數學傳播 46卷1期, pp. 69-83

圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和

楊玉星

關鍵詞: 圓內接正多邊形、奇偶弦長、冪次定和。

一、前言

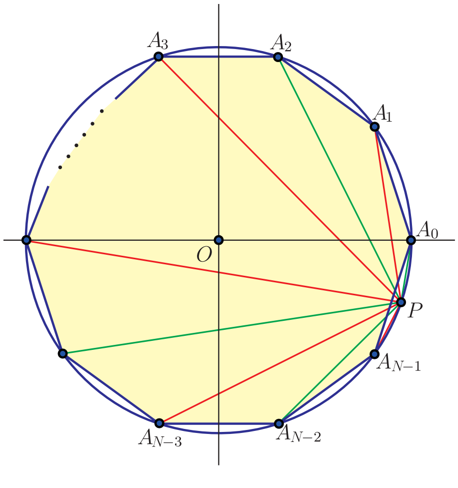
科學研習月刊森棚教官的數學題 (參 [1]) 中發現 :「畫正三角形與外接圓, 然後在圓上任取一點, 則此點到較遠頂點的距離會等於到較近兩頂點的距離和。」, 於是, 我們好奇地想知道其它正多邊形會不會也有類似的性質?

二、引理

(一) 引理1 : (參 [2]) 正 N 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{N-1}$ 的外接圓, 建構於複數平面圓心為 $(0,0)$ 的單位圓上, 不失一般性, 考慮 P 點落在 $\overset{\frown}{A_0A_{N-1}}$ 上, 如圖一所示, A_k 所代表的複數為 Z_k,

$$Z_k=\cos\left(\frac{2k}{N}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right),\ 則\ \overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\right),$$

其中 $k=0,1,2,\ldots,N-1$。



圖一

證明: 設 $P=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta),\ 0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}$。

$$\begin{aligned}
\text{則}\quad \overline{PA_k} &= |P-Z_k| \quad (k=0,1,2,\ldots,N-1)\\
&=\Big|\Big[\cos(-\theta)-\cos\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]+i\Big[\sin(-\theta)-\sin\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]\Big|\\
&=\sqrt{\Big[\cos(-\theta)-\cos\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]^2+\Big[\sin(-\theta)-\sin\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]^2}\\
&=\sqrt{2-2\Big[\cos(-\theta)\cos\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)+\sin(-\theta)\sin\Big(\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]}\\
&=\sqrt{2-2\cos\Big[(-\theta)-\frac{2k}{N}\pi\Big]}=\sqrt{2\Big[1-\cos\Big(\theta+\frac{2k}{N}\pi\Big)\Big]}\\
&=\sqrt{4\sin^2\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\Big)}=\Big|2\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{N}\pi\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

又 $0\le\theta\le\dfrac{2\pi}{N}$, $\therefore\ 0\le\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{N}\ \Rightarrow\ 0\le\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{N}\pi\le\pi$, 且 $k=0,1,2,\ldots,N-1$,

$\therefore\ \sin\Big(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{N}\pi\Big)\ge 0$, 故 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\Big(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{N}\pi\Big)$. Q.E.D.

(二) **引理**2：(**參** [3])

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\cos p\Big(\theta+\frac{2k}{N}\pi\Big)=0,\quad \sum_{k=0}^{N-1}\sin p\Big(\theta+\frac{2k}{N}\pi\Big)=0 \qquad (1\le p\le N-1, p\in\mathbb{N}).$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\cos p\Big(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\Big)=0,\ \sum_{k=0}^{N-1}\sin p\Big(\theta+\frac{2k+1}{N}\pi\Big)=0 \quad (1\le p\le N-1, p\in\mathbb{N}).$

證明:

(1) 設方程式 $z^N=\cos(pN\theta)+i\sin(pN\theta)\quad(1\le p\le N-1, N\ge 2, p, N\in\mathbb{N})$,

令複數 $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, 則 $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^N=\cos(pN\theta)+i\sin(pN\theta)$,

由棣美弗定理可知: $\cos(N\varphi)+i\sin(N\varphi)=\cos(pN\theta)+i\sin(pN\theta)$,

推得 $N\varphi=pN\theta+2kp\pi\ \Rightarrow\ \varphi=p\theta+\dfrac{2k}{N}p\pi$, $k=0,1,2,\ldots,N-1$,

故可得 $z_k=\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\Big)+i\sin p\Big(\theta+\dfrac{2k\pi}{N}\Big)$, $k=0,1,2,\ldots,N-1$,

爲其複數方程式 $z^N=\cos(pN\theta)+i\sin(pN\theta)$ 的 N 個複數根。

由於複數的 N 次方根和爲 0,

即 $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}z_k=0\ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{N-1}\Big[\cos p\Big(\theta+\frac{2k\pi}{N}\Big)+i\sin p\Big(\theta+\frac{2k\pi}{N}\Big)\Big]=0,$

故 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\Big)=0$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sin p\Big(\theta+\dfrac{2k}{N}\pi\Big)=0,\ k=0,1,2,\ldots,N-1$。

(2) 設方程式 $z^N=\cos p(N\theta+\pi)+i\sin p(N\theta+\pi)$ $(1\le p\le N-1,\ N\ge 2,\ p,N\in\mathbb{N})$,

令複數 $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, 則 $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^N=\cos p(N\theta+\pi)+i\sin p(N\theta+\pi)$,

由棣美弗定理可知: $\cos(N\varphi)+i\sin(N\varphi)=\cos p(N\theta+\pi)+i\sin p(N\theta+\pi)$,

推得 $N\varphi=pN\theta+p\pi+2kp\pi\ \Rightarrow\ \varphi=p\theta+\dfrac{2k+1}{N}p\pi,\ k=0,1,2,\ldots,N-1$,

故可得 $z_k=\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big)+i\sin p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big),\ k=0,1,2,\ldots,N-1$,

為其複數方程式 $z^N=\cos p(N\theta+\pi)+i\sin p(N\theta+\pi)$ 的 N 個複數根。

由於複數的 N 次方根和為 0,

即 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}z_k=0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=0}^{N-1}\Big[\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big)+i\sin p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big)\Big]=0$,

故 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big)=0$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sin p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{N}\pi\Big)=0,\ k=0,1,2,\ldots,N-1$. Q.E.D.

(三) **引理3**:(參 [4])

(1) $\sin^{2n}\alpha=\dfrac{1}{2^{2n-1}}\Big[\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_k^{2n}\cos(2n-2k)\alpha+\dfrac{1}{2}C_n^{2n}\Big]$.

(2) $\sin^{2n+1}\alpha=\dfrac{1}{2^{2n}}\Big[\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_k^{2n+1}\sin(2n+1-2k)\alpha\Big]$.

證明: 根據歐拉公式, 可設 $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, 則 $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$。

推得 $\cos\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$。

$$
\begin{aligned}
\text{所以 }\sin^N\alpha&=\frac{1}{2^Ni^N}[e^{i\alpha}+(-1)e^{-i\alpha}]^N\\
&=\frac{1}{2^Ni^N}[C_0^Ne^{iN\alpha}+C_1^Ne^{i(N-1)\alpha}\cdot(-1)e^{-i\alpha}+C_2^Ne^{i(N-2)\alpha}\cdot(-1)^2e^{-i2\alpha}\\
&\qquad+\cdots+C_{N-1}^Ne^{i\alpha}\cdot(-1)^{N-1}e^{-i(N-1)\alpha}+C_N^N(-1)^Ne^{-iN\alpha}]\\
&=\frac{1}{2^Ni^N}[e^{iN\alpha}+(-1)C_1^Ne^{i(N-2)\alpha}+(-1)^2C_2^Ne^{i(N-4)\alpha}\\
&\qquad+\cdots+(-1)^{N-1}C_{N-1}^Ne^{-i(N-2)\alpha}+(-1)^Ne^{-iN\alpha}].
\end{aligned}
$$

(1) $N=2n$ 時,

$$\sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n}i^{2n}}[e^{i2n\alpha}+(-1)C_1^{2n}e^{i(2n-2)\alpha}+(-1)^2C_2^{2n}e^{i(2n-4)\alpha}$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}C_{2n-1}^{2n}e^{-i(2n-2)\alpha}+(-1)^{2n}e^{-i2n\alpha}]$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(-1)^n}\{[e^{i2n\alpha}+e^{-i2n\alpha}]+(-1)C_1^{2n}[e^{i(2n-2)\alpha}+e^{-i(2n-2)\alpha}]$$

$$+(-1)^2C_2^{2n}[e^{i(2n-4)\alpha}+e^{-i(2n-4)\alpha}]$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2n}[e^{i2\alpha}+e^{-i2\alpha}]+C_n^{2n}e^{in\alpha}\cdot(-1)^ne^{-in\alpha}\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}[2\cos 2n\alpha+(-1)C_1^{2n}\cdot 2\cos(2n-2)\alpha+(-1)^2C_2^{2n}\cdot 2\cos(2n-4)\alpha$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2n}\cdot 2\cos 2\alpha+(-1)^nC_n^{2n}]$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}[(-1)^n\cos 2n\alpha+(-1)^{n+1}C_1^{2n}\cos(2n-2)\alpha+(-1)^{n+2}C_2^{2n}\cos(2n-4)\alpha$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}C_{n-1}^{2n}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}(-1)^{2n}C_n^{2n}]$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_k^{2n}\cdot\cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_n^{2n}\Big].$$

(2) $N=2n+1$ 時,

$$\sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n+1}i^{2n+1}}[e^{i(2n+1)\alpha}+(-1)C_1^{2n+1}e^{i(2n-1)\alpha}+(-1)^2C_2^{2n+1}e^{i(2n-3)\alpha}$$

$$+\cdots+(-1)^{2n}C_{2n}^{2n+1}e^{-i(2n-1)\alpha}+(-1)^{2n+1}e^{-i(2n+1)\alpha}]$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}(-1)^ni}\{[e^{i(2n+1)\alpha}-e^{-i(2n+1)\alpha}]+(-1)C_1^{2n+1}[e^{i(2n-1)\alpha}-e^{-i(2n-1)\alpha}]$$

$$+(-1)^2C_2^{2n+1}[e^{i(2n-3)\alpha}-e^{-i(2n-3)\alpha}]+\cdots+(-1)^nC_n^{2n+1}[e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}]\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}[\sin(2n+1)\alpha+(-1)C_1^{2n+1}\sin(2n-1)\alpha+(-1)^2C_2^{2n+1}\sin(2n-3)\alpha$$

$$+\cdots+(-1)^nC_n^{2n+1}\sin\alpha]$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}[(-1)^n\sin(2n+1)\alpha+(-1)^{n+1}C_1^{2n+1}\sin(2n-1)\alpha$$

$$+(-1)^{n+2}C_2^{2n+1}\sin(2n-3)\alpha+\cdots+(-1)^{2n}C_n^{2n+1}\sin\alpha]$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\Big[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_k^{2n+1}\sin(2n+1-2k)\alpha\Big].$$

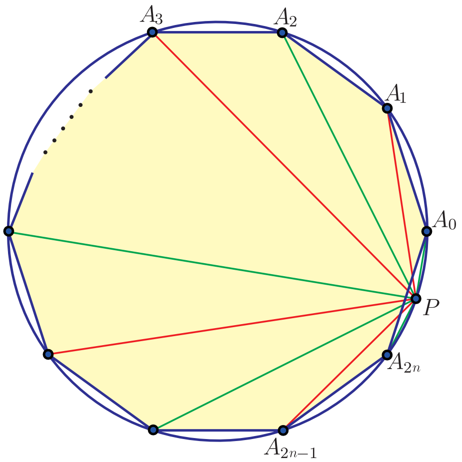
Q.E.D.

三、圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和

(一) 定理1 : (參 [2])

正 $2n+1$ $(n\geq 1)$ 邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離和與到偶頂點的距離和相等。

如圖二, 即 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}=\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}$。



圖二

證明: 已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\right)$, $k=0,1,2,\ldots,2n$。所以

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}\\&\quad=2\Big[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\Big]\\&\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}\\&\quad=2\Big[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\Big].\end{aligned}$$

於是

$$\begin{aligned}&(\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}})-(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}})\\&=2\Big[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+2}{2n+1}\pi\right)\\&\qquad+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+4}{2n+1}\pi\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4n}{2n+1}\pi\right)\Big]\\&=2\sum_{k=0}^{2n}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\right)=0\qquad\text{(由引理 2(1) 可知).}\end{aligned}$$

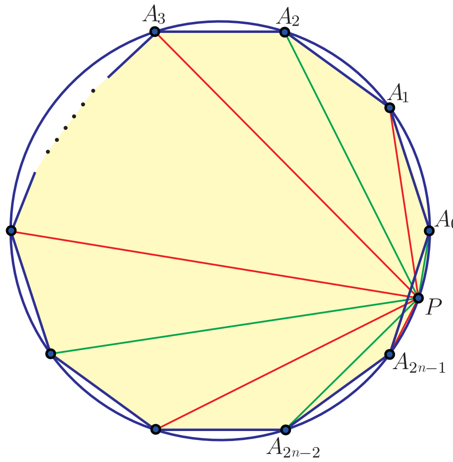
因此 $(\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}})-(\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}})=0$,

故 $\overline{PA_1}+\overline{PA_3}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}=\overline{PA_0}+\overline{PA_2}+\cdots+\overline{PA_{2n}}$.　　Q.E.D.

(二) **定理2**：(參 [2])

正 $2n$ $(n\geq 2)$ 邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離平方和與到偶頂點的距離平方和相

等。如圖三, $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^2=\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^2$。



圖三

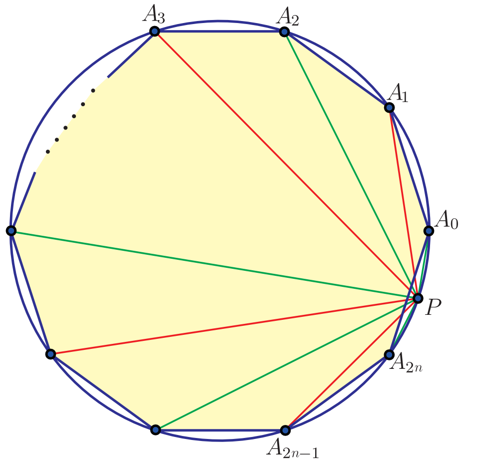
證明: 已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{2n}\pi\right)$, $k=0,1,2,\ldots,2n-1$。所以

$$\begin{aligned}
&\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^2\\
&=4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\\
&=\left[2-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\right]+\left[2-2\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)\right]+\cdots+\left[2-2\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]\\
&=2n-2\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\right]\\
&=2n-2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)\\
&=2n-0=2n. \qquad \text{(由引理 2(2) 可知)}\\
&\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^2\\
&=4\sin^2\frac{\theta}{2}+4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-2}{2n}\pi\right)\\
&=[2-2\cos\theta]+\left[2-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right]+\cdots+\left[2-2\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\right]\\
&=2n-2\left[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\right]\\
&=2n-2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=2n-0=2n, \qquad \text{(由引理 2(1) 可知).}
\end{aligned}$$

故 $\overline{PA_1}^2+\overline{PA_3}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^2=\overline{PA_0}^2+\overline{PA_2}^2+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^2$. Q.E.D.

(三) **定理** 3:

正 $2n+1$ $(n\geq 2)$ 邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離立方和與到偶頂點的距離立方和相等。如圖四, 即 $\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3=\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3$。



圖四

證明:

已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\right)$, $k=0,1,2,\ldots,2n$。所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3\\
&=8\sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+8\sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+8\sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\\
&=\left[6\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)-2\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)\right]\\
&\quad+\left[6\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)-2\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{2n+1}\right)\right]\\
&\quad+\cdots+\left[6\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)-2\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n-3}{2n+1}\pi\right)\right]\\
&=6\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\right]\\
&\quad-2\left[\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n-3}{2n+1}\pi\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3\\
&=8\sin^3\frac{\theta}{2}+8\sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+8\sin^3\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)\\
&=\left[6\sin\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{3\theta}{2}\right]+\left[6\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-2\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6\pi}{2n+1}\right)\right]+\cdots\\
&\quad+\left[6\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\right)-2\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&=6\Big[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\Big)+\cdots+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\&\quad-2\Big[\sin\frac{3\theta}{2}+\sin(\frac{3\theta}{2}+\frac{6\pi}{2n+1})+\cdots+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\Big)\Big],\end{aligned}$$

於是

$$\begin{aligned}&(\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3)-(\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3)\\&=6\Big[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\\&\qquad+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+2}{2n+1}\pi\Big)+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n+4}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4n}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\&\quad-2\Big[\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{6}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n}{2n+1}\pi\Big)+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n+6}{2n+1}\pi\Big)\\&\qquad+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{6n+12}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin\Big(\frac{3\theta}{2}+\frac{12n}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\&=6\sum_{k=0}^{2n}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)-2\sum_{k=0}^{2n}\sin 3\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big).\end{aligned}$$

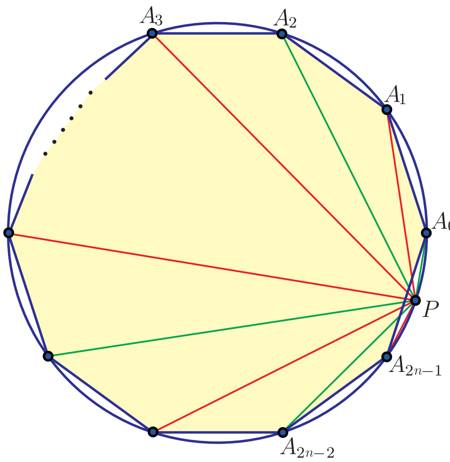
由引理 2(1) 可知：$\sum\limits_{k=0}^{2n}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)=0$ 和 $\sum\limits_{k=0}^{2n}\sin 3\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)=0$。

因此 $(\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3)-(\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3)=0.$

故 $\overline{PA_1}^3+\overline{PA_3}^3+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^3=\overline{PA_0}^3+\overline{PA_2}^3+\cdots+\overline{PA_{2n}}^3.$ Q.E.D.

(四) 定理 4:

正 $2n$ $(n\geq 3)$ 邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離四次方和與到偶頂點的距離四次方和相等。如圖五, 即 $\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4=\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^4$。



圖五

證明: 已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)$, $k=0,1,2,\ldots,2n-1$。所以

$$\begin{aligned}
&\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4\\
&=16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\right)+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\right)+\cdots\\
&\quad+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\\
&=2\Big[3-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\Big]+2\Big[3-4\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{n}\right)\Big]\\
&\quad+2\Big[3-4\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{n}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{10\pi}{n}\right)\Big]+\cdots\\
&\quad+2\Big[3-4\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{4n-2}{n}\pi\right)\Big]\\
&=6n-8\Big[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{n}\right)+\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\right)\Big]\\
&\quad+2\Big[\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{6\pi}{n}\right)+\cos\left(2\theta+\frac{10\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(2\theta+\frac{4n-2}{n}\pi\right)\Big]\\
&=6n-8\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)=6n.
\end{aligned}$$

由引理 2(2) 可知: $\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\right)=0$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)=0$。

$$\begin{aligned}
&\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^4\\
&=16\sin^4\frac{\theta}{2}+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{n}\pi\right)+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{n}\pi\right)+\cdots+16\sin^4\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{n}\pi\right)\\
&=2[3-4cos\theta+cos2\theta]+2[3-4\cos(\theta+\frac{2}{n}\pi)+\cos(2\theta+\frac{4}{n}\pi)]\\
&\quad+2[3-4\cos(\theta+\frac{4}{n}\pi)+\cos(2\theta+\frac{8}{n}\pi)]+\cdots\\
&\quad+2\Big[3-4\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{4n-4}{n}\pi\right)\Big]\\
&=6n-8\Big[\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2}{n}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cdots+\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\right)\Big]\\
&\quad+2\Big[\cos 2\theta+\cos\left(2\theta+\frac{4}{n}\pi\right)+\cos\left(2\theta+\frac{8}{n}\pi\right)+\cdots+\cos\left(2\theta+\frac{4n-4}{n}\pi\right)\Big]\\
&=6n-8\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)=6n.
\end{aligned}$$

由引理 2(1) 可知：$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k}{n}\pi\right)=0$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)=0$。

故 $\overline{PA_1}^4+\overline{PA_3}^4+\overline{PA_5}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^4=\overline{PA_0}^4+\overline{PA_2}^4+\overline{PA_4}^4+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^4$. Q.E.D.

(五) **定理** 5: (參 [3])

設正 $2n$ ($n\geq m$, $m\geq 2$) 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 的外接圓, 設 P 點爲 $\overparen{A_0A_{2n-1}}$ 上任一點, 則

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}\\ =&\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}.\end{aligned}$$

證明: 已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\Big(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{k}{2n}\pi\Big)$, 其中 $k=0,1,2,\ldots,2n-1$。

且 $\sin^{2m-2}\alpha=\dfrac{1}{2^{2m-3}}\Big[\sum\limits_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\alpha+\dfrac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]$, 所以

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}\\
=&2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\Big)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\Big)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\Big)\\
&+\cdots+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\Big)\\
=&2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]\\
&+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]\\
&+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]+\cdots\\
&+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n}\pi\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]\\
=&n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\Big[\cos(m-1)(\theta+\frac{\pi}{n})+\cos(m-1)(\theta+\frac{3}{n}\pi)+\cos(m-1)(\theta+\frac{5}{n}\pi)\\
&\qquad+\cdots+\cos(m-1)\Big(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\Big)\Big]\\
&+2(-1)^mC_1^{2m-2}\Big[\cos(m-2)(\theta+\frac{\pi}{n})+\cos(m-2)(\theta+\frac{3}{n}\pi)+\cos(m-2)(\theta+\frac{5}{n}\pi)\\
&\qquad+\cdots+\cos(m-2)(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi)\Big]\\
&+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-2}\Big[\cos(m-3)(\theta+\frac{\pi}{n})+\cos(m-3)(\theta+\frac{3}{n}\pi)\end{aligned}$$

$$+\cos(m-3)(\theta+\frac{5}{n}\pi)+\cdots+\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\Big)\Big]+\cdots$$
$$+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\Big[\cos\Big(\theta+\frac{\pi}{n}\Big)+\cos\Big(\theta+\frac{3}{n}\pi\Big)+\cos\Big(\theta+\frac{5}{n}\pi\Big)+\cdots+\cos\Big(\theta+\frac{2n-1}{n}\pi\Big)\Big]$$
$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-1)\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)$$
$$+2(-1)^{m}C_{1}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-2)\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)$$
$$+2(-1)^{m+1}C_{2}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)$$
$$+\cdots+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\theta+\frac{2k+1}{n}\pi\Big)=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}.$$

由引理 2(2) 可知：$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos p\Big(\theta+\dfrac{2k+1}{n}\pi\Big)=0\ (1\le p\le n-1, p\in\mathbb{N})$。

$$\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}$$
$$=2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n}\Big)+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n}\Big)$$
$$+\cdots+2^{2m-2}\sin^{2m-2}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-2}{2n}\pi\Big)$$
$$=2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_{k}^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_{k}^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_{k}^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n}\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]+\cdots$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-1+k}C_{k}^{2m-2}\cos(2m-2-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-2}{2n}\pi\Big)+\frac{1}{2}C_{m-1}^{2(m-1)}\Big]$$
$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\Big[\cos(m-1)\theta+\cos(m-1)(\theta+\frac{2}{n}\pi)$$
$$+\cos(m-1)\Big(\theta+\frac{4}{n}\pi\Big)+\cdots+\cos(m-1)\Big(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\Big)\Big]$$
$$+2(-1)^{m}C_{1}^{2m-2}\Big[\cos(m-2)\theta+\cos(m-2)\Big(\theta+\frac{2}{n}\pi\Big)$$

$$+\cos(m-2)\Big(\theta+\frac{4}{n}\pi\Big)+\cdots+\cos(m-2)\Big(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\Big)\Big]$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-2}\Big[\cos(m-3)\theta+\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{2}{n}\pi\Big)$$

$$+\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{4}{n}\pi\Big)+\cdots+\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\Big)\Big]+\cdots$$

$$+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\Big[\cos\theta+\cos\Big(\theta+\frac{2}{n}\pi\Big)+\cos\Big(\theta+\frac{4}{n}\pi\Big)+\cdots$$

$$+\cos\Big(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi\Big)\Big]$$

$$=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}+2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-1)\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)$$

$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-2)\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)$$

$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(m-3)\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)+\cdots$$

$$+2(-1)^{2m-3}C_{m-2}^{2m-2}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)=n\cdot C_{m-1}^{2(m-1)}.$$

由引理 2(1) 可知: $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos p\Big(\theta+\frac{2k}{n}\pi\Big)=0\ (1\le p\le n-1,\, p\in\mathbb{N})$。故

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}^{2m-2}+\overline{PA_3}^{2m-2}+\overline{PA_5}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-2}\\=&\overline{PA_0}^{2m-2}+\overline{PA_2}^{2m-2}+\overline{PA_4}^{2m-2}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-2}\quad(m\ge 2).\end{aligned}$$ Q.E.D.

(六) **定理** 6:

設正 $2n+1$ $(n\ge m,\ m\ge 1)$ 邊形 $A_0A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的外接圓, 設 P 點爲 $\overparen{A_0A_{2n}}$ 上任一點, 則

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}\\=&\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n}}^{2m-1}.\end{aligned}$$

證明: 已知 $\overline{PA_k}=|P-Z_k|=2\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{k}{2n+1}\pi\Big)$, 其中 $k=0,1,2,\ldots,2n$。

且 $\sin^{2m-1}\alpha=\frac{1}{2^{2m-2}}\Big[\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\cos(2m-1-2k)\alpha\Big]$, 所以

$$\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{2m-1}\sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\right)\\
&\quad+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n+1}\right)+\cdots+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\\
&= 2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\Big)\Big]\\
&\quad+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2n+1}\Big)\Big]\\
&\quad+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{2n+1}\Big)\Big]+\cdots\\
&\quad+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\
&= 2(-1)^{m-1}\Big[\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\Big)+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\Big)\\
&\quad+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\
&\quad+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\Big[\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\Big)+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\Big)\\
&\quad+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\
&\quad+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\Big[\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\Big)+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\Big)\\
&\quad+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\Big)\Big]\\
&\quad+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\Big[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2n+1}\pi\right)\\
&\quad+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5}{2n+1}\pi\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right)\Big]\\
&= 2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\Big)\\
&\quad+2(-1)^{m-1}C_1^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\Big)\\
&\quad+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k+1}{2n+1}\pi\Big),$$

$$\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n}}^{2m-1}$$
$$=2^{2m-1}\sin^{2m-1}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\Big)+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n+1}\Big)$$
$$+\cdots+2^{2m-1}\sin^{2m-1}\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)$$
$$=2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2n+1}\Big)\Big]$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{2n+1}\Big)\Big]+\cdots$$
$$+2\Big[\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1+k}C_k^{2m-1}\sin(2m-1-2k)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]$$
$$=2(-1)^{m-1}\Big[\sin(2m-1)(\frac{\theta}{2})+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\Big)$$
$$+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]$$
$$+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\Big[\sin(2m-3)(\frac{\theta}{2})+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\Big)$$
$$+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]$$
$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\Big[\sin(2m-5)(\frac{\theta}{2})+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\Big)$$
$$+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\Big)+\cdots+\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]+\cdots$$
$$+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\Big[\sin\frac{\theta}{2}+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2}{2n+1}\pi\Big)+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{4}{2n+1}\pi\Big)+\cdots$$
$$+\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2n}{2n+1}\pi\Big)\Big]$$
$$=2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)+2(-1)^{m}C_1^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)$$
$$+2(-1)^{m+1}C_2^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)+\cdots$$

$$+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{n}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big).$$

於是

$$\begin{aligned}&(\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1})\\&\quad-(\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1})\\&=2(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{2n}\sin(2m-1)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)\\&\quad+2(-1)^{m}C_{1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}\sin(2m-3)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)\\&\quad+2(-1)^{m+1}C_{2}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}\sin(2m-5)\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)\\&\quad+\cdots+2(-1)^{2m-2}C_{m-1}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n}\sin\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big).\end{aligned}$$

由引理 2(1) 可知：$\sum\limits_{k=0}^{2n}\sin p\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{2k}{2n+1}\pi\Big)=0$ $(1\le p\le 2n,\ p\in\mathbb{N})$, 因此

$$\begin{aligned}&(\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1})\\&\quad-(\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1})=0.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\overline{PA_1}^{2m-1}+\overline{PA_3}^{2m-1}+\overline{PA_5}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-1}}^{2m-1}\\&=\overline{PA_0}^{2m-1}+\overline{PA_2}^{2m-1}+\overline{PA_4}^{2m-1}+\cdots+\overline{PA_{2n-2}}^{2m-1}\quad(m\ge 1).\end{aligned}$$ Q.E.D.

綜合以上性質, 我們得到一個結論：不論 N 爲奇數或偶數, 正 N $(N\ge m)$ 邊形的外接圓上動點到奇頂點的距離 $m-2$ 次方和與到偶頂點的距離 $m-2$ 次方和必相等。

參考資料

1. 游森棚。森棚教官的數學題: 正三角形的線段定和。科學研習月刊, 第 56 卷第 10 期, 106 年 9 月。
2. 王啟光。正 $2n+1$ 邊形外接圓上一點到各頂點的距離關係。取自於師大附中 `www.hs.ntnu.edu.tw/~math/files/3.doc`。
3. 姜硯凱, 李婕安, 張瑄倫。「圓」中註「定」- 圓內接多邊形圓上一點到多邊形頂點、過頂點的切線與對角線距離的關係。中華民國第 60 屆中小學科展。
4. 如何給 $\cos^n(x)$ 降冪? 取自 `http://www.360doc.com/content/17/1203/15/47852988_709519434.shtml`。

—本文作者任教國立金門高級中學—