數學傳播　46卷1期, pp. 64-68

以數學模型來詮釋「利他主義」的眞諦

陳博彥

長久以來, 社會科學與自然科學的論述方式一直困惑著學術界, 不知是否有共通語言方式可以用來詮釋彼此之相關學理論點及議題? 因為既然盡皆稱之為科學, 勢必有彼此互通的傳譯方式及途徑, 可用來進行解說通譯。所以本文即嘗試做此種解讀, 以銜接兩種科學的視野範圍。在此尤其更要感謝藉由教育部教學實踐研究計畫 (計畫編號: PEE1100793) 的執行, 反思體會到落實工程專業相關的課程應賦予人文素養的教育養成元素, 才能助益於工程人才時刻存有人文關懷感恩的理念。尤其是經營永續的綠色大地, 此點在基本素養之教育訓練上極為重要, 也極為挑戰。更要感謝計畫審查委員的寶貴意見建議論及:「計畫在設計上引入利他主義思維, 理念極具創新 ⋯ 但利他主義以及問題導向學習如何在教學中具體實踐, 請再加以說明。」上述諸問題確實困惑作者甚久, 但新近發現像是「利他主義」(altruism; 維基百科) 此種形而上的抽象概念, 若要具體量化來實踐評量, 可能需仰賴數學語言之轉譯成為量化模型, 進行評量, 方足以達成。因此在此一併回覆上述之疑問及困惑, 更大膽推論數學建模可能是更有效詮釋社會哲學思維意涵於自然人文現象內含景觀的有效方法之一。換言之, 抽象概念可能可藉由數學建模過程, 更具體體現定量表徵其特性與意義, 更確實量化解讀出其原本社會哲學背景意義。在此就以建立數學模型 (圖 1) 來詮釋「利他主義」　的人文關懷及人本價值為例, 來進行社會及自然科學雙向詮釋分析過程, 進而說明數學語言的雙向通譯特性與功能。

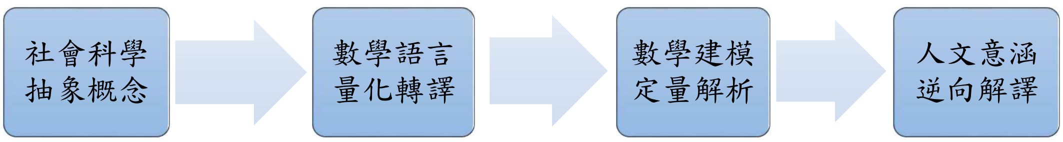

圖 1: 社會科學概念轉譯為數學模型進行解析思維邏輯示意圖

首先, 設定利他主義之核心價值「道德本體應有幫助他人之義務」為此處有待量化邏輯確認之命題, 以生態觀點來定義即可解譯為助益利於生態系統中其他生物物種或是其他民族生存。更引入 Lotka-Volterra (L-V) 二元物種競爭生態模型 [1-3] 來探討其間之交互作用關係式 (1)

及 (2) 如下:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \Big(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1}\Big) = f(N_1, N_2), \tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \Big(\frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1}{K_2}\Big) = h(N_1, N_2), \tag{2}$$

其中 r_i 為 i 物種比生長速率 (specific growth rate or inherent per captia growth rate), α_{ij} 表 j 物種對 i 物種生長產生之競爭壓力效應係數 (competitive coefficient)。K_i 表 i 物種於生態中可容納最大數目 (carrying capacity)。假若人類 (其數目為 N_2) 於生態中具高度競爭優勢於生態系統中其他生物種 (其中一考量物種數目設為 N_1), 事實上, 在自然界並無具有危及「萬物之靈」的人類生存競爭壓力之其他物種對手天敵存在下, 因此可假設 α_{21} 趨近於零, 進而可簡化改寫上述 L-V 方程式成為如下二微分方程式:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \Big(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1}\Big) = f(N_1, N_2), \tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \Big(\frac{K_2 - N_2}{K_2}\Big) = g(N_1, N_2), \tag{3}$$

由此推論滿足方程式 (1) 及 (3) 式皆為零之 4 個平衡點 (equilibrium points) 分別表為穩態 (steady states) $SS_1(0,0)$, $SS_2(K_1,0)$, $SS_3(0,K_2)$, $SS_4(K_1 - \alpha_{12}K_2, K_2)$, 其中平衡點 SS_4 則可由兩方程式 $K_1 - N_1 - \alpha_{12}N_2 = 0$ 及 $K_2 - N_2 = 0$ 同時聯立得到。若設定任何時間偏離此平衡點的偏差值為 $\Delta N_1 = N_1 - N_{10}$, 以及 $\Delta N_2 = N_2 - N_{20}$, 而 (N_{10}, N_{20}) 則為所設定觀察之平衡點, 由此可推得如下線性化 ODEs:

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 = f_{N_1}(N_{10}, N_{20})\Delta N_1 + f_{N_2}(N_{10}, N_{20})\Delta N_2, \tag{4-1}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = g_{N_1}(N_{10}, N_{20})\Delta N_1 + g_{N_2}(N_{10}, N_{20})\Delta N_2, \tag{5-1}$$

亦即是

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 = \Big\{r_1\Big(\frac{K_1 - N_{10} - \alpha_{12}N_{20}}{K_1}\Big) - \frac{r_1 N_{10}}{K_1}\Big\}\Delta N_1 - \frac{r_1\alpha_{12}N_{10}}{K_1}\Delta N_2, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = \Big\{r_2\Big(\frac{K_2 - N_{20}}{K_2}\Big) - \frac{r_2 N_{20}}{K_2}\Big\}\Delta N_2. \tag{5}$$

針對此系統微分方程組之四組平衡點可分別討論其穩定性 (stability) 如下:

(a) 針對 $SS_1(0,0)$ (亦即兩物種全數滅絕狀況), 此時 $(N_{10}, N_{20}) = (0,0)$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 = r_1 \Delta N_1, \qquad \Delta N_1 = \Delta N_{10} e^{r_1 t}, \tag{4a}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = r_2 \Delta N_2, \qquad \Delta N_2 = \Delta N_{20} e^{r_2 t}. \tag{5a}$$

由於比生長速率 r_1 及 r_2, 皆爲正值, 因此 $SS_1(0,0)$ 爲一不穩定平衡點 (unstable node), 任何時間所有位在其鄰近位置的生態條件皆會呈現出遠離此 SS_1 平衡點位置之趨勢 (亦即毫無生命現象於生態系統中是不相容的概念)。目前世界各國皆在試圖於外星球尋找一絲一毫的可能生命現象就是基於此點, 若有一絲生命跡象展示, 則可合理推論該星球可能已然具有豐富物種生物多樣性存在之先決必要條件。

(b) 針對 $SS_2(K_1,0)$ (亦即他種生物獨存, 而人類全數滅絕的狀況), 此時 $(N_{10},N_{20})=(K_1,0)$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 == -r_1\Delta N_1 - r_1\alpha_{12}\Delta N_2, \tag{4b}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = r_2\Delta N_2 \qquad\qquad \Delta N_2 = \Delta N_{20}e^{r_2 t}. \tag{5b}$$

依此推導可得

$$\Delta N_1 = \Delta N_{10}e^{-r_1 t} + \frac{r_1\alpha_{12}\Delta N_{20}}{r_1+r_2}(e^{-r_1 t} - e^{r_2 t}). \tag{4b*}$$

由於比生長速率 r_2 爲正值, 因此 $SS_2(K_1,0)$ 爲不穩定 (unstable) 平衡點 (即相平面 (phase plane) 上之鞍點; saddle point), 所有在鄰近生態位置的條件皆會具有強烈之趨勢遠離此點位置。換言之, 佔盡生存競爭優勢的人類, 若要被生態中其他物種完全取代滅絕是絕對不可能的。

(c) 針對 $SS_3(0,K_2)$ (亦即他種生物全數滅絕, 而人類獨活的窘境), 此時 $(N_{10},N_{20})=(0,K_2)$, 因此可得

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 = r_1\Big(\frac{K_1-\alpha_{12}K_2}{K_1}\Big)\Delta N_1, \qquad \Delta N_1 = \Delta N_{10}e^{r_1(1-\frac{\alpha_{12}K_2}{K_1})t}, \tag{4c}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = -r_2\Delta N_2, \qquad\qquad \Delta N_2 = \Delta N_{20}e^{-r_2 t}. \tag{5c}$$

依此可看出此平衡點之穩定與否取決於是否符合 $K_2>\frac{K_1}{\alpha_{12}}$。若滿足此條件, 則此系統會穩定收斂於 SS_3 此點, 此即是人類最終獨存於系統中的世界末日景象。反之, 若是否, 則 $K_2<\frac{K_1}{\alpha_{12}}$, 則此系統將遠離此平衡點。換言之, 假若兩物種最大生態容納數目分別是固定的 K_1 及 K_2, 他種生物遠離被滅絕命運的基本條件就是人類 (N_2) 有效放棄 (surrender) 其對他種生物 (N_1) 生存競爭壓力 (亦即是人類有效降低其對他種生物之競爭係數 α_{12}, 使得他種生物具有滿足 $K_2<\frac{K_1}{\alpha_{12}}$ 之優勢, 方可成就)。

(d) 針對 $SS_4(K_1-\alpha_{12}K_2,K_2)$ (亦即兩物種共存的結局), 此時 $(N_{10},N_{20})=(K_1-\alpha_{12}K_2,$

K_2)。

$$\frac{d}{dt}\Delta N_1 = \Big\{ -\frac{r_1(K_1-\alpha_{12}K_2)}{K_1}\Big\}\Delta N_1 - \frac{r_1\alpha_{12}(K_1-\alpha_{12}K_2)}{K_1}\Delta N_2, \tag{4d}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_2 = -r_2\Delta N_2 \qquad \Delta N_2 = \Delta N_{20}e^{-r_2 t}. \tag{5d}$$

若設定 $\varnothing = K_1 - \alpha_{12}K_2$, 則可推導得到

$$\Delta N_1 = \Delta N_{10}e^{-r_1\frac{\varnothing}{K_1}t} - \frac{r_1\alpha_{12}\varnothing\Delta N_{20}}{\varnothing r_1 - r_2 K_1}(e^{-r_2 t} - e^{-r_1\frac{\varnothing}{K_1}t}). \tag{4d*}$$

依此可看出此兩物種共存平衡點之穩定與否取決於是否 $\frac{r_1}{K_1}\varnothing = \frac{r_1}{K_1}(K_1-\alpha_{12}K_2) > 0$, 亦即是否 $K_2 < \frac{K_1}{\alpha_{12}}$。若滿足此條件, 則此系統會穩定收斂於此平衡點, 亦即是人類與其他物種共存於系統中。反之, 若是否, 則 $K_2 > \frac{K_1}{\alpha_{12}}$, 則此系統將遠離此平衡點。亦即是說人類要與他種生物和平共存的基本條件就是人類 (N_2) 要有效放棄其對他種生物 (N_1) 生存優勢競爭壓力 (亦即是人類有效降低其對系統中他種生物之競爭係數 α_{12}, 使得 $K_2 < \frac{K_1}{\alpha_{12}}$ 方可成就)。

經過以上分析可知, 事實上, 整個生態系統僅有兩個穩定平衡點會確實長期穩定存在, 亦即是當 $K_2 > \frac{K_1}{\alpha_{12}}$, 則此系統將收斂在平衡點 $SS_3(0, K_2)$ (亦即他種生物全數滅絕, 而人類最終獨活於世的窘境)。反之, 若滿足 $K_2 < \frac{K_1}{\alpha_{12}}$, 此系統將會穩定收斂於人類與其他物種同榮共存的平衡點 $SS_4(K_1-\alpha_{12}K_2, K_2)$ (亦即兩物種共存的結局)。換言之, 人類要與其他物種和平共存於生態系統中, 完全取決於人類對其他物種構成的生存競爭壓力係數 α_{12} 的大小。當人類發揮利他主義 (或說是手下留情或「刀下留生」), 大幅下降 α_{12} 的大小至滿足 $K_2 < \frac{K_1}{\alpha_{12}}$, 此時 L-V 生態模型可稱之爲「慈悲方程式」。事實上, 即使當人類完全放棄對其他物種之生存競爭壓力 (亦即 $\lim_{\alpha_{12}\to 0}(K_1-\alpha_{12}K_2) = K_1$), 讓其他物種生存容量達到極大化, 亦不致於改變影響到對人類生存容量, 這更是完全非零和合作賽局圓滿結果。反之, 若人類不願釋放出同理心及無私誠意, 仍執迷不悟地採取利己主義 (毫不留情耗盡資源爲己所用), 如此依然採取 $K_2 > \frac{K_1}{\alpha_{12}}$ 的態度來對待其他物種, 勢必招致他種生物滅絕的最終結局 $\lim_{t\to\infty} N_1 = 0$ (切記：無單一物種能獨活於需要各種多樣化生物物種來提供彼此所需資源的世界中, 人類若是獨活於世, 更是最終自取滅亡的同義字)。就民族學來看, 當人類或是優勢民族剝奪弱勢擁有資源來獨享 (甚至於進行極不人道之種族毀滅), 亦即是將自身的 K_2 無限上綱到超過世界上任一其他物種及弱勢民族競爭能力, 將即是加速其他物種及民族全數滅絕的到來。反之, 優勢物種或是民族願意釋放出其利益, 真心誠意來扶持弱勢者的適應生態環境競爭能力, 亦即有效降低 α_{12}, 或是甚至於慷慨加大提高 K_1 值, 此皆是符合「道德本體應有幫助他人的義務」利他主義精神之具體實踐, 更是發揮親社會行爲之人本精神, 這才會是利他主義對生態系統呈現的最佳化貢獻之物種和平共存互惠解。人類應當選擇於「萬物之靈」之角色上與其他物種共榮共存 (亦即最終走向穩定平衡點)：$SS_4(K_1-\alpha_{12}K_2, K_2)$ (亦即兩物種共存的結局), 而非選擇「萬物之魔」來享盡所有有

限資源, 直至最終眼見其他各物種先後陸陸續續在人類眼前一一盡在地球村中煙消雲散後, 走向人類獨存之窮途末路 (亦即 $SS_3(0,K_2)$ (亦即他種生物全數滅絕, 而人類獨活的窘境)。人類是要選擇釋放出利益來爲其他物種或是民族「買義」(一如馮諼爲孟嘗君於薛地買義一般), 成爲利他主義者, 抑或是要享盡所有一切資源揮霍殆盡, 成爲道道地地殘酷不仁的絕對利己主義者, 此皆可由上述 L-V 方程式道述出來,「人之所以爲人」之人本精神亦皆可由此方程式中解碼出來。「慈悲方程式」抑或是「殘酷方程式」的選擇全在於人類或是優勢民族所做的大我明智抉擇來決定參數值 α_{12}, 因爲大慈大悲才是人類或是優勢民族永續與其他物種或是民族共榮共存的唯一解。「萬物之靈」的人類要記住「道德本體有幫助他人之義務」是本分應盡管理世界生態的職責, 唯有如此才能永續友善地經營這綠色地球村。否則一味依據競爭排斥原理 (competitive exclusion principle)[4], 遵循「優勝劣敗, 適者生存」, 世界勢必是走向最悲慘結局。這就是人之所以爲人, 爲萬物之靈的真實人文景觀價值。在此 L-V 生態模型推論中更可反映出何以在進化遺傳學中, 利他行爲更被特別定義爲「增加他人的生存, 減少自己的生存」的大愛表現(詳見維基百科「利他主義」)。最後僅以珍古德博士所說的話來做結語。

> "*Only if we understand, will we care. Only if we care, will we help. Only if we help, shall all be saved.*"....... Jane Goodall

致謝: 感謝教育部教學實踐研究計畫 (PEE1100793) 及科技部計畫 (MOST 109-2221-E-197-016-MY3) 之經費補助, 更感謝藉由此計畫執行過程中能得力於國立宜蘭大學教學發展中心的夥伴們持續協助及鼓勵, 以及校方教師社群計畫支助協助能連結跨校與人文社會學專業教授們 (玄奘大學社會工作系王敏菱、中國文化大學心理輔導學系陳柏霖、玄奘大學藝術設計學院王振邦、台東大學生命科學系黃祥恩、國立東華大學教育與潛能開發學系張德勝等位教授) 有腦力激盪實質交流, 方有如此人文關懷素養研究的啟蒙思維。並將此文獻給在天上筆者的指導教授台大化工系黃世佑教授及美國加州大學爾灣分校 Professor Henry C. Lim。

参考文獻

1. B. Y. Chen, *Revealing characteristics of mixed consortia for azo dye decolorization: Lotka-Volterra model and game theory*, Journal of Hazardous Materials 149, 508-514, 2007.
2. N. J. Gotelli, Chapter 5 Competition, In: *A Primer of Ecology*, Sinauer Association Inc., Sunderland, MA, USA, pp. 111-138, 1995.
3. P. J. Morin, Chapter 10 Competition: mechanisms, models, and niches, In: *Community Ecology*, Blackwell Science Inc., Malden, MA, USA, pp.29-66, 1999.
4. G. F. Gause, Competitive Exclusion Principle. *Science* 131, 1292-1297, 1960.

—本文作者陳博彥任教於國立宜蘭大學化學工程與材料工程學系—