數學傳播 46卷1期, pp. 88-95

揭示趣題背後的數學規律

李發勇

摘要: 翻杯子類型的遊戲趣題, 是一個久遠的問題, 出處已不可考, 主要講述奇偶性的應用。源於生活, 卻高於生活, 屬邏輯推理型問題, 很具啓發性和挑戰性, 背後隱藏著深刻的數學奧秘, 通過深入探討、發現規律, 並予以推廣和應用。

關鍵字: 趣題, 奧秘, 規律, 應用。

1. 問題提出

現行教材蘇科版《數學》七年級 (上冊) 第 63 頁複習題第 18 題：(1) 桌子上有 3 只杯口都朝上的茶杯, 每次翻轉 2 只, 能否經過若干次翻轉使 3 只杯子的杯口全部朝下? (2) 7 只杯口都朝上的茶杯, 每次翻轉 3 只呢? 如果用“+1”、“−1” 分別表示杯口“朝上”、“朝下”, 你能用有理數的運算說明其中的道理嗎?

趣題具有較強的開放性, 需要通過觀察、分析、推斷、驗證等來探索問題思路, 並加以推理計算。就這樣一道難題, 被有理數的簡單運算別出心裁地解決了, 讓人感受數學想像力的神奇。

我們的問題是: (1) 如果奇偶性發生變化, 結果如何?
(2) 進一步, 你能制定翻轉方案嗎?

2. 問題探析

如果是 m 只茶杯杯口都朝上, 每次翻轉任意 n $(m > n)$ 只, 若干次後, 可否實現全部杯口朝下呢? 如果可以, 能確定翻轉次數的奇偶性嗎?

分析: 根據 m、n 的奇偶性, 僅有以下 4 種情況:

(1) m 偶 n 奇, (2) m 奇 n 奇, (3) m 偶 n 偶, (4) m 奇 n 偶。

探究如下:

(1) 對於 m 偶 n 奇, 設原茶杯整體狀態值為 $S_1 = (+1)^m = +1$, 每次翻轉任意 n 只茶杯, 即改變其中任意 n 只茶杯為相反狀態, 相當於整體狀態值作一次乘法運算, 即乘以 $(-1)^n =$

-1, 第 i 次翻轉後的整體狀態值為: $S_i = (+1)^m[(-1)^n]^i = \begin{cases} -1 & (i \text{ 為奇數時}) \\ +1 & (i \text{ 為偶數時}) \end{cases}$, 當 i 為奇數時, 可以使整體狀態值由 $+1$ 變為 -1, 所以可以使全部茶杯杯口朝下;

證明: 使全部茶杯杯口朝下, 其中每只茶杯必翻轉奇數次, m (偶數) 個奇數之和必是偶數。而每次翻轉 n (奇數) 只, 設翻轉 k 次, 則 $nk =$偶數, 所以 k 必為偶數。

(2) 對於 m 奇 n 奇, 設原茶杯整體狀態值為 $S_1 = (+1)^m = +1$, 每次翻轉任意 n 只茶杯, 即改變其中任意 n 只茶杯為相反狀態, 相當於整體狀態值作一次乘法運算, 即乘以 $(-1)^n = -1$, 第 i 次翻轉後的整體狀態值為: $S_i = (+1)^m[(-1)^n]^i = \begin{cases} -1 & (i \text{ 為奇數時}) \\ +1 & (i \text{ 為偶數時}) \end{cases}$, 當 i 為奇數, 可以使整體狀態值由 $+1$ 變為 -1, 所以可以使全部茶杯杯口朝下;

證明: 使全部茶杯杯口朝下, 其中每只茶杯必翻轉奇數次, m (奇數) 個奇數之和必是奇數。而每次翻轉 n (奇數) 只, 設翻轉 k 次, 則 $nk =$奇數, 所以 k 必為奇數。

(3) 對於 m 偶 n 偶, 設原茶杯整體狀態值為 $S_1 = (+1)^m = +1$, 每次翻轉任意 n 只茶杯, 即改變其中任意 n 只茶杯為相反狀態, 相當於整體狀態值作一次乘法運算, 即乘以 $(-1)^n = -1$, 第 i 次翻轉後的整體狀態值為: $S_i = (+1)^m[(-1)^n]^i = +1$, 即每次翻轉後, 整體狀態值始終都是 $+1$, 不能由 $+1$ 變為 -1, 所以不能使全部茶杯杯口朝下;

實際上, 這個結果是錯誤的。事實上, 可以使全部茶杯杯口朝下。

理由: 假設翻轉 k 次, 可以使全部茶杯杯口朝下, 其中每只茶杯必翻轉奇數次, m (偶數) 個奇數之和必是偶數。每次翻轉 n (偶數) 只, 則 $nk =$偶數, 是成立的, 所以可以使全部茶杯杯口朝下。

(4) 對於 m 奇 n 偶, 設原茶杯整體狀態值為 $S_1 = (+1)^m = +1$, 每次翻轉任意 n 只茶杯, 即改變其中任意 n 只茶杯狀態, 相當於整體狀態值作一次乘法運算, 即乘以 $(-1)^n = +1$, 第 i 次翻轉後的整體狀態值為: $S_i = (+1)^m[(-1)^n]^i = +1$, 即每次翻轉後, 使整體狀態值始終都是 $+1$, 不能由 $+1$ 變為 -1, 所以不能使全部茶杯杯口朝下。

證明: 假設翻轉 k 次, 可以使全部茶杯杯口朝下, 其中每只茶杯必翻轉奇數次, m (奇數) 個奇數之和必是奇數。而每次翻轉 n (偶數) 只, 則共翻轉 nk 即偶數次, 奇數=偶數, 矛盾, 所以不可以使全部茶杯杯口朝下。

綜上, 當 n 為奇數及 m 奇 n 偶時, 即情形 (1)、(2)、(4) 有理數運算可以判斷。但對於 (3) m 偶 n 偶, 有理數運算無法判斷, 可用奇偶性 [parity] 分析進行判斷。

3. 建立數學模型, 制定翻轉方案

3.1. 約定

本文研究的物件排成一排, 各個體只有初始和相反兩個狀態。

定義1: 設有 m 個初始狀態相同的物件, 每輪改變任意 n 個 (可相鄰、可間隔) 爲相反狀態 (正整數 $m > n > 1$), 經過至少 k 輪改變, 可以把 m 個物件全部變爲相反狀態, 稱 m 翻轉 n 有解, 稱 k 爲至少翻轉次數。若不能把 m 個物件全部變爲相反狀態, 則稱 m 翻轉 n 無解。

定義2: 翻轉的 n 個物件若狀態相同, 則稱爲純翻轉, 若不盡相同, 則稱爲混翻轉。

3.2. 算術模型

根據第 2 節探究結果, 已經知道, 當 m 爲奇 n 爲偶時, 無解; 對於情形 (1)、(2)、(3) 均有解。有解時, 設 $m \div n = a$ 餘 b ($a \geq 1$, $n > b$), 下面分兩種情形探討:

第一種情形：當 $b = 0$ 時, $m = an$, 只需不重複純翻轉 a 次, 即獲成功方案, 則 $k = a$ ($k > 1$ 的整數);

第二種情形：當 $b \neq 0$ 時, $m = an + b$, 分類探究如下:

假設第 1 步翻轉 n 個; 第 2 步將第 1 步翻轉裏轉回 x $(0 < x < n)$ 個, 再從第 1 步餘數 $m - n$ 個裏翻轉 $(n - x)$ 個, 還剩餘 $(m + x - 2n)$ 個; 第 3 步將 x 和 $(m + x - 2n)$ 合併爲 $g = m + 2x - 2n = (a - 2)n + (b + 2x)$, $\because 0 < b < n$, $\therefore 0 < b + 2x < 3n$。

(1) 令 $b + 2x = n$, 得 $x = \dfrac{n - b}{2}$, 當且僅當 $a \geq 2$ 及 n、b 同奇或同偶時有解。此時, $g = (a - 2)n + n = (a - 1)n$。綜上, 共得 $k = g \div n + 2 = (a - 1) + 2 = a + 1$;

(2) 令 $b + 2x = 2n$, 得 $x = n - \dfrac{b}{2}$, 當且僅當 $a \geq 2$ 及 b 爲偶數時有解。此時, $g = (a - 2)n + 2n = an$。綜上, 共得 $k = g \div n + 2 = a + 2$。

注意: 當 m 偶 n 偶時, 雖有兩種方案, 但由於 $a + 1 < a + 2$, 所以最小方案選擇方案 (1)。

綜上, 當 $a \geq 2$, 且 (a) n、b 同奇或同偶時, $k = a + 1$; (b) b 爲偶數時, $k = a + 2$。

如果 $a = 1$ 呢? 此時, $m = n + b$, 類比探究如下:

假設第 1 步翻轉 n 個; 第 2 步將第 1 步翻轉裏轉回 x $(0 < x < n)$ 個, 再從第 1 步餘數 $m - n$ 個裏翻轉 $(n - x)$ 個, 還剩餘 $(m + x - 2n)$ 個; 第 3 步將 x 和 $(m + x - 2n)$ 合併爲

$$g = m + 2x - 2n = b + 2x - n. \ \because\ 0 < b < n,\ \therefore\ 0 < b + 2x < 3n.$$

(3) 令 $b + 2x = n$, 則 $g = 0$, $k = 2$ 這不可能; 令 $b + 2x = 2n$, 得 $x = n - \frac{b}{2}$, b 爲偶數時,

有解。此時, $g=2n-n=n$, 綜上, 得 $k=g\div n+2=3$。故當 $a=1$ 且 b 爲偶數時, $k=3$。

(4) 當 $a=1$ 且 b 爲奇數時, 又如何呢?

我們已知, m 奇 n 偶無解; 只需討論 m 爲偶數 n 奇數的情形, 這時, $b=m-n$ 爲奇數, 根據第 2 節情形 (1) 的結果, 設操作偶數 $2f$ 次, 一次操作 n 個物件的狀態=一次操作 m 個物件+再操作 $m-n$ 個物件的狀態, 由於一個物件被操作偶數次後, 狀態保持不變, 所以一次操作 n 個物件×操作 $2f$ 次的狀態=一次操作 $(m-n)$ 個物件×操作 $2f$ 次的狀態, 從而將 m 關於 n 的翻轉問題化爲 m 關於 $m-n$ 的翻轉問題:

由於 $m\div(m-n)=(n+b)\div b=\frac{n}{b}+1$, 設 $n\div b=a_1$ 餘 b_1, 因 $0\le b_1<b<n$, 則 $a_1\ge 1$, 所以 $m\div b=a_1+1$ 餘 b_1, 進而 $a_1+1\ge 2$, 下面分三種情形探討:

(a) 當 $b_1=0$ 時, (i) $n=a_1b$, 於是 $m=n+b=a_1b+b=(a_1+1)b$, 所以 $k=a_1+1$;

(b) 當 $b_1\ne 0$ 時, 轉化爲 $a\ge 2$ 的情形, 繼續探討。

(ii) 若 b_1 爲奇數時, 則 b、b_1 同爲奇數, 符合算術方案情形 (1), 得 $k=(a_1+1)+1=a_1+2$; (iii) 若 b_1 爲偶數, 符合算術方案 (2), 得 $k=(a_1+1)+2=a_1+3$。

翻轉方案分兩步：對於 (ii), 由於 $x=\dfrac{b-b_1}{2}$; 對於 (iii), 由於 $x=b-\dfrac{b_1}{2}$, 先分別按算術模型方案 (1)、(2) 完成 m 翻 b 的操作後; 再對每步剩餘的對象作 m 翻 n 的操作即可 (舉例見第 4 節表 5)。

概括: 除 m 奇 n 偶情形無解外, 其餘情形都有解。當 $b=0$ 時, 只有純翻轉, $k=a$; 當 $b\ne 0$ 時, 對於 a 分兩類, 共 6 種情形, 必有純、混翻轉, $k\ge 3$, 如表 4,

表 4

<table>
<tr><th></th><th>總數 m</th><th>每次翻轉數 n</th><th>最少次數 (k)</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>偶</td><td>奇</td><td rowspan="3">$m\div n=a$ 餘 b $(b\ne 0)$
(a) 當 $a>1$, b 和 n 同奇、同偶, $k=a+1$;
(b) 當 $a>1$, b 爲偶數, n 爲奇數、同偶, $k=a+2$;
(c) 當 $a=1$, b 爲偶數, $k=3$;
(d) 當 $a=1$, n、b 同爲奇數, 且 $n\div b=a_1$ 餘 b_1,
(i) 當 $b_1=0$ 時, $k=a_1+1$;
(ii) b_1 爲奇數時, $k=a_1+2$;
(iii) 偶數 $b_1\ne 0$ 時, $k=a_1+3$。</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>奇</td><td>奇</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>偶</td><td>偶</td></tr>
</table>

(文中餘數爲非負整數, 其餘字母取值均爲正整數)

3.3. 不定方程模型

方法一: 設第 1 步翻轉 n 個, 剩餘 $(m-n)$ 個; 第 2 步先將第 1 步轉回 x 個, 再將剩餘 $(m-n)$ 個中轉 $(n-x)$ 個後, 剩餘 $m-n-(n-x)=m-2n+x$; 第 3 步將前 2 步初始狀態個數合起來爲 $x+(m-2n+x)=m-2n+2x$ 個, 需翻 $\dfrac{m-2n+2x}{n}$ 次。

3步共需翻轉 $\dfrac{m-2n+2x}{n}+2=\dfrac{m+2x}{n}$ 次。

設 $\dfrac{m+2x}{n}=y$, 整理, 得不定方程 $m+2x=ny(*)$。

這是關於 x、y 的不定方程, 只需解出方程 $(*)$ 的最小正整數解, 即得最少翻轉次數 y。

方法二: 利用奇偶數分析法, 每只茶杯翻轉奇數次, 依次設爲 $2x_1+1$、$2x_2+1$、$\cdots$、$2x_m+1$, 翻轉總次數是 n 的倍數, 設爲 ny, 則 $(2x_1+1)+(2x_2+1)+\cdots+(2x_m+1)=ny$,

整理, 得 $2(x_1+x_1+\cdots+x_m)+m=ny$,

再設 $x_1+x_1+\cdots+x_m=x$, 則 $2x+m=ny$ $(*)$。

這是關於 x、y 的不定方程, 只需解出方程 $(*)$ 的最小正整數解, 即得最少翻轉次數 y。

思考: 從第 3.2 節推理看, 不定方程 $(*)$ 只適合 $a\geq 2$ 及 $a=1$ 且 b 爲偶數時情形。當 $a=1$ 且 b 爲奇數 (m 爲偶數、n 爲奇數) 時, 方程 $(*)$ 最小解可能出現 $y=2$, 如何修正呢? 兩種處理方法:

(a) 轉化方法 : 依據第 3.2 節情形 (4), 若 $n\div b=a_1$ 餘數爲 0, 則 $k=a_1+1$; 若 $n\div b=a_1$ 餘數非 0, 轉化爲不定方程 $m+2x=(m-n)y$ 探究最小正整數解。

(b) 直接方法 : 依據第 2 節情形 (1) 推理, 每個物件必須是翻轉奇數次, 依次設爲 k_1、k_2、k_3、$\cdots$、k_m 次, 翻轉 $2f$ 次, 則 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m=2nf$。

顯然 k_1、k_2、k_3、$\cdots$、$k_m\leq 2f$, 設其中最大值爲 $2f-r$ (r 爲正整數),

則 $2nf=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m\leq m(2f-r)$,

即 $2nf\leq m(2f-r)$, 解得 $f\geq\dfrac{mr}{2(m-n)}$。

因爲 m、n 一定, 所以 r 最小時, f 最小, 令 $r=1$, 則 $f=\left\lceil\dfrac{m}{2(m-n)}\right\rceil$。

故最少操作次數爲 $k=2f=2\left\lceil\dfrac{m}{2(m-n)}\right\rceil$,

($\left\lceil\dfrac{m}{2(m-n)}\right\rceil$ 表示不小於 $\dfrac{m}{2(m-n)}$ 的最小整數)。

4. 應用舉例

依據上述結論和規律, 可以處理任意 $1 < n < m$ 下的方案制定及翻轉判斷問題。

4.1. 制定翻轉方案

例1: 修改趣題條件爲「46 只杯, 每次翻 6 只」, 結果如何呢?

分析: 由於 $m = 46$ 爲偶數, $n = 6$ 爲偶數, 可以實現全部杯口朝下。又 $46 \div 6 = 7$ 餘 4, 得 $b = 4$, $n = 6$ 均爲偶數, 依據算術模型情形 (1), 得 $x = \dfrac{6-4}{2} = 1$。

方案: 第 1 步翻轉 6 只杯, 剩餘 40 只杯; 第 2 步先將第 1 步翻轉中任翻回 1 只杯, 再從剩餘 40 只杯中翻轉 5 只杯, 剩餘 35 只杯; 最後, 將第 2 步先轉回的 1 只杯及再轉剩餘的 35 只杯合併爲 $1 + 35 = 36$ 只杯, 分 6 次翻轉。綜上, 可得至少 8 次翻轉, 讓 46 只杯都朝下。

例2: 修改趣題條件爲「45只杯」,「每次翻轉 41 只杯」, 會是什麼結果呢?

分析: 由於 $m = 45$, $n = 41$ 同爲奇數, 可以實現全部杯口朝下。又 $45 \div 41 = 1$ 餘 4, 得 $b = 4$ 爲偶數, 依據算術模型情形 (3) , 得 $x = n - \dfrac{b}{2} = 41 - \dfrac{4}{2} = 39$。

方案: 第 1 步翻轉 41 只杯, 剩餘 4 只杯; 第 2 步先將第 1 步翻轉中任轉回 39 只杯, 再從剩餘 4 只杯中向後轉 2 只杯, 餘2只杯; 最後, 將第 2 步先轉數與再轉剩餘數合併爲 $39 + 2 = 41$, 翻轉 1 次即可。綜上, 至少翻轉 $k = 3$ 次。

例3: 修改趣題條件爲「14只杯」,「每次翻轉 11 只杯」, 其餘條件和問題不變, 會是什麼結果呢?

表 5: 14 翻 11

序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
步序	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	A	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-A	-A	A	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	A	A	-1	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	A	A	A	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	A	A	A	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	A	A	A

分析:由於 $m=14$ 爲偶數, $n=11$ 爲奇數, 可以實現全部杯口朝下。又 $14\div 11=1$ 餘 3, 得 $b=3$ 爲奇數, 依據算術模型 (4), 化爲 $14\div 3=4$ 餘 2, 依據算術模型 (2), 得 $x=b-\dfrac{b_1}{2}=3-\dfrac{2}{2}=2$。

方案: 如表 5, 先完成 14 翻 3 的操作, 分別用 A 和 -A 表示 +1 和 -1。第 1 步翻轉 3 只茶杯, 剩餘 11 只; 第 2 步先將第 1 步翻轉中任翻轉回 2 只, 再從剩餘 11 只杯中翻轉 1 只杯, 剩餘 10 只杯; 最後, 將第 2 步先轉數與再轉剩餘數合併一起共 $2+10=12$ 只杯, 分 4 次翻轉。綜上, 至少翻轉 6 次, 讓全部茶杯開口朝下。再對每步剩餘的物件完成 14 翻 11 的操作, 可得 $k=6$。

4.2. 計算翻轉次數

翻杯子、翻硬幣、翻撲克、開電燈、學生佇列轉向等有關問題, 按照本文所得結論和方法, 解決問題有規可循, 難點迎刃而解。

例1: 有 92 個房間開著燈, 如果每次同時撥動 11 個房間的開關, 經過至少幾次撥動, 燈全部關上?

略解: 因 $m=92$, $n=11$, 可以實現全部關燈。由於 $92\div 11=8$ 餘 4, 而 $b=4$ 爲偶數, 利用表 4 情形 (b), 得 $k=8+2=10$, 至少 10 次。

例2: 100 張卡片正面朝上放在桌子上, 每次翻轉其中的 99 張, 至少經過多少次翻轉, 使得 100 張卡片全部反面朝上?

A. 98次 B. 99次 C. 100次 D. 無法實現

略解: 因 $m=100$, $n=99$, 可以實現全部反面朝上。由於 $100\div 99=1$ 餘 1, 而 $b=1$ 爲奇數, 利用表 4 情形 (i), 得 $k=99\div 1+1=100$, 故選 C。

例3: 現有 54 張撲克正面朝上, 每次翻轉 51 張, 問最少要經過幾次翻轉可以使這 54 張撲克全部正面朝下?

A. 11次 B. 12次 C. 13次 D. 無法實現

略解: 因 $m=54$, $n=49$, 可以實現全部正面朝下。由於 $54\div 49$ 餘 5, 於是

方法1: 由於 $49\div 5=9$ 餘 4, 利用表 4 情形 (d) (iii) 得 $k=9+3=12$ 故選 B。

方法2: 利用修正模型 (b), 得 $k=2\Big[\dfrac{m}{2(m-n)}\Big]=2\Big[\dfrac{54}{2(54-49)}\Big]=12$。故選 B。

方法3: 利用修正模型 (a), 得 $54+2x=49y$, 最小正整數解爲 $x=22$, $y=2$, 由於 $54-49=5$, 化爲 $54+2x=5y$, 最小解正整數解爲 $x=3$, $y=12$, 故選 B。

以上各例, 均可一題多解, 大家不妨一試。

5. 收穫與啓示

這類趣題, 看起來很複雜, 但他們是有一定規律的, 通過建立方程、不等式和算術模型, 廣泛運用了數形結合、分類討論等數學思想方法, 經歷猜想、發現與應用, 鍛煉了數學思維和創新思維能力; 教師應該明確 : 比解決問題更重要的, 是發現問題。比發現問題更重要的, 是好奇心。在好奇心驅使下解決問題, 必須具備一定的數學想像力。數學想像力能把一個數學問題聯想到另一個數學問題, 找出彼此的關聯處, 缺乏想像力、數學是很難學好的。

參考文獻

1. 義務教育課程標準實驗教材七年級《數學》(上)[M]。江蘇科學技術出版社, 2012 年秋第一版, 第 63 頁。
2. 義務教育課程標準實驗教材七年級《數學》(上)[M]。華東師範大學出版社, 2012 年 7 月第一版, 第 52 頁。
3. 王琳, 潘亦寧。對“翻杯子問題”的進一步研究 [J]。中學數學教學參考 (下旬), 2016年 (7), 60-62 頁。
4. 李發勇。數學需要想像力[J]。數學教學, 2020(4), 28-34。
5. 歸納演算法(翻硬幣問題) , 福建工程學院電腦與資訊科學系實驗報告, `https://www.wenku365.com/p-47122751.html`, 2010/11/26
6. Flipping Cups, 弗雷斯諾太平洋大學科技中心, AIMS Center for Math and Science Education 網站, 2014。

—本文作者任教中國四川省巴中市巴州區大和初中—

勘誤表

第 32 卷第 4 期 (128號), 3-15。

1. 內文提到的人名 Simon 應爲 Simons, Simon's 應爲 Simons's。
2. immerse 要改爲 immersed。

第 45 卷第 4 期 (180號), 79頁第 8 行。

等號成立於 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 同向。

應爲 : 等號成立於 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 夾角爲 π。

第 45 卷第 4 期 (180號), 90 頁例 3 算式。

$$a^2b(a-b)++b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 8r^2\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}.$$

應爲 :

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 8r^2\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}.$$