數學傳播 46卷2期, pp. 3-5

Kerala 邦的簡介與圓周率的研究

莫宗堅 · 黃　蘋

Chera 的另一寫法是 Keralaputra, 今之 Kerala 邦, 它名列西元前三世紀的阿育大王刻石, 也出現在希伯來文聖經。在更早的時候, 西元前三千年起, 它是傳統的香料產地, 古兩河流域的人稱之爲「香料花園」。古希臘、古羅馬都有這個地方的記錄。

特別值得一提的是, 這裡出產歐洲人與阿拉伯人珍視的肉桂 (cinnamon)。此地一直有阿拉伯人、猶太人及羅馬人居住。

各文化區的數學程度是其科學發展的指標, 本書作者認爲以下兩項可用作比較各文化區數學程度的共同尺度: (1) 畢氏定理的表敘、證明及應用, 這是數位與圖形的關係; (2) 圓周率的近似值及其取得的方法。

關於印度文化區在 (1) 的造詣, 請見第 38 節 [註1], (註: 這是我們預定發表的《南海指南與遠洋風光》的章節), 以下我們來討論 (2)。

西元前二千年, 巴比倫人用 3 作圓周率,《聖經》索羅門王的故事裡的圓周率等於 3, 西元前一世紀中國的《周髀算經》也有『徑 1 周 3』。約西元前 1900~1680 年, 巴比倫人開始用 3.125 作圓周率。西元前 1650 年, 埃及的《萊因德草紙 (Rhind Papyrus)》, 人類現存的第一本數學書, 有圓周率等於 3.1605。人類第一次有計算圓周率的理論及方法是在西元前 287~212 年, 古希臘的阿基米德 (Archimedes) 用么圓 (註: 半徑爲1的圓) 的內接正多邊形和外切正多邊形的面積來趨近圓周率, 反覆應用畢氏定理後, 得出圓周率在 $3\frac{1}{7}$ 與 $3\frac{10}{71}$ 之間。

中國的《隋書 · 律曆志》記載南朝的祖沖之 (西元 429~501 年) 有:

$$3.1415926 < \text{圓周率} < 3.1415927$$

及『密率 : 圓徑一百一十三, 圓週三百五十五。約率: 圓徑七, 圓週二十二』。今世的學者研究這一段話, 應用類似阿基米德的理論, 僅用內接正多邊形, 憑藉劉徽的割圓術『所割越多, 所失越少』, 猜測祖沖之應該是計算了 24576 $(= 6 \times 2^{12})$ 邊正多邊形的面積 (或邊長), 反覆應用畢氏定理, 開平方根 24 次, 自乘 23 次, 算出圓周率非常接近 $\frac{355}{113} = 3.141592\ldots$。每次開平方根都可能把以前的誤差放大, 整個過程的複雜度超乎想像。古代用「算籌」算得出如此精確的結

果, 是幾乎不可能的, 著實令人佩服。另有一說法, 由於清代以前的書籍從未提過祖沖之的「密率」$\frac{355}{113}$, 故而此結果或是清代印刷的「武英殿聚珍版本」的「四庫全書」插入的。當時「乾嘉學派」的戴震 (註: 即戴東原,《清史稿》有傳, 出版過股算圖書《策算》及《勾股割圜記》) 任職四庫全書纂修及分校官, 印刷《隋書》時, 可能師心自用地加入了小數點以下七位數和這句『密率 : 圓徑一百一十三, 圓週三百五十五』。之所以這樣推測, 是因爲在「武英殿版本」印刷以前, 歐洲人已求出圓周率的小數點以下 35 位。又有, 在西元 1585 年, 荷蘭數學家 A. 安東尼茲 (Adriaan Anthonisz) 的兒子追述其數學成果時, 介紹『他的圓周率是圓徑 113, 圓周 355』, 傳說就是這麼直白的一句話。彼時這些知識已傳入中國, 負責排印《隋書》的「乾嘉學派」, 十分迷信西學是中學傳去的, 極有可能在《隋書》裡竄入了這些關於圓周率的話。是非曲直, 我們可以參考別的文字:《隋書 · 律曆志》的作者李淳風, 也對《劉徽注本九章算術》做了一些註釋, 他認爲劉徽所計算的 157/50 的圓周率不確, 真正的密率應該是 $\frac{22}{7}$, 這就表示了李淳風完全不知道祖沖之的 $\frac{355}{113}$ 的密率, 因而有人說清代出版的《隋書 · 律曆志》中的那一段, 根本不是李淳風所寫, 而是清代人添加的。當然, 也可能李淳風先寫了《劉徽注本九章算術》的註釋, 彼時他還不知道祖沖之的 $\frac{355}{113}$ 的密率, 在寫《隋書 · 律曆志》時才知道。但是《隋書》光照四方、舉國皆知, 如果有祖沖之的結果, 那麼爲何以後千年的日子裡, 中國數學家們有如盲人, 在黑暗中摸索圓周率, 用一些粗糙的數字當圓周率, 例如宋代用 3.162, 明代用 3.1525, 3.1425, 3.126, 3.0588, 3.125, 到了清代的康熙朝用 3.162? 進一步說, 用小數點下七位的圓周率, 加上正實數化爲連分數 (continued fraction) 的計算, 立馬可得密率及約率。例如,

$$\begin{aligned} 3.1415926 &= 3 + 0.1415926 \\ &= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0.1415926}} = 3 + \frac{1}{7 + 0.06251598} \end{aligned}$$

此時如把小數 0.06251598 棄去, 則得 $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} =$ 約率。繼續如次,

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \left(\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.06251598}}\right)}$$

再算兩步, 把小數 0.0041066 棄去, 即得密率355/113。但是, 連分數的理論是中國古算學的空白點。祖沖之是如何得到密率及約率的? 當然, 這也可以證明祖沖之懂得連分數。總之, 各種

議論, 莫衷一是。我們需要古本的《隋書 · 律曆志》。真相如何, 有待後賢了。此後多年, 關於圓周率的研討沉寂下來, 直到南印度人走出石破天驚的新路。

西元十四世紀, Kerala 有了著名的 Madhava 數學學派, 研究無窮級數及無窮小值。例如, Madhava 應用 arctan(x) 的無窮級數展開式,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots ,$$

以 1 代入 x 就得出

$$45\text{度角} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots ,$$

利用已知角的兩種度量法的關係式,

$$360\text{度角} = \text{半徑爲1的圓周} = 2 \cdot \text{圓周率},$$

於是, 45 度角=圓周率/4。Madhava 導出了千古奇文 (後世誤以爲這是西元十七世紀的歐洲大數學家、微積分學的創造者之一的萊布尼茨 (Leibniz) 發現的, 所以稱之爲萊布尼茨公式, 現已改稱爲 Madhava-Leibniz 公式):

$$\text{圓周率} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

算出它的 9 位近似值爲 3.141592653 . . .。理論上, 只要有足夠時間, Madhava 學派可以計算出圓周率的任意精確度的近似值。他們的微積分學的研究也早於歐洲約三百年。此地的數學家十分出色, 但似乎沒有把這一套數學傳到他方。

因爲圓周率不容易計算, 有一個討巧的人猜測圓周率的第一百萬位是 5。原以爲這個問題會爲難人類一陣子, 這猜測可使他得萬世名, 但他未料到南印度的數學及現代的電腦。

使用家用電腦及無窮級數 arctan 公式, 人們毫不費力地算出了圓周率的千位小數值。這兒僅列出圓周率的百位小數值,

$$\begin{aligned}\text{圓周率} =\ & 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2\\ & 3078164062862089986280348253421170679\ldots\end{aligned}$$

應用超級電腦及其它無窮級數, 人類已算出圓周率的 62.8 兆 (兆=百萬×百萬) 位小數值, 它的小數一百萬位竟然真的是 5!

西元 1403 年, 鄭和船隊經過此地, 在馬歡的《瀛涯勝覽》中記載此地的算術頗有根基 :「彼之演算法無算盤, 但以兩手並兩腳十指計算, 分毫無差」, 現在還是如此。

在西元 1498 年, 伽馬 (Gama) 繞過好望角, 到了印度洋, 就直奔此國。以後荷蘭人、法國人及英國人都陸續而來。印度獨立後, Kerala 邦有三千三百萬人口, 它是印度第二富庶的邦區, 其識字率超過 95%。

—本文作者莫宗堅、黃蘋任教美國 Purdue 大學—