

## 編者的話

Felix Klein (1849~1925) 生逢科學盛世, 各種新思潮風起雲湧: 達爾文的進化論付梓, 相對論及量子力學湧現。躬逢其盛的數學理論也共歷鉅變, 黎曼的直觀方法與 Weierstrass 毫不妥協的嚴謹性對比鮮明。Klein 傳承了黎曼的精神。

1869 年, Klein 提出非歐幾何的 Klein 模型, 闡釋非歐幾何與歐氏幾何具等價的一致性, 從而確定了非歐幾何的合法性。1872 年, 他在 Erlangen 提出了 Erlangen Program, 根據變換群對幾何進行分類。以現今語言來說, Klein 提出了齊次流形的新概念, 其結構  $[M, G]$  由流形  $M$  及作用於  $M$  的群  $G$  所組成; 他以變換群下的「等價性」和「不變性」將幾何分類。

Klein 對「不連續」群的研究在某種意義上與 Sophus Lie 的「連續」群理論相輔相成。Klein 著重大域幾何, 而 Lie 的理論純屬局部。

在慕尼黑, Klein 發展不連續群的理論, 據以闡明並擴展黎曼的幾何函數理論。在萊比錫, 由於過度的工作量以及與 Poincaré 在自守函數理論的激烈競爭, 他在 1882 年精神崩潰, 爾後的研究開創性不復從前。

1886 年, Klein 轉赴 Göttingen 大學, 延攬 Hilbert 及 Minkowski。他以深刻的洞察力和理解力創建了世界級的團隊, 如願讓 Göttingen 成為數學家的聖地。

一位才華橫溢、深富創造力的年輕幾何學家, 中年時籌設了頂尖的數學機構, 高瞻遠矚, 手腕精熟。康明昌教授介紹了 Klein 的生平。

一元三次多項式可經平移轉化為  $x^3 + px + q = 0$  的形式。受 Sylvester 工作的啟發, 陳永川教授將方程式  $x^3 + px + q = 0$  分解成兩個一次式的三次方的和, 從而得到一元三次方程的求根公式。相較於經典的 Cardano 公式, 該方法易解好用。廖信傑、薛昭雄教授對該方法做了進一步的分析。他們寫下方程式的統一形式, 藉以得到根的公式, 從而判斷一元三次方程具三實根的係數條件。

Noga Alon 於 1999 年引介名為組合零點定理 (Combinatorial Nullstellensatz) 的代數技巧, 藉由分析精心選擇的多項式的根, 獲得各種結果, (關鍵步驟是要證明該多項式的某個單項式係數非零)。張鎮華教授介紹了組合零點定理的相關定理及其證明, 並討論了幾個現有的應用, 諸如: 加性數論中的 Cauchy-Davenport 定理、正則子圖的存在性、與  $d$ -點團集相交的集合數目計算, 以及有向圖奇、偶循環子圖數目與著色問題的關聯。

高斯證明: 給定數體  $k$ , 若藉由主理想定義分數理想的等價關係, 則等價類的集合  $H^+(k)$  是理想乘法下的有限阿貝爾群, 稱為理想類群。對二次體  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ , 高斯考慮了更粗略的等價概念, 將這些粗略的類稱為虧格, 它們是具相同判別式的等價類的集合, 而類的數量僅取決於判別式。余家富教授及洪梵雲先生細說這些理論。

數學傳播電子版網址:

<https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/>

梁惠禎

2022 年 3 月

# 數學傳播 181

第四十六卷  
第一期

## 目錄

Felix Klein (1849~1925) .....	康明昌	3
Alon 的組合零點定理 .....	張鎮華	21
一元三次方程式的再探 .....	廖信傑 · 薛昭雄	33
高斯虧格理論 .....	余家富 · 洪梵雲	40
以數學模型來詮釋「利他主義」的真諦 .....	陳博彥	64
圓內接正多邊形的奇偶弦長冪次定和 .....	楊玉星	69
等角差線實為雙曲線 .....	鍾文體	84
揭示趣題背後的數學規律 .....	李發勇	88
數學核心素養視角下的解題探究 .....	朱小扣	96