數學傳播 45卷4期, pp. 96-97

三角形旁徑與高之間的三個性質

丁遵標

本文約定：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a、b、c, 外徑爲 R, 內徑爲 r, 半周長爲 p, 面積爲 s, 三邊上的高依次爲 h_a、h_b、h_c, 旁徑依次爲 r_a、r_b、r_c, $\sum$ 表示迴圈和, $\prod$ 表示迴圈積。

匡繼昌教授在《常用不等式》(第 4 版) 中, 收錄了下面的三個旁徑與高之間關係的不等式:

(1) $\sum h_a h_b \le \sum r_a r_b$ $\quad$ p_{275} 第 15 個不等式。

(2) $\sum \dfrac{h_a+h_b}{r_a+r_b} \le 3$ $\quad$ p_{276} 第 41 個不等式。

(3) $\prod \dfrac{h_b+h_c}{r_a+h_a} \le 1$ $\quad$ p_{276} 第 50 個不等式。

經過研究, 筆者現給出這三個不等式的最佳形式 — 等式。

定理： (1) $\sum h_a h_b = \dfrac{2r}{R}\sum r_a r_b.$

(2) $\sum \dfrac{h_a+h_b}{r_a+r_b} = 2+\dfrac{2r}{R}.$

(3) $\prod \dfrac{h_b+h_c}{r_a+h_a} = \dfrac{2r}{R}.$

證明：$\because s=(p-a)r_a=\dfrac{1}{2}ah_a=rp.$

$$\therefore r_a=\frac{rp}{p-a} \qquad h_a=\frac{2rp}{a}.$$

同理：$r_b=\dfrac{rp}{p-b}, \qquad r_c=\dfrac{rp}{p-c}, \qquad h_b=\dfrac{2rp}{b}, \qquad h_c=\dfrac{2rp}{c}.$

$$\because \sum a=2p, \quad \prod(p-a)=r^2p, \quad \sum ab=p^2+4Rr+r^2, \quad \prod a=4Rrp.$$

(1) $\because h_ah_b=\dfrac{4r^2p^2}{ab}$

$$r_ar_b=\frac{r^2p^2}{(p-a)(p-b)}=\frac{r^2p^2(p-c)}{\prod(p-a)}=\frac{r^2p^2(p-c)}{r^2p}=p(p-c)$$

$$\therefore\ \sum h_ah_b=\sum\frac{4r^2p^2}{ab}=4r^2p^2\sum\frac{1}{ab}=4r^2p^2\cdot\frac{\sum a}{\prod a}=4r^2p^2\cdot\frac{2p}{4Rrp}=\frac{2rp^2}{R}$$

$$\sum r_ar_b=\sum\frac{r^2p^2}{(p-a)(p-b)}=\sum\frac{r^2p^2(p-c)}{\prod(p-a)}=\sum\frac{r^2p^2(p-c)}{r^2p}=p\sum(p-c)=p^2$$

$$\therefore\ \sum h_ah_b=\frac{2r}{R}\sum r_ar_b.$$

(2)
$$\begin{aligned}\because\ \frac{h_a+h_b}{r_a+r_b}&=\frac{\frac{2rp}{a}+\frac{2rp}{b}}{\frac{rp}{p-a}+\frac{rp}{p-b}}=\frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{ab(2p-a-b)}=\frac{2(2p-c)(p-a)(p-b)}{\prod a}\\&=\frac{2[p+(p-c)](p-a)(p-b)}{4Rrp}=\frac{(p-a)(p-b)}{2Rr}+\frac{\prod(p-a)}{2Rrp}\\&=\frac{(p-a)(p-b)}{2Rr}+\frac{r^2p}{2Rrp}=\frac{(p-a)(p-b)}{2Rr}+\frac{r}{2R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum\frac{h_a+h_b}{r_a+r_b}&=\sum\left[\frac{r}{2R}+\frac{(p-a)(p-b)}{2Rr}\right]=\frac{3r}{2R}+\frac{\sum p^2-p\sum(a+b)+\sum ab}{2Rr}\\&=\frac{3r}{2R}+\frac{3p^2-4p^2+p^2+4Rr+r^2}{2Rr}=2+\frac{2r}{R}.\end{aligned}$$

(3)
$$\because\ \frac{h_b+h_c}{r_a+h_a}=\frac{\frac{2rp}{b}+\frac{2rp}{c}}{\frac{rp}{p-a}+\frac{2rp}{a}}=\frac{2(b+c)a(p-a)}{(2p-a)bc}=\frac{2(b+c)a(p-a)}{(b+c)bc}=\frac{2a(p-a)}{bc}$$

$$\therefore\ \prod\frac{h_b+h_c}{r_a+h_a}=\prod\frac{2a(p-a)}{bc}=\frac{8\prod a\prod(p-a)}{\prod bc}=\frac{8\cdot 4Rrp\cdot r^2p}{(4Rrp)^2}=\frac{2r}{R}.$$

利用歐拉不等式: $R\geq 2r$, 我們便可得到上述的三個不等式。

參考文獻

1. 匡繼昌。常用不等式 (第4版)(M)。山東科學技術出版社, 2014年10月。

—本文作者任教中國安徽省舒城二中杭埠校區—