聯立微分方程是考慮 $\hat{z} = y'$ 則

$$y'' - 2my' + m^2y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y' = \hat{z} \\ \hat{z}' = y'' = 2m\hat{z} - m^2y. \end{cases} \tag{4.15}$$

定義向量 $V = \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix}$ 則 (4.15) 重新表示為

$$V' = AV, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^2 & 2m \end{bmatrix}; \tag{4.16}$$

矩陣 A 稱為伴隨矩陣 (companion matrix)。(4.16) 可以轉換為 (4.10)

$$U = \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} - my \end{bmatrix} = P^{-1}V, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

比較 (4.10) 與 (4.16) 的同時我們也將矩陣 A 化為 Jordan 型

$$U' = P^{-1}APU = J_mU \quad \Longrightarrow \quad J_m = P^{-1}AP, \tag{4.18}$$

而矩陣 P 的兩個行向量 (column vector)[3] $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 正是A的廣義特徵

[3]column 譯為柱子, 建築學上著名的羅馬柱就是 Roman column。按照定義 column 是指印刷或寫在頁面上垂直排列的項。臺灣保留古典漢語的書寫方式: 從上到下, 由右到左, 稱垂直上下為行。因此將 column vector 譯為行向量而將 row vector 譯為列向量。但是日本與中國受西方影響書寫方式改為由左到右, 將 column vector 譯為列向量而將 row vector 譯為行向量。按矩陣的表達式 $[a_{ij}]$, 下標的 i 是 row j 是 column, 以行列式而言日本與中國的翻譯與英文是一致的, 而古典漢語則應譯為列行式。

(固有) 向量

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1 = m\boldsymbol{\xi}_1 \\ A\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 + m\boldsymbol{\xi}_2, \end{cases} \tag{4.19}$$

而且可以結論

$$\{e^{mx}\boldsymbol{\xi}_1, e^{mx}(x\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)\} \tag{4.20}$$

是一階聯立微分方程組 (4.16) 的兩個獨立解, 與 (4.12)−(4.14) 比較只需將標準基底 $\boldsymbol{e}_i$ 換爲廣義特徵 (固有) 向量 $\boldsymbol{\xi}_i$

$$\boldsymbol{e}_i \to \boldsymbol{\xi}_i \qquad i = 1, 2\,.$$

(ii) 這裡我們觸碰到藉由因式分解來拆解微分方程 (4.8) 的本質。因爲整個重點是一次項 $2my'$ 而且類似於配方法兩邊要平均分配 (對稱!), 這個動作 (指因式分解) 就是等價於變換基底將矩陣化爲標準型 (對角化或 Jordan 型)。因式分解這個拆解動作背後的思想是《等比級數》!

(iii) 雖然 Jordan 型是線性代數必學的常識, 但是我們對於 Jordan 是誰? 是相當陌生的。在科學史上出名的 Jordan 倒是不少, 除了數學家之外量子力學也有 P. Jordan。而 Jordan 型這位是法國數學家 Camille Jordan (1838∼1922), 他主要的工作是群論 (group theory)。要特別提醒的是不要與 Gauss-Jordan 消去法的 Wilhelm Jordan(1842∼1899) 混淆了。但坦白而言法國人姓 Jordan 的還真的很特別。事實上, 克萊因 (F. Klein) 就曾經評論過 C. Jordan 寫的書很不法國式; 冗長且沉悶, 幾乎像一本德國書 (參閱 [9])。

(iv) 電視廣告斯斯有兩種, 同樣 Jordan 型也有兩種: 上三角與下三角。因爲互爲轉置 (transpose) 所以是等價的, 你只需要將基底 (廣義特徵向量) 倒著排就可以。

因式分解法並沒有限定是重根。

例題4.2: 利用因式分解討論微分方程

$$y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1 m_2 y = 0, \qquad m_1, m_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

解: 首先將微分方程 (4.21) 分解爲

$$(y' - m_1 y)' - m_2(y' - m_1 y) = 0.$$

令 $z = y' - m_1 y$ 則 (4.21) 等價於

$$y'' - (m_1 + m_2)y' + m_1 m_2 y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y' = m_1 y + z \\ z' = m_2 z. \end{cases} \tag{4.22}$$

先解 z 然後利用積分因子解 y 得

$$
\begin{aligned}
z' &= m_2 z &\implies\quad & z = c_2 e^{m_2 x}, && c_2 \in \mathbb{R},\\
y' &= m_1 y + z &\implies\quad & y = c_1 e^{m_1 x} + \frac{c_2}{m_2 - m_1} e^{m_2 x}, && c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

令 $\widetilde{U} = (y, z)^{\mathrm{T}}, \widetilde{U}_0 = \widetilde{U}(0) = (c_1 + \frac{c_2}{m_2 - m_1}, c_2)^{\mathrm{T}}$ 可以重新將 (4.21) 表示爲

$$
\widetilde{U}' = A_1 \widetilde{U}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 1 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \tag{4.23}
$$

A_1 可以對角化, 但不需對角化也可以算 e^{xA_1}。因爲 A_1是一個 2×2 矩陣, 根據 Cayley-Hamilton 定理可以假設

$$
e^{xA_1} = aI + bA_1, \tag{4.24}
$$

其中 a, b 是待定之常數。令 $A_1 = m_1,\, m_2$ 得 a, b 之聯立方程組

$$
\begin{cases} e^{m_1 x} = a + b m_1 \\[2ex] e^{m_2 x} = a + b m_2, \end{cases} \qquad \implies \qquad \begin{cases} a = \dfrac{m_1 e^{m_2 x} - m_2 e^{m_1 x}}{m_1 - m_2}, \\[2ex] b = \dfrac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{m_1 - m_2}. \end{cases}
$$

代回 (4.24) 得

$$
e^{xA_1} = \begin{bmatrix} e^{m_1 x} & \frac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} \\[2ex] 0 & e^{m_2 x} \end{bmatrix}. \tag{4.25}
$$

所以 (4.23) 的解爲

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}(x) &= e^{xA_1} \widetilde{U}_0 = \begin{bmatrix} c_1 e^{m_1 x} + \frac{c_2}{m_2 - m_1} e^{m_2 x} \\ c_2 e^{m_2 x} \end{bmatrix} \\
&= c_1 e^{m_1 x} \boldsymbol{e}_1 + c_2 e^{m_2 x} \left(\frac{1}{m_2 - m_1} \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \right).
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

取 $\widetilde{U}(x)$ 的第一項就是 (4.21) 的解。另外值得提的是如果 c_2 的選取滿足

$$
\lim_{m_2 \to m} \frac{c_2}{m_2 - m} = 0\,, \qquad \lim_{m_2 \to m} \widetilde{U}(0) = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}} = U(0), \tag{4.27}
$$

這個條件可以稱爲準備良好的初值 (well-prepared initial condition), 在研究微分方程的奇異極限問題時常常需要這個條件, 如果不滿足這個條件就會產生初始層 (initial layer), 造成收

斂的困難。在 (4.27) 這個條件下 (4.25)−(4.26) 正是 (4.11)−(4.12) 的推廣 (設 $m = m_1$)

$$\lim_{m_2\to m} e^{xA_1} = \begin{bmatrix} e^{mx} & xe^{mx} \\ 0 & e^{mx} \end{bmatrix} = e^{mx}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{xJ_m},$$

$$\lim_{m_2\to m} \widetilde{U}(x) = \lim_{m_2\to m} e^{xA_1}\widetilde{U}(0) = \lim_{m_2\to m} \begin{bmatrix} c_1e^{mx} + c_2\frac{e^{m_2x}-e^{mx}}{m_2-m} + \frac{c_2}{m_2-m}e^{mx} \\ c_2e^{m_2x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} \\ c_2e^{mx} \end{bmatrix} = U(x) = e^{xJ_m}U(0). \qquad \square$$

爲了完整, 我們有必要討論虛數根的情形。

例題 4.3: 利用因式分解討論微分方程

$$y'' + m^2y = 0, \qquad m > 0. \tag{4.28}$$

解: 假設 $y = e^{rx}$ 則 (4.28) 轉換爲

$$r^2 + m^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad r = \pm mi.$$

根據 Euler 等式

$$e^{\pm im} = \cos mx \pm i\sin mx$$

所得到的解是複數值 (complex-valued), 這是令人 (尤其是物理學界) 難以接納的。因爲 m 是實數, 方程式 (4.28) 取共軛得

$$\overline{y'' + m^2y} = \overline{y}'' + m^2\overline{y} = \overline{0} = 0, \tag{4.29}$$

也就是說若 $y = y_1 + iy_2$ 是 (4.28) 的解則其共軛 $\overline{y} = y_1 - iy_2$ 也會是 (4.28) 的解, 而實部 $y_1 = \frac{1}{2}(y + \overline{y})$ 與虛部 $y_2 = \frac{1}{2i}(y - \overline{y})$ 是特殊的線性組合也會是解。所以 (4.28) 的一般解爲

$$y(x) = c_1\cos mx + c_2\sin mx\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.30}$$

在此我們提出另一種看法。首先將微分方程 (4.28) 分解爲

$$y'' + m^2y = y'' - (im - im)y' + m^2y = (y' + imy)' - im(y' + imy) = 0.$$

令 $z = y' + imy$ 則 (4.28) 等價於

$$y'' + m^2y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} y' = -imy + z, \\ z' = imz. \end{cases} \tag{4.31}$$

令 $y = y_1 + iy_2$, $z = z_1 + iz_2$ 則 (4.31) 可以改寫爲

$$\begin{cases} z_1' = -mz_2 \\ z_2' = mz_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = my_2 + z_1 \\ y_2' = -my_1 + z_2, \end{cases} \tag{4.31$'$}$$

或者表示爲向量 $Z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$, $Y = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$;

$$\begin{cases} Z' = m\mathcal{J}Z\,, \\ Y' = -m\mathcal{J}Y + Z\,, \end{cases} \qquad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

$\mathcal{J}$這個矩陣也是 Jordan 標準型的家族成員之一稱爲實 Jordan 型 (real Jordan form)。直接計算可得遞迴關係

$$\mathcal{J}^2 = -I, \qquad \mathcal{J}^3 = -\mathcal{J}, \qquad \mathcal{J}^4 = I, \qquad \cdots\cdots \tag{4.33}$$

利用 (4.33) 這個關係與 Taylor 級數可得

$$e^{x\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

回到 (4.32) 先解 Z

$$Z(x) = e^{mx\mathcal{J}}Z_0 = \begin{bmatrix} h_1 \cos mx - h_2 \sin mx \\ h_1 \sin mx + h_2 \cos mx \end{bmatrix}, \qquad Z_0 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\,. \tag{4.35}$$

然後利用積分因子解 Y 得

$$\begin{aligned} Y(x) &= e^{-mx\mathcal{J}}Y_0 + \int_0^x e^{-m(x-\xi)\mathcal{J}}Z(\xi)d\xi \\ &= e^{-mx\mathcal{J}}Y_0 + \int_0^x e^{-m(x-2\xi)\mathcal{J}}Z_0 d\xi \\ &= e^{-mx\mathcal{J}}Y_0 + \frac{\sin mx}{m}Z_0 \\ &= \begin{bmatrix} k_1 \cos mx + k_2 \sin mx + h_1 \frac{\sin mx}{m} \\ -k_1 \sin mx + k_2 \cos mx + h_2 \frac{\sin mx}{m} \end{bmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

不管是 y_1 或 y_2, 結果與 (4.30) 都是一致的。 $\square$

註解:

(i) (4.33) 這個關係式看起來似曾相識, 實際上 $\mathcal{J}$ 就是虛數 $i = \sqrt{-1}$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad i = \sqrt{-1} \tag{4.37}$$

所以 $\mathcal{J}$ 的幾何意義就是逆時針旋轉 90°。任意的複數 $a+ib$ 則有下列關係

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = aI + b\mathcal{J} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \longleftrightarrow \quad a+ib \in \mathbb{C}. \tag{4.38}$$

從矩陣 (或者線性變換) 的角度來看複數, 其幾何意義是再淸楚不過了。

(ii) 類似於 (4.15) 考慮 $z = y'$則

$$y'' + m^2 y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y' = z \\ z' = y'' = -m^2 y. \end{cases} \tag{4.39}$$

定義向量 $U = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ 則 (4.39) 重新表示為

$$U' = AU, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

可以藉由正規的程序將 A 化爲實 Jordan 型, 但我們不打算這麼做。首先矩陣 A 缺少對稱性 (對角線兩邊分別是 $-m^2$ 與 1), 最好是變換爲 m 與 $-m$, 這相當於將 (4.39) 轉換爲實 Jordan 型

$$\begin{cases} y' = -m\hat{z} \\ \hat{z}' = -\frac{1}{m}y'' = my \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix},$$

或

$$V' = m\mathcal{J}V, \qquad V = \begin{bmatrix} y \\ \hat{z} \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

(4.40) 與 (4.41) 的關係如下

$$U = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = PV, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}, \tag{4.42}$$

比較 (4.40) 與 (4.41) 的同時我們也將A化爲實 Jordan 型

$$V' = P^{-1}APV = J_m V \quad \Longrightarrow \quad J_m = P^{-1}AP, \tag{4.43}$$

而矩陣 $P = [\boldsymbol{\xi}_1 \ \ \boldsymbol{\xi}_2]$ 的兩個行向量 (column vector) $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m \end{bmatrix}$ 滿足

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1 = m\boldsymbol{\xi}_2 \\ A\boldsymbol{\xi}_2 = -m\boldsymbol{\xi}_1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A(\boldsymbol{\xi}_1 + i\boldsymbol{\xi}_2) = -im(\boldsymbol{\xi}_1 + i\boldsymbol{\xi}_2) \\ A(\boldsymbol{\xi}_1 - i\boldsymbol{\xi}_2) = \quad im(\boldsymbol{\xi}_1 - i\boldsymbol{\xi}_2), \end{cases} \tag{4.44}$$

所以 $\boldsymbol{\xi}_1 \pm i\boldsymbol{\xi}_2$ 正是 A 的特徵值 (固有值) $\mp im$ 所對應的特徵 (固有) 向量。

(iii) 如果 (4.39) 換爲更一般複數根的二階微分方程

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.45}$$

則第一步仍然是配方法將 (4.45) 改寫爲

$$(D - \alpha)^2 y + \beta^2 y = 0. \tag{4.46}$$

與 (4.39) 比較這相當於微分算子做個平移 $D \longrightarrow D - \alpha$

$$Dy = y' \longrightarrow (D - \alpha)y = y' - \alpha y,$$
$$Dz = z' \longrightarrow (D - \alpha)z = z' - \alpha z.$$

此時 (4.41) 就改寫爲

$$\begin{cases} y' - \alpha y = -\beta z \\ z' - \alpha z = \beta y \end{cases} \iff \quad V' = AV, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{4.47}$$

實 Jordan 型 A 自然而然出現, 而且再次確認配方法這個動作等價於矩陣的正規化 (化爲對角矩陣或 Jordan 型)。

(iv) 實 Jordan 型 (4.41) 告訴我們更多。由於 $\mathcal{J}$ 是斜對稱 (skew symmetric), 兩邊同時與 V 做內積得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\|V\|^2\right) = \langle V', V\rangle = \langle J_m V, V\rangle = 0. \tag{4.48}$$

如果將 x 視爲時間 t 則 (4.48) 就是能量守恆

$$\|V\|^2 = y^2 + \hat{z}^2 = y^2 + \left(\frac{y'}{m}\right)^2 = c_1 \in \mathbb{R}^+. \tag{4.49}$$

這等價於 (4.28) 乘 y'

$$y'(y'' + m^2 y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{m^2}{2}y^2\right) = 0, \tag{4.50}$$

而後積分導出能量守恆

$$\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{m^2}{2}y^2 = c_2 \in \mathbb{R}^+. \tag{4.51}$$

(4.48) 或 (4.50) 這個動作就稱爲能量法 (energy method), 這是研究微分方程最根本且最重要的方法。(4.49) 或 (4.51) 實際上就是古典力學的 Hamilton-Jacobi 方程, 是一個《一階非線性微分方程》, 其真正的意義是說: 由於守恆律可以將二階微分方程 (4.28) 降階

爲一階微分方程 (4.51), 其中的關鍵只需要守恆律, 因此也可以用來解決非線性二階微分方程。這並不是達朗貝爾意義下的降階法, 但卻是十九世紀處理單擺運動及相關非線性微分方程的主要方法。由此衍生了一連串積分技巧的問題, 其中最重要的是橢圓積分與橢圓函數或者更一般的 Abel 積分, 這是十九世紀數學界最重要的研究主題之一。假設 $c_1=1$ 則 (4.49) 成爲

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1-y^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm m dx, \tag{4.52}$$

利用積分技巧得

$$\sin^{-1}y=mx+c \quad 或 \quad \cos^{-1}y=mx+c.$$

由此我們再一次得到

$$y=\sin(mx+c)=d_1\sin mx+d_2\cos mx, \qquad d_1,d_2\in\mathbb{R}. \tag{4.53}$$

這個例題同時也是要告訴讀者微積分一大堆積分技巧的問題是爲了解決微分方程 (特別是力學) 自然而然衍生出來的, 不是能工巧匠爲了折磨人而構造出來的。最後要說的是, 標準式 (4.41) 的矩陣 $\mathcal{J}$ 是一個辛矩陣 (sympletic matrix) 具有特殊的結構, 如果能量法不是從標準式 (4.41) 而是 (4.40) 出發的話我們是得不到守恆律。這給了我們強而有力的理由 (從物理或微分方程的角度) 爲何矩陣需要 Jordan 正規式 (Canonical Form)[4]!

參考文獻

1. N. H. Abel, Ueber einige bestimmte Integrale, *J. Reine Angew. Math.*, **2** (1827), 22-30.
2. V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, (Universitext) 3rd edition, Springer-Verlag, 1992.

    V. I. Arnold(1937~2010) 的書都值得看。他的書有一個特色就是一定有圖畫而且據說是他自己畫的。這就是 Arnold 的風格 (幾何且直觀), 他擅長藉由幾何與古典力學的詮釋來理解微分方程, 這正是這本書獨到之處同時也是最吸引人的地方。這本書比較傾向動態系統 (Dynamical System), 雖然 1972 年就已經出版, 過了 50 年仍然是動態系統最好的教科書之一。

3. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Universitext) 2nd edition, Springer-Verlag, 1989.
4. Garrett Birkhoff and Gian-Carlo Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th Edition, Wiley, 1989.
5. William E. Boyce, Richard C. DiPrima and Douglas B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 12th Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2021.

[4]canonical form 可以譯爲正規式或標準式實際上就是最簡單的形式, 這個字的名詞是 canon「正典」(Canon) 一詞有標準或規範的意思。聖經正典 (Biblical Canon) 是指被認定具有神聖權威性的經文書卷, 可以作爲信仰的依據。正典 (Canon) 來自希臘字 $\kappa\alpha\nu\omega\nu$ (kanōn) , 意思是「規則」、「尺規」。很可能, 它更是從希伯來文 qaneh 而來, 意思是「量度的竿」。「正典」和「正典性」這兩個名詞, 都是用以量度來確定那書卷是不是上帝啟 (默) 示而寫的。

我第一次教大二微分方程就是用這本書, 後來教應用數學方法 (因爲需要教偏微分方程) 也是採用這本書。這本書的書寫方式是從應用數學家的觀點出發, 而一個好的應用數學家必備的三個條件是: 物理、好的分析 (good analysis) 與好的數值分析 (good numerical analysis)。讀者有興趣不妨從這三個角度來品味這本書與判斷應用數學。一本教科書可以發行到 12 版肯定是有其背後的道理!

6. H. S. Dumas, *The KAM Story: A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov-Arnold-Moser Theory*, World Scientific Publishing Co., 2014. 中譯本: KAM 的故事: 經典 Kolmogorov-Arnold-Moser 理論的歷史之旅, 程健譯, 高等教育出版社 (中國) (2021)。
7. 愛德華著。微積分的發展歷史。凡異出版社, 2001。
8. Thomas Hawkins, *Jean d'Alembert: Science and the Enlightenment*, Cambridge History of Sciences Series, Cambridge University Press, 1985.

知道 Hawkins 這個作者是看了林義雄與林紹雄的《理論分析 (上、下)》正中書局。書中有不少的篇幅是介紹 Lebesgue 積分的歷史而主要材料就是源自 T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, AMS/Chelsea, 1975. T. Hawkins 是相當優秀的數學史家, 他的書不是那麼膚淺只有故事沒有數學, 所以讀他的數學史的書也像專業的書一樣是要動腦筋。

9. 克萊因 (Felix Klein) 著。數學在 19 世紀的發展 (第一卷)。高等教育出版社 (中國), 2010。
10. Eli Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994. 中譯本: 毛起來說 e, 胡守仁譯, 天下文化出版, 2000。
11. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998。中譯本: 毛起來說三角, 鄭惟厚譯, 天下文化出版, 2000。
12. Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.
13. K. Yosida, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Interscience, 1960. (Dover, 1991).
14. 林琦焜。傅立葉分析。滄海書局, 2010。
15. 林琦焜。數學的詩篇 — Fourier 分析。數學傳播季刊, 35(3), 11-21, 2011。
16. 林琦焜。用函數來思考(上、下)。數學傳播季刊, 43(3)(4), 32-42, 54-70, 2019。
17. 林琦焜。理論與計算的結合 — 迭代法。數學傳播季刊, 44(2), 32-57, 2020。
18. 彼得、蓋伊。啟蒙運動(上): 現代異教精神的崛起。The Enlightenment: The Rise of Modern Paganism, 國立編譯館與立緒文化事業有限公司合作翻譯發行, 劉森堯、梁永安合譯, 2008。
19. 彼得、蓋伊。啟蒙運動(下): 自由之科學。The Enlightenment: The Science of Freedom, 國立編譯館與立緒文化事業有限公司合作翻譯發行, 梁永安譯, 2008。

蓋伊 (Peter Gay 1923∼2015) 在 1923 年出生於柏林一個已世俗化的猶太家庭, 後來因爲納粹上台舉家於1938 年移民美國。蓋伊擁有哥倫比亞大學博士學位, 是耶魯大學史特林史學教授。啟蒙運動是他畢生鑽研之所在, 該著作也奠定其史學巨擘之地位。啟蒙運動是我最有興趣的歷史, 到書店只要有啟蒙運動相關的書, 我一定會瀏覽並進一步購買。當 2008 年這本書剛有中文版時, 尤其看了余英時的推薦序後毫不考慮就買了。這套書翻譯的文筆非常順暢, 很容易讀。雖然看了 N 遍, 我仍然隨身攜帶有空就看。坦白而言一個讀數理科學的人無法跟人家聊啟蒙運動差不多是半個白癡。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—