數學傳播 46卷1期, pp. 3-20

Felix Klein (1849∼1925)

康明昌

1. 建設世界一流的數學中心

1885 年 Felix Klein (1849∼1925) 在萊比錫大學 (Univ. of Leipzig) 擔任教授已經將近六年。這年秋天, 他接到哥廷根大學 (Univ. of Göttingen) 的邀請函, 邀請他到哥廷根任教。Klein 提出一個條件。

原來 Klein 在 Leipzig 大學推動一項改革：他把數學圖書館改成開放式的管理。使用者不必填寫借書條, 他可以自行到書庫取書, 然後由圖書館人員登記, 就完成借書手續。

Klein 希望 Göttingen 大學圖書館能夠比照 Leipzig 大學的管理方式。在 Klein 到 Göttingen 就任之前, Göttingen 大學的數學圖書館重新裝潢設計, 並附設一間閱覽室, 以符合 Klein 的條件 [7, p.4]。

Göttingen 是 Klein 舊遊之地, 他在這裡做 Habilitation (1871 年)。他受知於 Göttingen 大學的教授 Alfred Clebsch (1833∼1872), 才能夠在 23 歲就受聘爲 Erlangen 大學教授 (註1)。

Klein 此行到 Göttingen 懷著一個夢想, 他要在 Göttingen 大學建設一個世界一流的數學中心, 乃至於一個世界一流的科學中心 (註2)。

Göttingen 大學正式的名稱叫做 Georg-August-Universität, 成立於 1737 年。Göttingen 位於今日德國中部。它早期隸屬於 Hanover 選侯國與 Hanover 王國; Hanover 在德文寫成 Hannover。Hanover 選侯國在拿破崙席捲歐洲各國的狂飆時亡國, 維也納會議時 Hanover 選侯國復國, 還昇格爲王國：Hanover 王國。

1866 年普奧戰爭, 普魯士突然出兵 Hanover 王國, 從此 Hanover 變成普魯士的一部分。普魯士王國在 1871 年改稱德意志第二帝國, 習稱德國 (註3)。

Göttingen 大學是偉大的 Carl Friedrich Gauss (1777∼1855) 求學與工作的地方。Gauss不喜歡教書, 不過他仍然有幾個博士班學生 ：Bessel (1810年博士), Gerling (1812年博士), Stern (1829年博士), Riemann (1851年博士), Dedekind (1852年博士)。Bessel, Riemann, Dedekind 都是大名鼎鼎的學者。Gerling 有一個學生 Plücker, 而 Plücker 正是 Klein 的老師。Stern 教過 Riemann, 他與 Riemann 在 1859 年同時被聘爲教授 [21], 從此

Göttingen 大學有兩位數學教授。

Hanover 政府在 1850 年爲了培養數學與物理教師成立數學與物理研習會 (Math.-Physics Seminar), 這個研習會在 1922 年轉型爲 Göttingen 大學的數學系。

Gauss 去世之後, 他的職位由柏林大學教授 Lejeune Dirichlet (1815∼1859) 繼承。Dirichlet 在位僅四年就去世。1859 年 G. F. Bernhard Riemann (1826∼1866) 與 Moritz A. Stern (1807∼1890) 同時被聘爲教授。Stern 是 Gauss 的學生, 據說是很稱職的教師。三年後 Riemann 染上肺結核, 此後大部分時間都在義大利療養。Stern 在 1885 年退休。

1866 年 Riemann 去世, 接著 Hanover 被併呑, 柏林大學的聲勢日益高漲, Göttingen 大學因爲 Dirichlet, Riemann, Clebsch, Fuchs 在位期間短促, 其學術發展不免受到影響 [26]。Fuchs 這個名字在本文下一節將會出現。

2. Göttingen 的數學教授

1855 年 E. Kummer (1810∼1893) 與L. Kronecker (1823∼1891) 到柏林大學工作, 次年 K. Weierstrass (1815∼1897) 也來柏林大學。Kronecker出身銀行世家, 家境富裕, 因此不尋找教職謀生; 因爲他是柏林科學院士, 有資格在柏林大學開課並參加各種學術活動。直到 1884 年 Kummer 退休後, Kronecker 才擔任柏林大學的教授。柏林大學成爲當時德國最先有三個數學教授的大學： Weierstrass, Kronecker, Fuchs [3, p.66, p.77]。

Kummer 的研究領域是數論 (regular prime numbers, decomposition of ideals in a Dedekind domain) 與 Kummer surfaces。Weierstrass 是分析與橢圓函數 (雙週期函數) 的大師, Kronecker 是代數與類體論的權威。1850∼1890 年代是柏林大學數學的高峰時期。

Riemann 在 1866 年去世, Göttingen 大學只剩下 Stern 一個數學教授。兩年後, Riemann 的職位由 Alfred Clebsch (1833∼1872) 繼任。

Clebsch 的專長是代數幾何與不變量理論, 尤其是 abelian functions (註4)。Clebsch 在 Giessen 大學任教期間 (1863∼1868) 吸引許多學生 (追隨者), 如： Paul Gordan, Alexander Brill, Max Noether, F. Lindemann, Jacob Lüroth。日後 Max Noether 沿著 Clebsch 指出的方向研究代數曲面, 對於義大利代數幾何學者有很大的影響。

Crelle 在 1826 年創辦 *Crelle's Journal*, 這份期刊後來由柏林大學的人擔任主編 (Borcherds 與 Kronecker)。1869 年 Clebsch 與 Carl Neumann (Leipzig 大學) 共同創辦 *Mathmatische Annalen*, 顯然是向 *Crelle's Journal* 叫陣。

1872 年 Clebsch 不幸感染白喉去世。他的職位由 Lazarus Fuchs (1833∼1902) 接任。Fuchs 在位只有一年 (1874∼1875) 就轉到 Heidelberg 大學任教, 因爲他喜歡 Heidelberg 附近的自然景觀。

Fuchs 留下的職缺由 Hermann Schwarz (1843∼1921) 繼任。1885 年 Stern 退休, 這

使得 Klein 有機會到 Göttingen 大學。

Fuchs 與 Schwarz 出身柏林大學, 他們分別是 Kummer 與 Weierstrass 的學生。在他們的老師退休時 (1884 年與 1892 年) 都被邀請回柏林大學任教。

Fuchs 這個名字在本文第 6 節與第 7 節還會出現 : Fuchs 群 (Fuchsian group) 與 Fuchs 函數 (Fuchsian function)。Schwarz 的名字在複變函數的課本出現過 (Schwarz Lemma)。Schwarz 是 Kummer 的女婿。

Schwarz 離開 Göttingen 之後, 他留下來的空缺由 Heinrich Weber (1842~1913) 填補。Weber 與 R. Dedekind (1831~1916) 是 Riemann 全集的主編 (1876年出版)。他是一個數論學者 (Kronecker-Weber 定理)。Dedekind-Weber 定理把代數數論裡面 ideal theory 的方法引入代數曲線的研究, 成爲交換代數的先河。

Weber 在 Königsberg 大學任教時 (1875~1880), Hilbert 與 Minkowski 剛好是那裡的學生。

1895 年 Weber 離開 Göttingen 大學, 到 Strassboug 大學, 因爲他有一個女兒住在 Strassboug。Weber 在 Strassboug 工作時有一個學生 F. W. Levi, 他後來流亡到印度十多年, 並曾在 TIFR 工作過 [18, p.17, 註11]。

Klein 把 Weber 留下來的職位聘請 David Hilbert。Hilbert 正值壯年 (33歲), 剛解決不變量理論的 Gordan 問題, 儼然是德國代數學界的明日之星。第二年他受德國數學會 (DMV) 委託寫的數論報告 (Zahlbericht) 出版, 這本報告把代數數論的結果重新組織並提出新的研究方向。1899 年 Hilbert 出版《*Foundation of Geometry*》, 用新的觀點探討初等幾何。

在 ICM Paris (1900年) 的演講, Hilbert 提出 23 個尚待解決的問題, 成爲二十世紀許多數學活動的焦點。不過二十世紀新誕生的不少數學分支 (如 : 表示論、動力系統、有限單群、測度論等) 跟 Hilbert 問題沒有任何關係。

Hilbert 是個純數學家, Klein 是強調數學、物理與應用科學 (航太科技、電機) 密切聯繫的人。Hilbert 專心於學術研究, Klein 像個不務正業的「無事忙」, 一天到晚只忙著媒合數學界、科學界與工程界。但是 Klein 與 Hilbert 兩人卻配合得十分好。

Göttingen 的學生流傳一個訊息 : Göttingen 大學的數學家有兩種人, 一種是做他喜歡做的事, 但是 Klein 不喜歡的事; 另一種人是做 Klein 喜歡的事, 但是他本人不樂意的事。Klein 不屬於以上兩種人, 所以 Klein 不是數學家 [24, p.88-89]。

3. Klein 的學習之旅

Klein 出生於 Düsseldorf, 他的父親是當時的市長秘書。1865 年 ~1868 年 Klein 在 Bonn 大學就讀, 他跟隨 Julius Plücker (1801~1868) 學習。

Plücker 是個幾何學者, 專長是 line complex (註5), 同時也做實驗物理方面的研究。

十九世紀初期射影幾何學者, 依其是否使用座標方法, 分成綜合幾何學者與解析幾何學者。兩派學者壁壘分明, 柏林大學的 J. Steiner (1796∼1863) 是綜合幾何的領導人, 他鼓吹 pure geometry, 強調幾何直觀。而 Plücker 剛好是解析幾何學者。Steiner 個性暴烈易怒, Plücker 被他壓制多年 [22, p.156]。Steiner 終生是個副教授, 無法提昇爲教授, 因爲當時柏林大學只有兩個數學教授講座的名額 (Jacobi 與 Dirichlet)。

Plücker 把他在 line complex 的研究成果寫成兩本書, 第一本書出版不久, 他就去世 (1968 年 5 月)。Clebsch 只好把第二本書的編輯整理委託 Klein 來完成; Klein 也必須改變博士論文的指導教授, 他選擇 Bonn 大學另一個數學教授 Rudolf Lipschitz (1832∼1913)。高等微積分課本裡面的 Lipschitz condition 就是這個 Lipschitz。

1868 年 12 月 Klein 通過博士論文口試, 他的博士論文是與 line complex 有關的 [22, p.161]。

博士論文口試之後, Klein 到 Göttingen 大學追隨 Clebsch, 工作了八個月。

1869/1870 年的冬天他到 Berlin 大學參加 Kummer, Weierstrass, Kronecker 的研討會, 並旁聽一些課程。柏林大學是這時候德國數學家朝聖的殿堂。Klein 的「同學」有 : Cantor (集合論的開創者), Frobenius (微分方程, 有限群表示論), Killing [16, p.18], Mittag-Leffler。在這群人之間, Klein 顯然不是特別突出 [14, p.221]。

在柏林大學 Klein 結識 Sophus Lie (1842∼1899), Lie 是來自挪威的留學生, 尚未取得博士學位。Klein 與 Lie 都喜歡幾何, 很快地他們成爲好朋友。

1870 年春天 Klein 與 Lie 結伴到巴黎。這時 Camille Jordan (1838∼1922) 剛好完成他的鉅著 (《群論與代數方程》), 他們適時地學會群的概念, 並把它應用到幾何的研究 (Klein and Lie, Comptes rendus 70 (1870), 1222-1226)。

普法戰爭爆發之後, Klein 立即回國並受徵召到軍中服役。1871 年 Klein 在 Göttingen 大學做 Habilitation, 並被 Göttingen 大學聘爲講師 (Privatdozent)。1872 年他被 Erlangen 大學聘爲教授。

Klein 在普法戰爭服役時認識一個朋友 Friedrich Althoff (1839∼1908)。這個人後來在普魯士教育部主管高等教育業務, 在各大學教授調動與各大學研究單位的核准與否有最後決定權。他對於 Klein 的事業顯然助益良多。

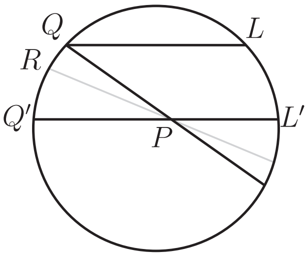
4. 非歐幾何

非歐幾何的理論在十九世紀三十年代已經建立 (Gauss, N. I. Lobachevsky, and János Bolyai), 但是歐基里德幾何的影響根深蒂固, 大部分數學家很難想像存在與歐氏幾何第五公設 (過線外一點可作唯一的平行線) 違反的幾何空間。大家總是懷疑非歐幾何的理論推導在什麼地方出錯。

1869 年 Klein 提出一個非歐平面掃除這個疑慮。

設 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 是歐氏平面的單位圓內部所有點的集合。令 KD 是 Klein 非歐平面, KD 所有點的集合與 D 的點集一致, 也就是 $KD=D$。規定 KD 上面的直線是圓 D 上所有的弦 (不含端點, 因爲端點不屬於 D), KD 上相異兩直線 L 與 L' 稱爲平行如果 $L\cap L'=\emptyset$。

設 L 是 KD 的直線, $P\in KD\backslash L$。在歐氏平面作一弦 L' 與 L 平行。則通過 P 可作無限條 (非歐) 直線與L 平行。證明如下。



不妨假設 L 在 L' 上方, Q 與 Q' 是 L 與 L' 在同一側的端點 (如圖), 則 $Q,Q'\notin KD$。若 R 是弧 $(\overparen{QQ'})$ (逆時針方向) 上任一點, 則 R 與 P 的連線是一條非歐直線且平行於 L。

這個例子稱爲 Klein model, 它利用歐氏幾何建立一個非歐平面 : 如果非歐幾何的理論有錯誤, 那麼歐氏幾何也會有錯誤。Klein model 也稱爲 Beltrami-Klein model 或 Cayley-Klein model [8]。

Klein 在 1872~1875 擔任 Erlangen 大學教授。他的教授就職演講主題是數學教育的目的。不過 Erlangen 大學額外要求, 除了就職演講之外, 每個新任教授還要提交一份 Programmsschrift (研究方向報告書)。Klein 主張他要利用群的概念對各種幾何空間加以分類 [8, p.961]。這就是所謂的 Erlangen program (註6)。

十九世紀出現各種幾何空間, 如 : 射影幾何、仿射幾何。每一個幾何空間都有其對稱群, 例如 : n 維射影空間的對稱群是 $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$, n維仿射空間的對稱群是 $\mathbb{R}^n\rtimes GL_n(\mathbb{R})$, 其中 $\mathbb{R}^n$ 是平行移動群; n 維歐氏空間的對稱群是 $\mathbb{R}^n\rtimes O_n(\mathbb{R})$。

Erlangen program 聲稱, 區別各種幾何空間的關鍵就在研究這些空間在其對稱群作用之下保持不變的性質。

Erlangen 大學並沒有很多學數學的學生。Klein 的前任 A. F. Möbius (1790~1868, Möbius transformations, Möbius band) 是一個講課枯燥無味的老師, 自然吸引不了學生。Klein 卻是一個好老師, 可是他第一次上課只有兩個學生, 其中一個在第二次上課就不來了, 另一個偶爾來幾次 [14, p.222]。

不過 Klein 在 Erlangen 大學還是有收穫。1875 年 Klein 與 16 歲的 Anna Hegel 結婚, Anna 的祖父是鼎鼎有名的哲學家 G. W. F. Hegel (1770~1831), 柏林大學教授, 1831 年因爲霍亂去世, 去世時是柏林大學校長。

1875 年 Klein 接受慕尼黑 (Munich, 德文寫爲 München) Technische Hochschule 的邀請, 離開 Erlangen, 到 Munich 一待就是五年 (1875~1880)。這五年卻是 Klein 研究生涯的高峰。

5. Klein 在慕尼黑

慕尼黑的 Technische Hochschule 並不是慕尼黑大學, 它只是一所高級工專, 可是 Klein 在這所工專講授的 (理論) 數學的課程卻吸引外校一些資質很高的學生, 如 : A. Hurwitz (1859～1919) 是慕尼黑大學與柏林大學的學生, W. von Dyck (1856～1934) 是柏林大學的博士, 在慕尼黑大學工作。Klein 在 1880 獲聘爲 Leipzig 大學教授, 他們都跟著到 Leipzig, Hurwitz 在 Klein 的指導之下完成博士論文, von Dyck 成爲 Klein 的助手。

比較特別的是義大利學生 G. Ricci-Curbastro (1853～1925), 日後他以 Ricci curvature 聞名。Ricci-Curbastro 原來在義大利學習, 1877～1878 年他得到義大利政府的獎學金到德國留學。他沒有受到 Klein 太大的影響, 他只是喜歡 Klein 教書的方式與內容, 影響他較大的是 Riemann, Christoffel (Strassboug 大學) 與 Lipschitz (見本文第3節)。

Klein 在 1876 年獲聘擔任 *Math. Annalen* 的編輯, 後來成爲主編, 他努力尋求非歐幾何、函數論、群論、集合論的稿件, 使 *Math. Annalen* 的聲望與受歡迎的程度直追柏林大學掌控的 *Crelle's Journal* 。

Klein 在慕尼黑 Technische Hochschule 有一個同事 A. Brill (見本文第 2 節) 是當年 Clebsch 的追隨者之一, 他與 Klein 建立一個實驗室, 製造三度空間一些曲面的模型, 行銷到世界各地的圖書館。

在 1875 年 ～1880 年這五年 Klein 可說是研究成果豐碩, 他在 1880 年離開慕尼黑時已經累積了 70 多篇論文。

Klein 在 Erlangen 大學任教時, 每門課的學生都不超過 7 人 [22, p.170], 可是他在慕尼黑的第一堂課 (「解析幾何」), 大講堂坐滿超過 200 個學生。1880 年 Leipzig 大學邀請 Klein 擔任教授, 他當然樂得就此解除大班教學的噩夢。

Klein 在萊比錫待了 6 年 (1880年～1885年), 這六年並不平靜。因爲他在 1882 年與法國數學家 Henri Poincaré (1854～1912) 競爭單值化定理 (uniformization theorem) 的證明, 體力過度耗損, 導致他從 1883 年開始除了寫書 (Klein-Fricke, 正十二面體, $\cdots$) 與數學教育之外, 再也無法從事重大的研究課題 [8, p.961], 此後他就以組織者與行政管理工作者的角色出現於數學舞台。Poincaré 的生平見 [16, p.9]。

6. 單值化定理

若 $f(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ 是不可約多項式, 且 $f(x,y)=0$ 定義一個虧格 ≥ 1 的緊緻黎曼面, 把 x 看做 y 的函數 (滿足 $f(x,y)=0$)。例如, 當 $f(x,y)=x^3+y^3+1=0$, 令 $y=b\in\mathbb{C}$, 則 x 有 $x_1,x_2,\ldots,x_{n(b)}$ 個解 ($n(b)$ 是與 b 有關的整數)。因此, $b\mapsto\{x_1,x_2,\ldots,x_n(b)\}$ 是一個一對 $n(b)$ 的「函數」。同樣的 y 也可以看成 x 的多值函數。問題 : 是否存在 (單值的非

常數) 亞純函數 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ 滿足 $f(\varphi(z),\phi(z))=0$? 這就是單值化問題 (uniformization problem)。

黎曼 (B. Riemann, 1826~1866) 在 1860 年代研究黎曼面, 他留下一些具體的虧格 ≥ 1 的黎曼面, 都顯示單值化問題的答案有可能是肯定的。

例題1. 虧格爲 1 的黎曼面可以用 $f(x,y)=y^2-x^3-ax-b$ 來定義 (其中 $x_3+ax+b=0$ 沒有重根)。則可以找到 $\Lambda:=\mathbb{Z}w_1+\mathbb{Z}w_2$ ($w_1,w_2\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 且滿足 w_1/w_2 不爲實數) 與週期爲 Λ 的雙週期函數 $\varphi(z)$ 與 $\phi(z)$ 滿足 $f(\varphi(z),\phi(z))=0$。

例題2. 在二維射影平面中, 四次曲線 $X^3Y+Y^3X+Z^3X=0$, 定義 $f(x,y):=x^3y+y^3x+x$ (其中 $x=X/Z$, $y=Y/Z$), 這是虧格3的黎曼面, Klein 證明它可以單值化 [28, p. xxvii]。

Poincaré 在 1882 年證明以下定理

定理1. (**Poincaré**, *Acta Math.*, 1882). 若 $f(x,y)=0$ 定義一個虧格 ≥ 1 的黎曼面 X, 則 X 可以單值化; 也就是, 存在亞純函數 $\varphi,\phi: X\to\mathbb{C}$, φ 與 ϕ 都不是常數函數, 且滿足 $f(\varphi(z),\phi(z))=0$, $\forall\, z\in X$。

事後檢討 Poincaré (與 Klein) 的證明是有瑕疵的 [28, p. xxix]。Hilbert 在 1900 年把單值化問題列爲 Hilbert 第 22 問題, 希望有人推廣定理 1 的結果與方法 [30, p.165-166]。

Hilbert 第 22 題在 1907 年被 Poincaré 與 Paul Koebe (1882~1945) 解決。Poincaré 論文的原稿在 1906 年寄到 *Acta Math.* 的編輯部, Koebe 則搶在 Poincaré 的論文出版之前宣布結果。

定理2. 若 X 是單連通的黎曼面, 則 X 是解析同構 (biholomorphic) 於 : 複平面 $\mathbb{C}$, 黎曼球面 $\hat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 上半平面 $\mathbb{H}:=\{z=x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{C}: x,y\in\mathbb{R}$ 且 $y>0\}$。

定理3. **(Koebe).** 設 X 是黎曼面, U 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 的連通開集, 則 X 與 U 是拓樸等價的充份必要條件是他們是解析等價。

定義1. **上半平面 $\mathbb{H}$ 的非歐平面結構**

令 $\mathbb{H}=\{z=x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{C}: x,y\in\mathbb{R}$ 且 $y>0\}$。群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 作用於 $\mathbb{H}$ 如下 :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$
$$\left(\sigma=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}, z\right)\mapsto \sigma\cdot z=(az+b)/(cz+d).$$

$\mathbb{H}$ 的非歐幾何結構：

- 直線 (測地線)：垂直於 x 軸的半直線, 或圓心在 x 軸的半圓周 (取開集, 因爲端點不屬於 $\mathbb{H}$)。
- 雙曲直線度量 $ds := \sqrt{dx^2 + dy^2}/y$,
- 雙曲面積度量 $dv := dxdx/y^2$.

可以檢查, 當 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 作用於 $\mathbb{H}$ 且 $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, σ 把 (雙曲) 直線送到 (雙曲) 直線。

定義2. **變換群**

設 G 是拓樸群, X 是 Hausdorff 拓樸空間, 且 G 作用 X, $G \times X \to X$, $(\sigma, x) \mapsto \sigma \cdot x$。群 G 作用於 X 稱爲純不連續 (properly discontinuous), 如果對於 X 的任意緊緻子集 A, $\sigma(A) \cap A = \emptyset$, $\forall\, \sigma \in G \backslash G_0$, 其中 G_0 是 G 的某個有限子集 (與 A 有關)。

群 G 作用於 X 稱爲自由作用 (free action), 如果 X 沒有固定點, 也就是, 令 $X' := \{x \in X,\ \sigma \cdot x = x,\ \forall\, \sigma \in G\}$, 則 $X' = \emptyset$。

若群 G 以純不連續方式作用於 X, 如果 X 是黎曼面, 則 X/G 也可以變成黎曼面, 且 $X \to X/G$ 是分歧覆蓋 (ramified covering)。如果進一步要求 G 自由作用於 X, 則 $X \to X/G$ 是非分歧覆蓋 (unramified covering); 當 X 是單連通黎曼面, 這時 G 變成 X/G 的基本群。見 [4, p.565-566]。

定義3. **Fuchsian groups 與 Fuchsian functions (automorphic functions)**

若 G 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的子群, 且 G 以純不連續方式作用於上半平面 $\mathbb{H}$, 則 G 叫做一個 Fuchsian group。

若 G 是 Fuchsian group 且 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是亞純函數滿足 $F(\sigma \cdot z) = F(z)$, $\forall\, \sigma \in G$, $\forall\, z \in \mathbb{H}$, 則 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 叫做 Fuchsian function。

Fuchsian function 也叫做 automorphic function (自守函數), 這個名稱似乎在 Klein 的一篇論文 (1890 年) 第一次出現。在這之前, Klein 拒絕使用 Fuchsian function 的名稱, 他把這個函數叫做 Hauptkreissgruppe (principal-circle-group)。Fuchs 出身自柏林大學 (見本文第2節), 任教於 Göttingen 大學 (1874∼1875), Heidelborg 大學 (1875∼1884), 柏林大學 (1884∼1902)。Klein 對於 Fuchs 自然有一種負面情緒 (仇視?) [26]。

7. Fuchs 函數 (Fuchsian functions)

1880 年 5 月 Fuchs 在 *Crelle J.* 發表一篇文章, 他考慮二階微分方程

$$d^2y/dx^2 + P(x)dy/dx + Q(x)y = 0,$$

其中 $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}(x)$。

他選取兩個解 $g_1(x)$, $g_2(x)$, 其中 $g_1(x)$ 與 $g_2(x)$ 是線性獨立的。定義

$$z = g_1(x)/g_2(x)。$$

x 可以看成 z 的多值函數。在適當條件下, x 變成 z 的亞純函數, i.e. $x = F(z)$。這豈不是與橢圓函數十分類似 (Abel 從橢圓積分到橢圓函數的過程)?

Poincaré 把這種函數叫做 Fuchs 函數。

他進一步證明, 在特定情況下, 存在 Fuchsian 群 G, 使得 $F(\sigma \cdot z) = F(z)$, $\forall \sigma \in G$, 其中 $x = F(z)$。

Poincaré 想知道, 除了由微分方程產生的 Fuchs 函數之外, 是否還有別的 Fuchs 函數?

從 1880 年 5 月底到 6 月, Poincaré 工作了兩個星期, 一直沒有進展。有一天晚上他違反往日的習慣, 喝了一杯黑咖啡。當夜他無法入睡, 各種念頭 (方法) 如潮水一般湧來, 互相激盪衝撞, 直到兩種方法纏繞在一起。第二天早晨, 他寫下一組新的 Fuchs 函數 [9, p.61-62], [14, p.307-308]。

當時 Poincaré 在 Caen 大學任教。1880 年 6 月中旬他從 Caen 到另一個城市 (Coutances), 旅行使 Poincaré 暫時忘掉數學研究。當他抵達 Coutances, 準備登上公共汽車, 就在他把腳踏上公車, 一個念頭立即閃過來：定義新的 Fuchsian 函數的變換方法不是與非歐幾何 (第 6 節定義 1) 的變換方法一樣嗎? (見 [9, p.62], [14, p.308]) 難道這又是「潛意識」再次發揮作用嗎?

1880 年 6 月 12 日他寫信給 Fuchs, 請他同意 (Poincaré) 把這些函數叫做 Fuchs 函數 (第 6 節定義 3)。得到 Fuchs 的同意, 他在 1880 年 6 月 19 日回信致謝, 並且告訴 Fuchs 他已經找到更多的 Fuchs 函數 [9, p.62]。

1881 年 Poincaré 在巴黎科學院的刊物 *Comptes rendus* 發表三篇論文 (之後還有別的), 宣布他在 Fuchs 函數的研究成果。

Klein 在 1881 年 6 月 11 日看到這三篇論文, 次日就寫信給 Poincaré, 從此開展了兩人長達 15 個月總共 26 封信的通信往來, 最後一封信是 Poincaré 在 1882 年 9 月 22 日寫的。

8. Klein 與 Poincaré 的通信

Klein 對於 Poincaré 宣布的定理深表驚異, 對於 Poincaré 在數學文獻的無知也深表驚異。

Klein 比 Poincaré 年長 5 歲, 通信時 Klein 已經是名滿德國的教授, *Math. Annalen* 的主編, Poincaré 只是法國西北部小城 Caen 的大學教師, 第二年他才轉到巴黎大學擔任講師。

Klein 堅決反對 Poincaré 使用 Fuchsian functions 這個名稱。他說, 這種函數在 Schwarz

(見本文第 2 節) 或 Klein 本人的論文早就出現過, 並且 Fuchs 並沒有證明週期性 ($F(\sigma\cdot z) = F(z)$, $\forall\,\sigma \in G$)。另一方面, Klein 非常驚奇 Poincaré 對於黎曼面的理論 (principles of Riemann) 竟然毫無所知。

Poincaré 毫不退讓。他表示, 如果他早一點知道 Schwarz 的論文, 他可能會把它命名爲 Schwarz 函數。另一方面, 他是經由 Fuchs 的論文才開始研究這種函數。這樣命名並無不妥。

Poincaré 在第 6 封信 (1881 年 6 月 27 日) 明白指出, 他不能賦予這種函數 Fuchsian functions 的名字, 然後再把它取消。這將置 Fuchs 於何地?

Klein 卻緊咬著 Fuchsian function 這個爭論不放, 直到 Klein 的第 18 封信 (1882 年 4 月 3 日), Klein 主動提出分道揚鑣的建議：兩個人分別以個人的名義發表論文。Poincaré 回答「樂於從命」, 並且引用哥德 (Goethe) 的詩句, 抒發他的感慨：

“*Name ist Schall und Rauch.*

(A name is just noise and smoke. 《浮士德》)”

就在 Klein 這封分手的信寫完之前幾天, 1882 年 3 月 29 日 Mittag-Leffler 寫信給 Poincaré, 告訴 Poincaré, 他將創辦一份新的數學雜誌, *Acta Mathematica*, 並指名希望刊登 Poincaré 在 Fuchsian functions 的論文全文 [9, p.68]。Poincaré 很快地把論文的第一部分寄出, Mittag-Leffler 的回函在 1882 年 4 月 10 日寄出 (註7)。

除了 Fuchsian function 的名詞之爭, Klein 與 Poincaré 的通信倒是很友善。Klein 很盡責地提供有關黎曼面與單值化問題的各種文獻。

1881 年 12 月 4 日 Klein 邀請 Poincaré 爲 *Math. Annalen* 撰寫一篇有關 Fuchsian functions 的綜合敘述性的文章 (survey paper, 約 16 頁), 這篇文章登在 *Math. Annalen* 19(1882), 553-564。文章之後附有一篇 Klein 自己寫的短文, 說明他反對使用 Fuchsian functions 這個名稱的理由。Fuchs 看到之後, 也寫一篇短文登在 *Göttingen Nachrichten*。

1882 年 9 月, Mittag-Leffler 終於告訴 Klein, Poincaré 的論文將在 *Acta Math.* 的創刊號刊登 (Klein 給 Poincaré 在 1882 年 9 月 19 日的信)。

Poincaré 在回信描述這篇論文的內容。它分成5個部分 [29], 前三個部分在 1882 年刊登, 後兩個部分在 1883 年刊登。第一部分是 Fuchs 群, 第二部分是 Fuchs 函數, 第三部分是 Klein 群與 Klein 函數 (註 8)。第四部份是單值化定理, 第五部分是二階微分方程的應用。

這些通信總共有 26 封信。*Acta Math.* 在 1923 年四十週年紀念時刊登全部信件, Klein 的信是德文的, Poincaré 的信是法文的。Poincaré 的孫子 François Poincaré 把 Klein 的德文信翻譯成法文, 連同 Poincaré 的法文信重刊於 *Cahiers du séminaire d'histoire des math.* (1989年)。全部翻譯成英文的信件可在 [28, p.385-414] 找到。

9. Klein 的再起

1882 年 5 月中旬前後, Klein 深入地探討單值化定理的證明。在接下來的幾個月, 他在 Leipzig 大學組織一系列的演講, 由 Eduard Study (1862~1930) 作記錄 (Study 這時只是大學部的學生, 尚未取得博士學位)。這份記錄,《*Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie*》, 在 1882 年 10 月定稿, 在 11 月底寄出, 趕在 Poincaré 的文章在 12 月的 *Acta Math.* 刊登之前 (註9) [22, p.185]。

Klein 在寫出《*Neue Beiträge*》時, 體力與心力過分透支, 很快就崩潰了 [22, p.186]。他無法從事正常的教學工作, 也無法主持研討會。在 Klein 文稿 (The Felix Klein Protocols [8, p.961]) 他悲嘆, 從 1883 年起, 我的創造力完全終結了。

幸好這時來個救星, 將近 70 歲的 J. J. Sylvester (1814~1897) 終於被牛津大學聘任。Sylvester 於 1883 年底離開他任教的 Johns Hopkins 大學, 渡海回英國 [22]。Johns Hopkins 大學校長寫信給 Klein, 希望 Klein 接任。這封邀請信是莫大的鼓勵, 它使 Klein 逐漸回復正常生活。不過 Klein 最終還是回絕了 Johns Hopkins 大學的邀請。再過三年他就轉到 Göttingen 大學。

Klein 習慣把 Riemann 關於複變函數的理論 (the geometric function theory) 與群論、代數幾何、微分方程、非歐幾何結合起來。這種新穎的觀點吸引許多美國學生跟隨他。

在 Leipzig 大學他只有三個美國學生：J. Stringham, F.N. Cole 與 H.B. Fine。他到 Göttingen 大學之後, 美國學生的數目大量增加。

根據統計 [22], Klein 的學生擔任美國數學會 (AMS) 會長的有 6 位, 擔任副會長的有 13 人。

1893 年世界博覽會 (World's Columbian Exposition) 在芝加哥舉辦, 配合博覽會還舉辦數學家大會 (Chicago Congress of Mathematicians, 1893 年 8 月 21~26日)。Klein 代表德國參加博覽會與數學會, 會後他同意到芝加哥北方的西北大學作 12 次通俗演講 (1893 年 8 月 28~9月9日), 演講內容如下：

1. Clebsch.
2. Sophus Lie.
3. Sophus Lie.
4. On the real shape of algebraic curves and surfaces.
5. Theory of functions and geometry.
6. On the mathematical character of space-intuition, and the relation of pure mathematics and applied mathematics.
7. The transcendency of the numbers e and π.
8. Ideal numbers.

9. The solution of higher algebraic equations.
10. On some recent advances in hyper-elliptic and abelian functions.
11. The most recent researches in non-Euclidean geometry.
12. The study of mathematics at Göttingen.

[19] 是這些演講的記錄, 可以反映 Klein 看到的當時世界數學的主流方向。可惜 Klein 沒有提到法國在微分幾何和義大利在代數曲面的發展。

Klein 不喜歡當時數學日益抽象的趨勢, 他強調數學必須與物理、工程應用結合 (註 10)。1898 年 Klein 與一些學者、企業家成立 Göttingen Association for the Advancement of Applied Physics and Mathematics, 他們募了一筆款項可以 (在必要時) 建設新的實驗室與實驗設備、聘請教授。他們協助推動一些單位的成立, 如 Institutes of Applied Electricity, Applied Math. And Mechanics, Geophysics。聘請的教授有 H.T. Simon, C. Runge, L. Prandtl (見本文第 11 節), E. Wiechert [24, p.97]。

1908 年 Göttingen Association 成立十週年, Klein 宣布已經募得 200,000馬克, 可以興建一棟數學所 [7]。當時數學教授與哲學教授同屬哲學學院, 因此共用一個空間。1922 年科學部門才脫離哲學學院, 科學部門含數學與理論物理。

Klein 興建數學大樓的構想因爲 1914 年的世界大戰而延宕, 戰後幾年的惡性通貨膨脹又使這筆款項化爲烏有。Göttingen 數學大樓在 1929 年才落成, 這是美國 Rockefeller 基金會提供資金, 在 R. Courant 主持下完成的, 那已是 Klein 去世四年後的事。

Klein 對於捐款設立新的教授席位或成立新的系所的金主採取授予榮譽學位的方法, 以示謝意 [6, p.294], 這當然需要在教授之中做許多溝通說服的工作。

10. 數學家求學與研究的聖地

1895 年 Klein 邀請 David Hilbert (1862∼1943) 到 Göttingen 大學任教, 這時 Hilbert 的好朋友 Hermann Minkowski (1864∼1909) 在 Königsberg 擔任副教授。

Königsberg 在波羅的海東方, 是東普魯士第一大城。這地區現在已是俄國的領土, Königsberg 也改名爲 Kaliningrad (註 11)。

Hilbert 與 Minkowski 在 Königsberg 大學唸書時, Adoff Hurwitz (1859∼1919) 剛好是這裡的副教授。Hurwitz 是 Munich 大學的學生, 上過 Klein 的課, 然後到柏林大學聽了一年 Weierstrass 的課。大學畢業後到 Leipzig 跟 Klein 寫博士論文 (見本文第 5 節)。

Hurwitz, Hilbert, Minkowski 常常一起散步聊天。Hurwitz 淵博的數學知識使 Hilbert 與 Minkowski 大開眼界。

1896 年瑞士蘇黎世的 ETH 邀請 Minkowski 擔任教授, 早在四年前 Hilbert 與 Minkowski 的朋友 Hurwitz 已經來到 ETH (1892∼1919)。1902 年柏林大學的 Fuchs 去

世, 柏林大學的教授希望當時在 Göttingen 的 Hilbert 能夠來柏林接 Fuchs 的空缺, 當時 Göttingen 大學許多師生都以爲 Hilbert 抗拒不了柏林大學的誘惑 [24, p.189]。

Klein 與 Hilbert 不動聲色, 他們利用這個機會與德國教育部的 Althoft (見本文第 3 節) 討價還價, 爭取 Minkowski 到 Göttingen 任教的機會。

1904 年 Göttingen 大學有一個應用數學副教授的職位出缺。Klein 再度展現他的政治手腕, 說服教育部的官員把副教授的空缺改成教授的空缺, 這個空缺由 Carl Runge (1856~1927) 接任。結果 Göttingen 大學成爲當時德國最先有四個數學教授的大學： Klein, Hilbert, Minkowski, Runge。

1895 年 ~1933 年可以說是 Göttingen 大學的黃金年代, 其中雖然 1914~1922 年略有停頓 (學生與年輕教師因爲第一次世界大戰應召入伍, 加上戰後幾年經濟蕭條), 但是 Göttingen 大學變成數學聖地的聲名卻是不爭的事實。

以前一個時期 (1895~1914) 而論, Hilbert 的數論報告 (Zahlbericht, 1897年), 他在巴黎國際數學家會議 (ICM Paris, 1900年) 提出的 23 個問題, Hilbert 在積分方程的理論, 都是許多人爭相學習的文獻。

這個時期在 Göttingen 大學唸書, 寫博士論文, 做博士後研究的, 都是一時之選。

以取得博士學位的人而言, 後來比較有名, Klein 的學生 (除了美國留學生不計) 就有 : Ph. Furtwängler (1869~1940, 類體論) 與 L. Bieberbach (1886~1982, 函數論, Hilbert 第 18 問題)。Bieberbach 是一個爭議性很大的人, 在納粹時代, 他是反猶的急先鋒。但是在討論數學成就時, 不必把他一筆抹煞 (註12)。Hilbert的學生有名的更多。如 :

- Max Dehn (1878~1952, 1901年解決 Hilbert 第3問題)。
- Erhard Schmidt (1876~1959, integral equations, Hilbert space)。
- Hermann Weyl (1885~1955, 黎曼面、相對論、表示論、規範場論 [1])。
- Alfred Haar (1885~1933, 拓樸群的 Haar measure)。
- Richard Courant (1888~1972, 數學物理)。
- Erich Hecke (1887~1947, 解析數論)。
- Hugo Steinhaus (1887~1972, 泛函分析, 見 [17, p.12])。

Max Born (1882~1970, 諾貝爾物理獎 1954 年得主) 則是 Runge 的學生 (1906 年博士), 實際上他受 Minkowski 的影響還更多 [6, p.188-189]。由於 Born, Werner Heisenberg, Pascaul Jordan 的領導, Göttingen 大學在 1925 年成爲當時研究量子物理的中心 [2]; 另一個中心是 Niels Bohr 主持的理論物理研究所 (丹麥哥本哈根) (註13)。

11. 93 人宣言 (Manifesto of the ninety-three)

1914 年夏天第一次世界大戰爆發。戰爭初期德軍入侵比利時 (中立國), 無視國際公約, 引起世界各國譴責。同年 10 月 4 日德國政府公布由 93 個文化界、科學界、藝術界名人簽名支持的聲明, 反駁敵國的造謠謊言。

簽名的 93 人之中, 有 14 個諾貝爾獎得主。數學家只有一人簽名 : Felix Klein。Hilbert 曾被徵詢是否同意連署簽名, 但被 Hilbert 拒絕。Albert Einstein (1879∼1955) 也拒絕簽名。

這份聲明反駁六個事項, 每一項都以「It is not true that $\cdots$」的敘述呈現。例如,「It is not true that we trespassed in neutral Belgium」, 以下接著說明何以「It is not true」。

Hilbert 逐項客觀審視這六段文字, 發現它們無法說服他, 因此拒絕簽名。

宣言公佈之後, 法國數學家反應最激烈。Klein 與 Hilbert 本來是巴黎科學院的外籍院士, 結果 Klein 被取消院士資格, Hilbert 仍然留任院士。

戰後這 93 名簽名的人還有 76 人在世。據 New York Times 調查, 有 60 人表達不同程度的後悔 (含 Klein)。詳見 [31], [24, p.137-138], [23]。

Klein 的政治立場是保守的, 支持軍國主義專制政權, 因此他會在 93 人宣言簽名, 並不令人感到意外。在另一方面, 他對傑出科技人才的判斷拿捏倒是十分精準。

Ludwig Prandtl (1875∼1953) 是 Klein 的再傳弟子, 他是 August Föppl 在 Munich 大學的學生 (1899年博士), Föppl 是 Klein 在 Leipzig 大學的學生 (1886 年博士)。

在 ICM 1904 (Heidelberg), Klein 聽完 Prandtl 的演講, 大爲激賞。仗著 Göttingen Association (見本文第 9 節) 做後盾, Klein 邀請 Prandtl 到 Göttingen 大學任教, 他承諾要讓 Prandtl 擔任新成立的 Institute of Applied Mechanics 的所長。

Prandtl 後來成爲德國航天事業的先驅 (註14)。

後記

本文正文來不及介紹 Koebe 的生平。Paul Koebe (1882∼1945) 是 Schwarz 的學生 (柏林大學, 1905 年博士), Leipzig 大學教授 (1926 年)。Koebe 自視甚高, 據說很不容易相處。詳見 [21]。

註釋

註1. 中歐的大學 (含德國大學) 的博士如果想在大學任教, 必須提出一篇異於博士論文的論文 (Habilitationsschrift), 方可成爲講師 (Privatdozent)。若想在某校做 Habilitation, 必須得到該校教授的同意或指導。講師視同國家公務員, 但是不給薪。講師微薄的收入依賴開課時學生

繳交的學分費。

註2. Göttingen 大學在十九世紀中期 Riemann 死後已經不是德國最好的大學。1933 年由於納粹的排猶措施, 許多人 (含非猶太人) 出走, 數學系與物理系大量失血。二次戰後, 許多新的科研中心出現, 如：巴黎、普林斯頓、波士頓、劍橋 (英國)、莫斯科, 哥廷根已無復昔日盛況。

註3. 通常的說法把 Gauss 與 Riemann 視爲德國數學家是不恰當的。Gauss 生前, Hanover 與普魯士 (或德國) 是互不隸屬的。Riemann 死於 1866 年 7 月 20 日, Hanover 被普魯士併呑是 1866 年 9 月 20 日。

註4. 根據 Klein 的理解, Clebsch 處理 abelian functions 比較接近 Abel 的代數方法, 與 Riemann 的 transcendental theory 距離較遠 [19, p.3-5]。

註5. 設 $G(2,4)$ 是三維射影空間所有直線形成的集合。$G(2,4)$ 可以視爲五維射影空間中的二次超曲面：事實上考慮 $p : G(2,4) \to \mathbb{P}^5$, 定義如下。若 Σ 是 $\mathbb{P}^3$ 的直線, 任取 Σ 上相異兩點 P 與 Q, 設 P 與 Q 的齊次座標是 $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ 與 $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$。定義 $\lambda_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ $(1 \leq i < j \leq 4)$, 再定義 $p(\Sigma) = (\lambda_{12} : \lambda_{13} : \lambda_{14} : \lambda_{23} : \lambda_{24} : \lambda_{34}) \in \mathbb{P}^5$。可以證明 $p : G(2,4) \to p(G(2,4))$ 是一對一對應, 並且 $p(G(2,4))$ 是 $\mathbb{P}^5$ 之內滿足

$$\lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23} = 0$$

的二次超曲面。若 H 是 $\mathbb{P}^5$ 的 d 次超曲面, $p(G(2,4)) \cap H$ 叫做次數爲 d 的 line complex, 簡稱 line complex。見 [10, 第6章]。當 $d = 2$, 我們要求 $H \neq p(G(2,4))$。

註6. 德文的寫法把 Erlangen program 寫成 Erlanger program。

十九世紀的德國大學沿襲中世紀的傳統, 只有神學、醫學、法學、哲學四個學院。數學教授與哲學教授同屬哲學學院, 通常只有一個或兩個數學教授。因爲教授就職演講的聽衆是一般的聽衆, 只能講一些非技術性的內容。

註7. Gösta Mittag-Leffler (1846∼1927) 是瑞典 Stockholm 大學教授, *Acta Math.* 創辦人 (1882 年 12 月創刊)。Leffler 是他父親的姓, Mittag 是他母親的姓, 他小時候與外祖父母十分接近, 因此加上 Mittag 的姓。

1873 年∼1875 年他得到瑞典政府一筆獎學金可以到法國與德國遊學。他因此認識 Hermite 與 Weierstrass。俄國女數學家 Sonya V. Kovalevskaya (1850∼1891) 因爲他的引薦, 才得以在 Stockholm 大學任敎。

註8. Klein 堅決拒絕 Kleinian groups 與 Kleinian functions 的名稱。可是直到近日還有許多學者在他們的研究論文使用這個名稱。

註9. 這時 Klein 的朋友 Sophus Lie (見本文第3節) 剛好在巴黎訪問。他從巴黎寫信給 Klein,

他說 :「許多人都認爲你的論文寫得太難, 不容易理解。Poincaré 說, 最先他也覺得很難, 現在他覺得很容易。Darboux 與 Jordan 都認爲你把讀者的程度設想得太高, 許多地方都沒有證明。」[14, p.224]。

Mittag-Leffler 在 1881 年寫給 Hermite (Poincaré 的老師) 的一封信說 :「Weierstrass 認爲 Klein 不是缺乏才能, 可是他的才能都是浮面的, 有時簡直像行走江湖的騙子 (charlatan)。Kronecker 乾脆說, 他就是個騙子。我相信 Kummer 的意見也是如此。」[14, p.224]。

有一些英文文獻對於單值化問題或 Klein-Poincaré-Fuchs 的關係採取淡化方式處理, 如 [24, p.19], [25, p.101], [22, p.182-187], [27, p.122-127]。

Poincaré 與 Koebe 解決 Hilbert 22 問題的時間需要澄清。根據 Mittag-Leffler Archives [9, p.73], Poincaré 的文稿是 1906 年 6 月 20 日寄到 *Acta Math.*, 這篇文章是 1907 年 3 月 19 日付印, 它登在 *Acta Math.* Vol.3. Koebe 有兩個證明, 第一個證明是在 Göttingen 的一個會議發表 (1907 年 5 月 11 日), 第二個證明是 1907 年 11 月發表的, 他表示第二個證明是看了 Poincaré *Acta Math.* 的文章才想起他自己以前曾有類似的想法。

Klein 身心崩潰的時間是 1882 年 [8, p.461], [22, p.186]。

註10. Klein與 A. Sommerfeld 合寫一本教科書《The theory of the gyroscope》。

註11. 條頓騎士團原先據有 Königsberg, 經過爭戰併吞與外交手段發展成後來的普魯士王國。結果普魯士王國的本土與他們發跡的東普魯士沒有領土接壤, 東普魯士變成普魯士王國的一塊飛地。

註12. Bieberbach 曾研究單值化問題 (Hilbert 第 22 問題), 與 Koebe 有過糾紛 [21]。Bieberbach 猜想是單變數函數論有名的問題。1984 年爲美國的 Louis de Branges (1932∼) 證明。

註13. Pascual Jordan 是 Born 的學生 (1925 年博士)。有一類 non-associative algebras 叫做 Jordan algebras, 就是以 Pascual Jordan 命名的。

A. A. Albert 與 E. Zelmanov (1994 年 Fields medal 得主) 曾研究 Jordan algebras 的結構。Pascual Jordan 在 1933 年加入納粹黨 [2]。

註14. Prandtl 有一個來自匈牙利 (奧匈帝國) 的學生, Theodore von Kármán (1881∼1963, Göttingen 大學 1908 年博士)。

1929 年 Göttingen 大學數學所的新大樓落成。落成典禮的時候邀請兩個特約演講人, 一個是 Weyl, 另一個是 von Kármán。Weyl 與 von Kármán 都是 Göttingen 大學 1908 年的博士, 他們分別是 Göttingen 大學校友在純數學與應用數學表現最亮眼的兩位 [1, 11, 25]。

當時 Weyl 在瑞士的 ETH 任教 (1913∼1930)。1930 年 Hilbert 退休, Weyl 才接受 Göttingen 大學的邀請。Von Kármán 當時在 Aachen Technische Univ. 與美國 Caltech

任教, 每年他在兩個大學各待半年。1930 年他才決定留在 Caltech。

Von Kármán 的中國學生錢學森 (1938 年 Caltech 博士) 與郭永懷 (1944 年 Caltech 博士) 是中國原子彈與氫彈計畫的領導。另一個學生林家翹 (也是 1944 年 Caltech 博士) 任教於 MIT, 見 [13]。

参考文獻

1. M. Atiyah, Hermann Weyl (1885∼1955), *Biographical Memoirs*, p2 (2002), National Academy Press, USA.
2. J. Bernstein, Max Born and the quantum theory, *Amer. J. Physics*, 73, 999(2005) 999-1008.
3. H. G. W. Begehr, etc. (editors), *Mathematics in Berlin*, 1998, Birkhäuser, Berlin.
4. L. Bers, On Hilbert's 22nd problem, in "*Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*" edited by F. Browder, AMS, 1975.
5. L. Bers, Uniformization, Moduli and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.*, 4(1972), 257-300.
6. M. Born, *My Life*, 中譯本, 上海東方出版中心, 1998。
7. E. Chislenko, The development of mathematics in Göttingen, Göttingen library project (website translations, 7 pages).
8. E. Chislenko and Y. Tschinkel, The Felix Klein Protocols, *Notices AMS*, 54(2007), 960-970.
9. C. Doran, Poincaré's path to uniformization, in "*Uniformization, Riemann-Hilbert correspondences, Calabi-Yau manifolds, and Picard-Fuchs equations*" edited by L. Ji and S.-T. Yau, International Press, Boston, 2018.
10. P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
11. S. Goldstein, Theodore von Kármán 1881∼1963, *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society of London*, 12 (1966), 335-365.
12. J. J. Gray. Fuchs and the theory of differential equations, *Bull. AMS*, 10(1984), 1-26.
13. Frank Hsu, Professor Chia-Chiao Lin (1916-2013), *ICCM Notices*, 1 (2013), no.2, 109-115.
14. I. James, *Remarkable Mathematicians*, The Mathematical Association of America and Cambridge University Press, 2002.
15. 康明昌。Egorov 與 Luzin。數學傳播季刊, 44(2), 18-31, 2020。
16. 康明昌。Bourbaki 與 André Weil。數學傳播季刊, 44(4), 3-20, 2020。
17. 康明昌。Jean Leray (1906∼1998)。數學傳播季刊, 45(1), 3-16, 2021。
18. 康明昌。幾個印度數學家與統計學家。數學傳播季刊, 45(3), 3-19, 2021。
19. F. Klein, *Lectures on Mathematics*, reprinted by AMS, 1911.
20. W. Magnus, Max Dehn, *Math. Intelligencer*, 1 (1978), 132-143.
21. Mac Tutor, History of Mathematics Archive,
URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

22. K. H. Parshall and D. E. Rowe, The emergence of the American mathematical research community 1876∼1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore, American Math. Society and London Math. Society, 1994.
23. K. H. Parshall and A. C. Rice (editors), *Mathematics Unbound*, Amer. Math. Society and London Math. Sa., 2002.
24. C. Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970; new edition, 1996.
25. C. Reid, *Courant in Göttingen and New York*, Springer-Verlag, 1976; new edition, Courant, 1996.
26. D. E. Rowe, Episodes in the Berlin-Göttingen rivalry 1870∼1930, *Math. Intelligence*, 22(1) (2000), 60-69.
27. D. E. Rowe, *A Richer Picture of Mathematics: the Göttingen Tradition and Beyond*, Springer-Verlag, 2017, Berlin.
28. H. P. de Saint-Gervais, *Uniformization of Riemann Surfaces*, European Math. Soc., 2016.
29. J. Stillwell, *Poincaré's paper on Fuchican functions* (English translation), Springer-Verlag, 1985.
30. H. Weyl, *Mind and Nature*, edited by Peter Pesic, Princeton Univ. Press, 2009, Princeton and Oxford.
31. Wikipedia, available via Google.
32. B. H. Yandall, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, A K Peters, 2002.

—本文作者爲台大數學系退休教授—