數學傳播 46卷1期, pp. 84-87

等角差線實為雙曲線

鍾文體

一、

設 F_1, F_2 爲平面上相異的兩定點, 李永約同學在貴刊文 [1] 中, 仿照雙曲線的定義, 討論了使 $|\angle PF_1F_2 - \angle PF_2F_1|$ 爲定值的點 P 的軌跡, 稱之爲等角差線。本文證明等角差線實爲雙曲線, 並用更簡單的方法研究其漸近線。相信本文所用的方法能被一般的高中生理解。

在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = l$, $\angle B = \angle C + \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, 點 A 的軌跡爲等角差線的一部分。以 B 爲原點, $\overrightarrow{BC}$ 爲正方向建立直角座標系。當點 A 位於 x 軸的上方時, 文 [1] 根據幾何意義得到其軌跡的參數方程式如下:

$$\begin{cases} x = \dfrac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}, \\ y = \dfrac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}. \end{cases} \tag{1}$$

其中, θ 爲參數且 $0 < \theta < \dfrac{\pi-\alpha}{2}$。當 $l = 1$, $\alpha = \pi/6$ 時, 圖形如下:

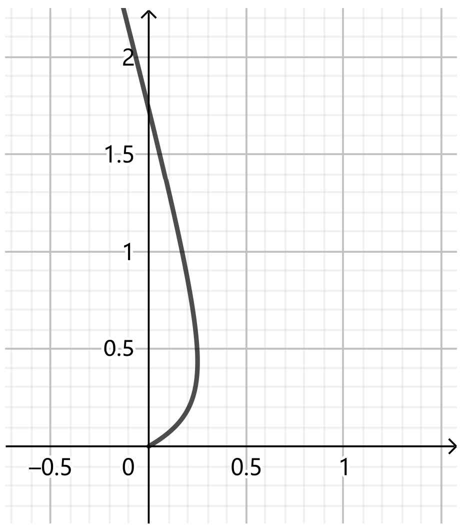

圖 1

根據本文第一段等角差線之定義, 還應考慮 $\angle B = \angle C - \alpha$ 的情況。此種情況下點 A 之參數方程式如下:

$$\begin{cases} x = \dfrac{l \tan\theta}{\tan(\theta-\alpha)+\tan\theta}, \\ y = \dfrac{l \tan\theta \tan(\theta-\alpha)}{\tan(\theta-\alpha)+\tan\theta}, \end{cases} \tag{2}$$

其中, $\alpha < \theta < \dfrac{\pi+\alpha}{2}$。當 $l=1, \alpha=\pi/6$ 時, 圖形如下:

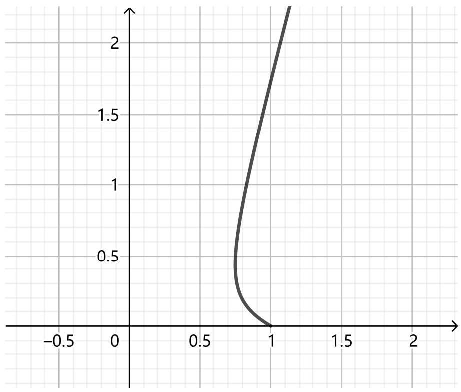

圖 2

圖 1 與 圖 2 合起來, 並根據對稱性繪製點 A 位於 x 軸的下方的軌跡, 得到等角差線的完整圖形:

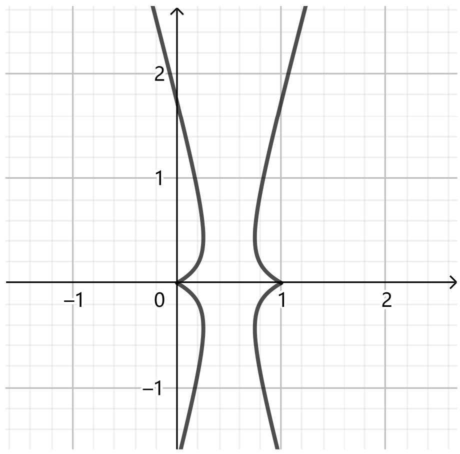

圖 3

二、

以下我們拋開 (1) 式的幾何意義, 不限制 θ 的取值, 來完整地討論它所表示的圖形。

首先, 根據 (1) 式可知 $l-x=\dfrac{l\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}$。故 $(l-x)\tan\theta=\dfrac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}$ $=y$, 即

$$\tan\theta=\frac{y}{l-x}. \tag{3}$$

再根據 (1) 式可知 $y=x\tan(\theta+\alpha)$。若 $\alpha=\pi/2$, 則 $y=-x/\tan\theta$。將 (3) 式代入, 整理得 $(x-\dfrac{l}{2})^2-y^2=\dfrac{l^2}{4}$, 這是一雙曲線。若 $\alpha\neq\pi/2$, 則 $y=x\cdot\dfrac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$, 將 (3) 式代入, 整理得

$$x^2\tan\alpha-y^2\tan\alpha-2xy-lx\tan\alpha+ly=0. \tag{4}$$

根據大學解析幾何的二次曲線分類法則可知上述二次方程式所表示的圖形爲一雙曲線。

能否儘量避免涉及大學知識? 以下對此作出嘗試。

先作一座標平移消去一次項, 將原點移至 $\overline{BC}$ 中點 (建系時以 $\overline{BC}$ 中點爲原點可避免座標平移)。新座標系下一點之座標 (x',y') 與原座標系下之座標 (x,y) 有如下關係: $x=x'+\dfrac{l}{2}, y=y'$, 代入 (4) 式得新座標系下之方程爲

$$x'^2\tan\alpha-y'^2\tan\alpha-2x'y'=\frac{l^2\tan\alpha}{4}. \tag{5}$$

到這裏希望高中生讀者接受以下事實: 一般二次方程式 (非退化情形) 所表示的圖形只有三種可能, 或爲橢圓, 或爲雙曲線, 或爲拋物線。那麼 (5) 式表示哪種圖形呢? 若 (x_0',y_0') 適合 (5) 式, 則易知 $(-x_0',-y_0')$ 也適合 (5) 式, 從而它的圖形關於原點對稱, 不可能是拋物線。究竟是橢圓還是雙曲線呢? 我們通過以下例子來說明如何判斷。

例 1: 確定方程式 $2x^2+y^2-5xy=3$ 所表示的圖形。

將方程 $2x^2+y^2-5xy=3$ 兩邊同時除以 x^2, 得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-5\cdot\dfrac{y}{x}+2=\dfrac{3}{x^2}$。令 $x\to+\infty$, 得 $t^2-5t+2=0$, 其中, $t=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}$。方程 $t^2-5t+2=0$ 有兩個根, 於是 $2x^2+y^2-5xy=3$ 所表示的圖形有漸近線, 從而是雙曲線。方程 $t^2-5t+2=0$ 的根即爲漸近線的斜率。

例 2: 確定方程式 $2x^2+y^2-xy=3$ 所表示的圖形。

將方程 $2x^2+y^2-xy=3$ 兩邊同時除以 x^2, 得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}+2=\dfrac{3}{x^2}$。令 $x\to+\infty$, 得 $t^2-t+2=0$, 其中, $t=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}$。方程 $t^2-t+2=0$ 沒有實數根, 於是 $2x^2+y^2-xy=3$ 所表示的圖形沒有漸近線, 從而是橢圓。

仿照上述例子, 爲了判斷方程 (5) 的圖形, 只需判斷方程

$$t^2\tan\alpha+2t-\tan\alpha=0 \tag{6}$$

是否有實數根即可。其判別式 $\Delta = 4 + 4\tan^2\alpha = \dfrac{4}{\cos^2\alpha} > 0$, 從而方程 (5) 表示雙曲線。

三、

根據上段, 方程 (6) 的兩個根即是雙曲線 (5) 之漸近線的斜率。根據求根公式, 其根爲 $\dfrac{-2\pm\frac{2}{\cos\alpha}}{2\tan\alpha} = \dfrac{-\cos\alpha\pm1}{\sin\alpha}$。由 $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$ 可知 $\dfrac{-\cos\alpha-1}{\sin\alpha} = \dfrac{-2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{-2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = -\cot\dfrac{\alpha}{2}$。由 $\cos\alpha = 1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ 可知 $\dfrac{-\cos\alpha+1}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$。於是, 雙曲線 (5) 之漸近線爲 $y' = -\cot\dfrac{\alpha}{2}x'$ 和 $y' = \tan\dfrac{\alpha}{2}x'$。這是文 [1] 的 Theorem 2。

漸近線 $y' = -\cot\dfrac{\alpha}{2}x'$ 可以作如下解釋。如圖 4, 當點 A 移至無窮遠時, AB 與 AC 趨於平行, θ (即 $\angle ACB$) $\to \dfrac{\pi-\alpha}{2}$, AB 與 AC 斜率趨於 $\tan\left(\pi-\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right) = -\cot\dfrac{\alpha}{2}$。

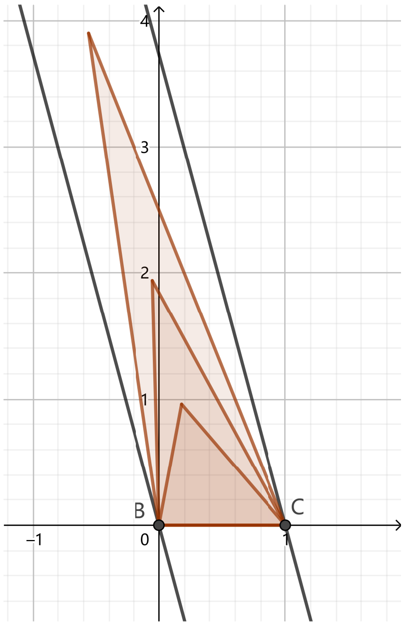

圖 4

參考文獻

1. 李永約。等角差線 — 漸近線及其性質。數學傳播季刊, 45(4), 34-42, 2021。

—本文作者任教中國廣東省深圳市教育科學研究院附屬外國語學校—