數學傳播 46卷1期, pp. 96-104

數學核心素養視角下的解題探究

朱小扣

摘要: 自從《普通高中數學課程標準 (2017版)》頒佈以來, 有關數學的學科核心素養的討論不絕於耳, 本文將從命題者和解題者的角度, 深度剖析數學學科的數學抽象, 邏輯推理, 數學建模, 直觀想像, 運算能力, 數據分析六大核心素養, 並加以分析, 討論, 以期拋磚引玉。

關鍵字: 高中數學; 核心素養; 數學抽象; 邏輯推理。

《普通高中數學課程標準 (2017版)》中指出:「學科核心素養是育人價值的集中體現, 是學生通過學科學習而逐步形成的正確價值觀念、必備品格與關鍵能力, 數學學科核心素養是數學課程目標的集中體現, 是具有數學基本特徵的思維品質、關鍵能力以及情感、態度及價值觀的綜合體現, 是在數學學習和應用過程中逐步形成和發展的。數學學科核心素養包括: 數學抽象、邏輯推理、數學建模、直觀想像、運算能力和數據分析, 這些核心素養既相對獨立又相互交融, 是一個有機的整體。」但是數學學科的核心素養怎麼考? 這是一個困擾廣大數學工作者的問題。筆者將通過分析 2018 年以來各地的模擬考試試題, 闡述六大核心素養的命題形式及解決方法。

1. 數學抽象

數學抽象是數學的基本思想, 是形成理性思維的重要基礎, 反映了數學的本質特徵, 貫穿在數學的產生、發展、應用的過程中。它反映了數學的本質特徵, 貫穿在數學的產生、發展、應用的過程中。數學抽象使得數學成為高度概括、表達準確、結論一般、有序多級的系統。

例1: (南京市、鹽城市 2018 屆高三一模) 如圖 1 是蜂巢結構圖的一部分, 正六邊形的邊長均為 1, 正六邊形的頂點稱為「晶格點」。若 A, B, C, D 四點均位於圖中的「晶格點」處, 且 A, B 的位置所圖所示, 則 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的最大值為 ____________ 。

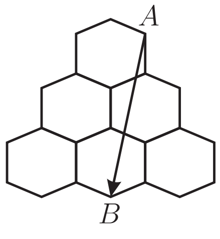


圖1

解析: 建立如圖 2 所示的平面直角坐標系, $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$, $B(0,0)$ 由向量投影知當 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 取最大值時, $C(0,5)$, $D(-\sqrt{3},0)$, 所以

$$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{9}{2}\right),\quad \overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},-5),$$

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=24$ 。

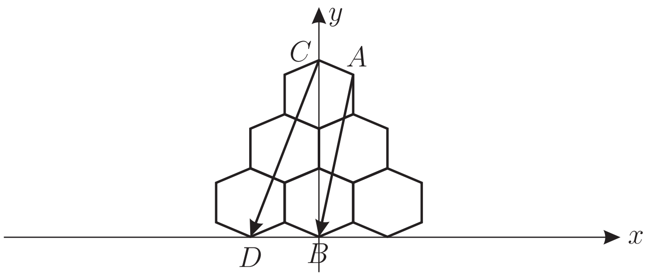


圖 2

點評: 本題通過建立直角坐標系, 讓學生能從情境中 (即蜂巢結構圖) 抽象出數學的概念及方法, 從而使得問題得到簡化及解決。這樣出題可以培養學生從具體到抽象的活動經驗, 有利於學生把握事物的本質, 以簡馭繁, 運用數學抽象思維方式思考來解決實際問題。

2. 邏輯推理

邏輯推理是指從一些事實和命題出發, 依據規則推出其他命題的素養。主要包括兩類: 一類推理形式主要有歸納、類比; 一類是推理形式主要有演繹推理。

例2: 我國南宋數學家楊輝所著的《詳解九章算術》一書中, 用圖 (a) 的數表列出了一些正整數在三角形中的一種幾何排列, 俗稱「楊輝三角形」, 該數表的規律是每行首尾數字均爲 1, 從第三行開始, 其餘的數字是它「上方」左右兩個數字之和。現將楊輝三角形中的奇數換成 1, 偶數換成 0, 得到圖 (b) 所示的由數字 0 和 1 組成的三角形數表, 由上往下數, 記第 n 行各數字的和爲 S_n, 如 $S_1=1$, $S_2=2$, $S_3=2$, $S_4=4,\ldots$, 則 $S_{32}=$ ____________ 。

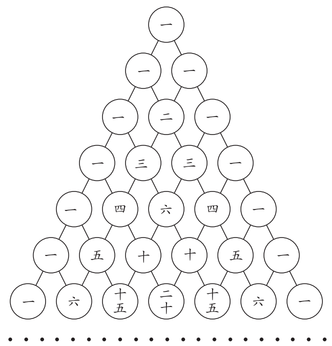


圖 (a)

1
1　1
1　0　1
1　1　1　1
1　0　0　0　1
1　1　0　0　1　1
1　0　1　0　1　0　1
……………………

圖 (b)

解析: 可以由 $S_2=2$, $S_4=4$, $S_8=8$, $S_{16}=16$, 從而論證得到 $S_{32}=32$。

例3: (湖南株洲 2018 屆高三一模) 如表 1 給出一個「等差數陣」: 其中每行、每列都是等差數列, a_{ij} 表示位於第 i 行第 j 列的數。則 112 在這「等差數陣」中出現的次數爲 ＿＿＿＿＿＿ 。

表1

4	7	10	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$
7	12	17	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$
10	17	24	$\cdots$	a_{3j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

解析: 該等差數陣的第一列是首項爲 4, 公差爲 3 的等差數列: $a_{i1}=4+3(i-1)$ 第二列是首項爲 7, 公差爲 5 的等差數列: $a_{i2}=7+5(i-1)$, 第 j 列是首項爲 $4+3(j-1)$, 公差爲 $2j+1$ 的等差數列, 因此 $a_{ij}=4+3(j-1)+(2j+1)(i-1)=112$, 可得

$$\begin{cases} i=1 \\ j=37 \end{cases}, \begin{cases} i=2 \\ j=22 \end{cases}, \begin{cases} i=4 \\ j=12 \end{cases}, \begin{cases} i=7 \\ j=7 \end{cases}, \begin{cases} i=12 \\ j=4 \end{cases}, \begin{cases} i=22 \\ j=2 \end{cases}, \begin{cases} i=37 \\ j=1 \end{cases}$$

共 7 組解, 故答案爲 7。

點評: 上述兩題通過數列的歸納、類比, 實際上, 就是從已有的知識和具體的事實經驗出發, 通過觀察、類比、聯想、歸納等手段在某種情境和過程中推出可能性結論的推理。要做此類題時, 一定要大膽猜想, 這樣就可以讓學生學會有邏輯地思考問題; 能夠在比較複雜的情境中把握事物之間的關聯, 由簡到繁, 把握事物發展的脈絡, 從而能更好地認識事物的本質及變化規律。

3. 數學建模

數學建模是對現實問題進行抽象, 用數學語言表達問題、用數學方法構建模型解決問題的素養。數學建模過程主要包括: 在實際情境中, 從數學的視角發現問題、提出問題、分析問題、建立摸型、確定參數、計算求解, 檢驗結果、改進模型, 最終解決實際問題。

例4: 已知 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 且 $x+y+z=5$ 則 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+16}+\sqrt{z^2+25}$ 的最小值是 ＿＿＿＿＿＿ 。

解析:

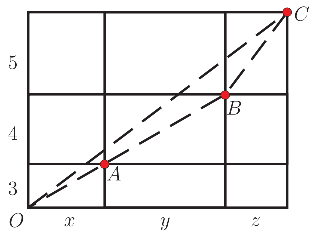


圖 3

構造如圖 3 所示的大長方形, 則 $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+16}+\sqrt{z^2+25}=OA+AB+BC\geq OC=\sqrt{(x+y+z)^2+(3+4+5)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$ 故最小值爲 13 。

例5: (2017 年浙江麗水 9 月聯考改編) 已知 $x>0,\ \theta\in R$, 則 $(1+x-\sin\theta)^2+(x+\dfrac{2}{x}-1-\cos\theta)^2$ 的最小值爲 ____________ 。

解析: 設 $P(1+x,x+\dfrac{2}{x}-1)$, $Q(\sin\theta,\cos\theta)$, 則 $(1+x-\sin\theta)^2+(x+\dfrac{2}{x}-1-\cos\theta)^2=PQ^2$ 可得 P 在 $y=x+\dfrac{2}{x-1}-2$ 上, Q 在圓 $x^2+y^2=1$上。如圖 4。

令 $f(x)=OP^2=(1+x)^2+\left(x+\dfrac{2}{x}-1\right)^2$, 可得 $f'(x)=\dfrac{4(x-1)(x^3+x^2+x+2)}{x^3}$ 易得 $f(x)_{\min}=f(1)=8$, 即 $OP_{\min}=2\sqrt{2}$, 所以 $PQ_{\min}=OP_{\min}-1=2\sqrt{2}-1$,
故 $PQ^2_{\min}=(2\sqrt{2}-1)^2=9-4\sqrt{2}$。

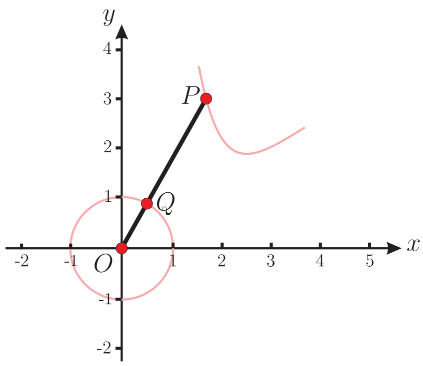


圖 4

點評: 通過構造距離型函數模型可以使得問題得到化歸, 迅速解決上述兩個問題, 使得學生理解數學建模的重要性。數學建模主要表現爲: 發現和提出問題, 建立和求解模型, 檢驗和完善模型, 分析和解決問題。

4. 直觀想像

直觀想像是指借助幾何直觀和空間想像感知事物的形態與變化, 利用空間形式特別是圖形,

理解和解決數學問題的素養。主要包括: 借助空間形式認識事物的位置關係、形態變化與運動規律, 利用圖形描述、分析數學問題, 建立形與數的聯繫, 構建數學問題的直觀模型, 探索解決問題的思路。

例如學生掌握了三棱柱各個面延伸分空間 21 個部分, 正方體各個面延伸分空間 27 個部分及其他棱柱的情形, 如三棱錐各個面延伸可以把空間分成多少個部分? 三棱臺各個面延伸可以把空間分成多少個部分? 學生掌握和理解起來不容易, 借助直觀想像, 筆者是按如下方法這樣解釋的。

例5: 三棱錐各個面延伸可以把空間分成多少個部分? 三棱臺各個面延伸可以把空間分成多少個部分?

解析:

(1) 如圖 5, 現將三棱錐 $O\text{-}ABC$ 特殊成 OA, OB, OC 互相垂直, 將其放在如上圖的位置, 8 個卦限中, 只有第七卦限沒有被平面一分爲二, 其他的卦限都一分爲二了, 故有 $8+7=15$ 個, 類似的可以得到普通的三棱錐也是 15 個。

(2) 如圖 6, 類似第一問的解答, 將三棱臺 $ABC-A_1B_1C_1$ 放在如上圖的位置, 易知答案爲: $7+7+8=22$ 。

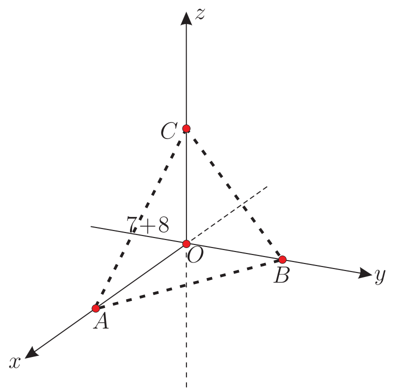


圖5

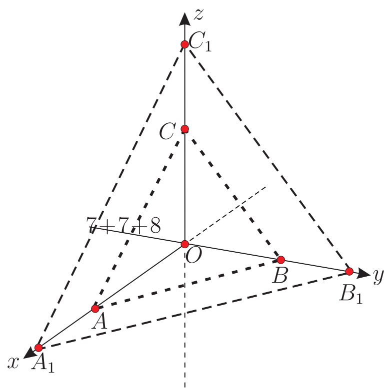
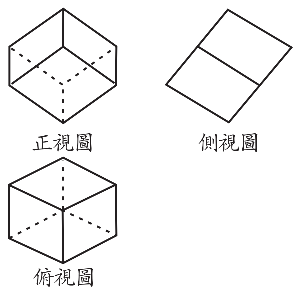


圖6

例7: (2018 年山西一模) 一個正方體的三視圖如圖所示, 若俯視圖中正六邊形的邊長爲 1, 則該正方體的體積是 ___________ 。



解析:

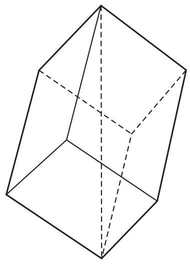


圖 7

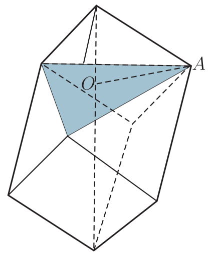


圖 8

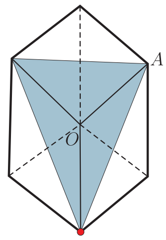


圖 9

由題意可知, 該正方形的一條對角線即爲俯視圖的方向 (如圖 7), 距最高點最近的三個點構成的平面與俯視方向垂直 (如圖 8), 有俯視圖中正六邊形的邊長爲 1, 可得圖 9 中 $OA=1$, 即圖 8 中 $OA=1$, 易得正方體的面對角線長爲 $\sqrt{3}$, 進而得棱長爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 故體積爲 $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ 。

點評: 正方體的三視圖是學生最熟悉的三視圖, 但是這題「倒」著放的正方體三視圖解決起來, 卻讓人舉足無措, 通過這樣考更能考察學生的能力。借助幾何直觀理解問題, 運用空間想像認識事物。通過高中數學課程的學習, 學生能提升數形結合的能力, 發展幾何直觀和空間想像能力。

5. 數學運算

數學運算是指在明晰運算對象的基礎上, 依據運算法則解決數學問題的素養。主要包括: 理解運算對象, 掌握運算法則, 探究運算思路, 選擇運算方法, 設計運算程式, 求得運算結果等。

例 8: (2018 年廣州一測) 已知兩個定點 $M(1,0)$ 和 $N(2,0)$, 動點 P 滿足 $|PN|=\sqrt{2}|PM|$。

(a) 求動點 P 的軌跡 C 的方程;

(b) 若 A,B, 爲 (a) 中軌跡 C 上兩個不同的點, O 爲座標原點。設直線 OA, OB, AB 的斜率分別爲 k_1, k_2, k。當 $k_1k_2=3$ 時, 求 k 的取值範圍。

解析:

(a) 動點 P 的軌跡 C 的方程是 $x^2+y^2=2$ (過程略)。

(b) 設 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 直線 AB 的方程是 $y=kx+b$, 由 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=kx+b \end{cases}$ 消去 y 得:

$$(1+k^2)x^2+2bkx+b^2-2=0. \tag{1}$$

由 $\Delta=(2bk)^2-4(1+k^2)(b^2-2)>0$ 得

$$b^2<2+2k^2. \tag{2}$$

由韋達定理得:

$$x_1+x_2=-\frac{2bk}{1+k^2},\qquad x_1x_2=\frac{b^2-2}{1+k^2}. \tag{3}$$

因爲 $k_1k_2=3$ 即 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{(kx_1+b)(kx_2+b)}{x_1x_2}=3$, 於是,

$$(k^2-3)x_1x_2=+bk(x_1x_2)+b^2=0. \tag{4}$$

將 (2) 代入 (4) 得:

$$b^2=3-k^2. \tag{5}$$

由 $b^2\geq 0$, 得 $-\sqrt{3}\leq k\leq\sqrt{3}$, 由 (2) 及 (5) 得: $k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

要使得 k,k_1,k_2 有意義, 則 $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$,

所以 0 不是方程 (1) 的根, 所以 $b^2-2\neq 0$, 即 $k\neq\pm 1$, 綜上,

$$k\in[-\sqrt{3},-1)\cup\Big(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\cup\Big(\frac{\sqrt{3}}{3},1\Big)\cup(1,\sqrt{3}].$$

本題第二問還可以用齊次化思想去解:

(2) 設 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 直線 AB 的方程是 $y=kx+b$,

由 $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=kx+b\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ \dfrac{y-kx}{b}=1\end{cases}$, 消除常數後得:$x^2+y^2=2\Big(\dfrac{y-kx}{b}\Big)^2$.

顯然 $x\neq 0$, 兩邊同時除以 x^2 得:

$$1+\Big(\frac{y}{x}\Big)^2=2\left(\frac{\big(\frac{y}{x}\big)-k}{b}\right)^2\qquad\text{即}\qquad(2-b^2)\Big(\frac{y}{x}\Big)^2-4k\Big(\frac{y}{x}\Big)+2k^2-b^2>0.$$

可得: $2-b^2\neq 0$ 及

$$\Delta=(4k)^2-4\cdot(2-b^2)\cdot(2k^2-b^2)>0. \tag{6}$$

因爲 $k_1k_2=3$ 即

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{2k^2-b^2}{2-b^2}=3\quad\text{得}\quad b^2=3-k^2. \tag{7}$$

由 (6), (7) 得:

$$k\in[-\sqrt{3},-1)\cup\Big(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\cup\Big(\frac{\sqrt{3}}{3},1\Big)\cup(1,\sqrt{3}].$$

點評: 上述例題說明了在解析幾何中, 除了傳統的方法外, 還有齊次化方法、雙根法、點差法、點乘法、極座標等多種更簡單的解法。類似地, 在解決其他題目時, 也可以一題多解, 多種方法的融合可以進一步發展學生數學運算能力, 有效借助運算方法解決實際問題。

6. 數據分析

數據分析是指針對研究對象獲取數據, 運用數學方法對數據進行整理、分析和推斷, 形成關於研究對象知識的素養。數據分析過程主要包括: 收集數據, 整理數據, 提取資訊, 構建模型, 進行推斷, 獲得結論。

例9: (巴蜀中學 2018 屆高三 1 月考) 統計顯示, 2011 年之前, 速食麵銷量在中國連續 18 年保持兩位數增長, 2013 年的年銷量更是創下 462 億包的輝煌戰績; 但 2013 年以來, 速食麵銷量卻連續 3 年下跌, 只剩 385 億包, 具體如下表。相較於速食麵, 網路訂餐成爲大家更加青睞的消費選擇。近年來, 網路訂餐市場規模的「井噴式」增長, 也充分反映了人們消費方式的變化。

全國 (中國) 速食麵銷量情況 (單位: 億包 (碗)) 數據來源: 世界速食麵協會

年份	2013	2014	2015	2016
時間代號	1	2	3	4
年銷量 y (億包 (碗))	462	444	404	385

根據上表, 求 y 關於 x 的線性迴歸方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$, 用所求迴歸方程預測 2017 年 $(t=5)$ 速食麵在中國的年銷量;

參考公式:

迴歸方程: $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$, 其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$.

參考數據: $\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=-135.5$.

解析: $\bar{t}=2.5$, $\bar{y}=423.75$, $\sum\limits_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})^2=5$, $\hat{b}=\dfrac{-135.5}{5}=-27.1$,

$\hat{a}=423.75-(-27.1)\times 2.5=491.5$, 所以 $\hat{y}=-27.1t+491.5$,

當 $t=5$ 時, $\hat{y}=-27.1\times 5+491.5=356$.

附題: (2011年安徽省高考文科20題) 某地最近十年糧食需求量逐年上升, 下表是部分統計數

據

年份	2002	2004	2006	2008	2010
需求量 (萬噸)	236	246	257	276	286

(I) 利用所給數據求年需求量與年份之間的迴歸直線方程 $y=bx+a$;
(II) 利用 (I) 中所求出的直線方程預測該地 2012 年的糧食需求量。

點評: 這題直接用時間代號比 2011 年安徽省文科高考第 20 題更簡單, 有時也會用 $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$, $\mathrm{Var}\,(a\xi+b)=a^2\mathrm{Var}\,(\xi)$ 等其他公式處理數據, 也是爲了引導學生找到最佳處理數據的方法, 發展整理和處理數據能力。從而提升學生獲取有價值資訊並進行定量分析的意識和能力。

總結: 林新建老師說過:「數學思想是數學素養的核心內容, 唯有立意於思想, 樹立起運用思想引領解題的意識, 才能真正培養和提升學生的數學核心素養。」爲了發展學生的數學學科的核心素養, 發展素質教育, 培養德智體美全面發展的社會主義建設者和接班人, 作爲數學的教育工作者的我, 深感命題工作與教學工作的責任重大, 但如何才能更好的發展核心素養呢?「問渠那得清如許? 爲有源頭活水來。」實際上, 只有從源頭將核心素養融入命的題中, 才能讓學生在解題中理解和發展核心素養, 我們不能讓學生去證明一個假命題, 也不能讓學生去解一個無解的錯題, 只有反覆斟酌, 才能命出好題, 希望本文對圍繞核心素養命題的剖析, 能幫助到大家。

参考文獻

1. 中華人民共和國教育部。普通高中數學課程標準 (2017年版) [M]。北京人民教育出版社, 2017。
2. 朱小扣。聚焦不等式解題中的待定係數法[J]。數學教學, 2017 (11)。
3. 朱小扣。一類延伸問題的探討[J]。中學數學雜誌, 2017 (5)。

—本文作者任教中國安徽省蕪湖市無爲中學—