數學傳播 45卷4期, pp. 88-95

# 三角形結構中的一個證題系統

範花妹 · 秦慶雄

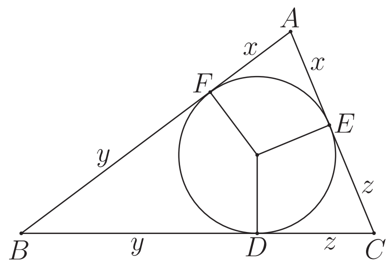
受貴刊文 [1] 的啟發, 筆者經過思考, 借助三角形內切圓代換, 給出涉及三角形不等式的一個證題系統。

## 一、三角形中的一個證題系統

以下約定：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 $a$、$b$、$c$; 半周長爲 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$; 面積爲 $\Delta$; 外接圓半徑和內切圓半徑分別爲 $R, r$; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的角平分線、相應邊上的中線、高線及旁切圓半徑長分別爲 $w_a$、$w_b$、$w_c$; $m_a$、$m_b$、$m_c$; $h_a$、$h_b$、$h_c$; $r_a$、$r_b$、$r_c$。

**定理**: $a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三邊長的充要條件是存在正實數 $x, y, z$, 使得 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$。

**證明**: 充分性: 若存在正實數 $x, y, z$, 使得 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, 則由此得 $x=\dfrac{b+c-a}{2}$, $y=\dfrac{a+c-b}{2}$, $z=\dfrac{a+b-c}{2}$。由 $x>0, y>0, z>0$, 可知 $b+c>a$, $a+c>b$, $a+b>c$。從而 $a, b, c$ 可作 $\triangle ABC$ 的三邊長。




必要性: 若 $a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三邊長, 其中 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 作 $\triangle ABC$ 的內切圓, 切點爲 $D, E, F$, 令 $AE=AF=x$, $BD=BF=y$, $CD=CE=z$, 則 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$。證畢。

由上述定理, 經過不太複雜的計算, 可得如下代換公式:

$$s=x+y+z,\ \triangle=\sqrt{xyz(x+y+z)},\ r=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},\ R=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}},$$

$$h_a=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z},\quad h_b=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x},\quad h_c=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y},$$
$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+y^2+z^2+4xy+4zx-2yz},\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2+z^2+4yz+4yx-2xz},$$
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+x^2+y^2+4zx+4zy-2xy},$$
$$w_a=\frac{2\sqrt{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}}{2x+y+z},\qquad w_b=\frac{2\sqrt{y(y+z)(y+x)(x+y+z)}}{2y+x+z},$$
$$w_c=\frac{2\sqrt{z(z+x)(z+y)(x+y+z)}}{2z+x+y},$$
$$r_a=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x},\qquad r_b=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y},\qquad r_c=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z},$$
$$\sin A=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)},\ \sin B=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+x)(y+z)},\ \sin C=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)},$$
$$\cos A=\frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)},\ \cos B=\frac{y(x+y+z)-xz}{(y+x)(y+z)},\ \cos C=\frac{z(x+y+z)-xy}{(z+x)(z+y)},$$
$$\tan A=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z)-yz},\ \tan B=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z)-xz},\ \tan C=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z)-xy},$$
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{xz}{(y+x)(y+z)}},\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}},$$
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}},$$
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}},\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{xz}{y(x+y+z)}},\quad \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}}.$$

## 二、應用舉例

通過上述代換公式, 三角形不等式可化歸爲只含有 $x$、$y$、$z$ 的代數不等式, 從而使幾何證明代數化。

**例**1 (Finsler-Hadwiger **不等式**): 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

**證明**: 設 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, 則有

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\ \Leftrightarrow\ &(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\geq 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}+(y-x)^2+(z-y)^2+(x-z)^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4(xy+yz+zx) \geq 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+y^2zx+z^2xy$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2] \geq 0.$$

**例**2 (**第**6**屆** IMO **試題**): 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

**證明**: 設 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, 則有

$$\begin{aligned}
&a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc\\
&\Leftrightarrow 2(y+z)^2x+2(z+x)^2y+2(x+y)^2z \leq 3(x+y)(y+z)(z+x)\\
&\Leftrightarrow x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2 \geq 6xyz,
\end{aligned}$$

由 6 元均值不等式知, 上式顯然成立。

**例**3: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 8r^2\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}.$$

**證明**: 設 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, 由 Cauchy 不等式和絕對值不等式, 得

$$\begin{aligned}
&a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\\
&=(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\\
&=2(x^3z+y^3x+z^3y-x^2yz-y^2zx-z^2xy)\\
&=2xyz\Big[\Big(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\Big)-(x+y+z)\Big]\\
&=2xyz\Big[\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}\Big]\\
&=\frac{2xyz}{x+y+z}(x+y+z)\Big[\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}\Big]\\
&\geq\frac{2xyz}{x+y+z}(|x-y|+|y-z|+|z-x|)^2\\
&\geq\frac{2xyz}{x+y+z}(|x-y|+|(y-z)+(z-x)|)^2\\
&=\frac{8xyz}{x+y+z}(x-y)^2=8r^2(a-b)^2
\end{aligned}$$

即 $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 8r^2(a-b)^2$, 等號成立當且僅當 $a=b=c$ 時成立, 同理可得

$$\begin{aligned}
a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)&\geq 8r^2(b-c)^2;\\
a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)&\geq 8r^2(c-a)^2.
\end{aligned}$$

由以上三式, 可得

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 8r^2\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}.$$

等號成立當且僅當 $a=b=c$ 時成立。

**例**4: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$\frac{1}{\tan^3\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{\tan^3\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{\tan^3\dfrac{C}{2}}\geq 9\sqrt{3}.$$

**證明**: 由 $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{yz}{x(x+y+z)}}$, $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{xz}{y(x+y+z)}}$, $\tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{xy}{z(x+y+z)}}$, 知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tan^3\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{\tan^3\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{\tan^3\dfrac{C}{2}}\geq 9\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{yz}{x(x+y+z)}}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{zx}{y(x+y+z)}}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{xy}{z(x+y+z)}}\right)^3}\geq 9\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\quad&x^3+y^3+z^3\geq 9\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\right)^3,
\end{aligned}$$

由 3 元均值不等式, 可得

$$(x+y+z)^3\geq 27xyz,\qquad x^3+y^3+z^3\geq 3xyz,$$

故

$$9\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\right)^3=9\sqrt{3}\sqrt{\frac{(xyz)^3}{(x+y+z)^3}}\leq 9\sqrt{3}\sqrt{\frac{(xyz)^3}{27xyz}}=3xyz\leq x^3+y^3+z^3,$$

所以, 不等式獲證。

**例**5(Euler **不等式**): 在 $\triangle ABC$ 中, 求證: $R\geq 2r$。

**證明**: 因爲

$$R=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}\ge\frac{2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}=\frac{8xyz}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$
$$=2\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}=2r,$$

所以, $R\ge 2r$。

**例**6: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\ge 2.$$

**證明**: 由 $r_a=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$, $r_b=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y}$, $r_c=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z}$, 知

$$\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\ge 2$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{(y+z)^2}{\frac{xyz(x+y+z)}{y^2}+\frac{xyz(x+y+z)}{z^2}}+\frac{(z+x)^2}{\frac{xyz(x+y+z)}{z^2}+\frac{xyz(x+y+z)}{x^2}}$$
$$+\frac{(x+y)^2}{\frac{xyz(x+y+z)}{x^2}+\frac{xyz(x+y+z)}{y^2}}\ge 2$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2y^2(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2z^2(y+z)^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2x^2(z+x)^2}{z^2+x^2}\ge 2xyz(x+y+z),$$
$$\because\ (x+y)^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-2xyz(x+y+z)(x^2+y^2)$$
$$=(x+y)^2z^2(x^2+y^2)+(x+y)^2x^2y^2-2xyz(x+y+z)(x^2+y^2)$$
$$=(x^2+y^2)^2z^2+(x+y)^2x^2y^2-2xyz(x+y)(x^2+y^2)$$
$$=[(x^2+y^2)^2z]^2-2(x^2+y^2)z\cdot xy(x+y)+[xy(x+y)]^2$$
$$=[(x^2+y^2)z-xy(x+y)]^2\ge 0$$
$$\therefore\ (x+y)^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge 2xyz(x+y+z)(x^2+y^2),$$
$$\therefore\ \frac{x^2y^2(x+y)^2}{x^2+y^2}\ge\frac{2xyz(x+y+z)x^2y^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

同理可證:

$$\frac{y^2z^2(y+z)^2}{y^2+z^2}\ge\frac{2xyz(x+y+z)y^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2};$$
$$\frac{z^2x^2(z+x)^2}{z^2+x^2}\ge\frac{2xyz(x+y+z)z^2x^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}.$$

將以上三式兩邊分別相加, 可得

$$\frac{x^2y^2(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2z^2(y+z)^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2x^2(z+x)^2}{z^2+x^2}\geq 2xyz(x+y+z),$$

所以, 不等式獲證。

**例**7: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$\Big(\frac{h_a}{r_a}\Big)^2+\Big(\frac{h_b}{r_b}\Big)^2+\Big(\frac{h_c}{r_c}\Big)^2\geq 4\Big(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\Big).$$

**證明**: 由 $h_a=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}$, $h_b=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x}$, $h_c=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}$,
$r_a=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$, $r_b=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y}$, $r_c=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z}$, 知

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{h_a}{r_a}\Big)^2+\Big(\frac{h_b}{r_b}\Big)^2+\Big(\frac{h_c}{r_c}\Big)^2\geq 4\Big(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\Big)\\
\Leftrightarrow\quad &\Big(\frac{2x}{y+z}\Big)^2+\Big(\frac{2y}{z+x}\Big)^2+\Big(\frac{2x}{x+y}\Big)^2\\
&\qquad\geq 4\Big[\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+x)(y+z)}+\frac{xy}{(z+x)(z+y)}\Big]\\
\Leftrightarrow\quad &\Big[\Big(\frac{x}{y+z}\Big)^2+\Big(\frac{y}{z+x}\Big)^2+\Big(\frac{x}{x+y}\Big)^2\Big]\\
&\qquad\geq \Big[\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+x)(y+z)}+\frac{xy}{(z+x)(z+y)}\Big]\\
\Leftrightarrow\quad &\Big(\frac{x}{y+z}\Big)^2+\Big(\frac{y}{x+z}\Big)^2+\Big(\frac{y}{x+z}\Big)^2+\Big(\frac{z}{x+y}\Big)^2+\Big(\frac{z}{x+y}\Big)^2+\Big(\frac{x}{y+z}\Big)^2\\
&\qquad\geq 2\Big[\Big(\frac{x}{y+z}\Big)\cdot\Big(\frac{y}{x+z}\Big)+\Big(\frac{y}{x+z}\Big)\cdot\Big(\frac{z}{x+y}\Big)+\Big(\frac{z}{x+y}\Big)\cdot\Big(\frac{x}{y+z}\Big)\Big]\\
\Leftrightarrow\quad &\Big[\Big(\frac{x}{y+z}-\frac{y}{x+z}\Big)^2+\Big(\frac{y}{x+z}-\frac{z}{x+y}\Big)^2+\Big(\frac{z}{x+y}-\frac{x}{y+z}\Big)^2\Big]\geq 0.
\end{aligned}$$

**注**: 上述不等式的如下類似不等式也是成立的。

問題: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證:

$$\Big(\frac{h_a}{r_b}\Big)^2+\Big(\frac{h_b}{r_c}\Big)^2+\Big(\frac{h_c}{r_a}\Big)^2\geq 4\Big(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\Big).$$

**例**8: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證: $h_a+h_b+h_c\geq 6r\Big(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\Big)$。

**證明**: 由 $h_a=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}$, $h_b=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x}$, $h_c=\dfrac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}$,

$r=\sqrt{\dfrac{xyz}{x+y+z}}$, 知要證 $h_a+h_b+h_c\geq 6r\Big(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\Big)$ 成立, 只需要證

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)\geq 3\Big(\frac{y+z}{2x+y+z}+\frac{z+x}{x+2y+z}+\frac{x+y}{x+y+2z}\Big)$$

成立, 即證

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+6(\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\Big)\geq 6.$$

不妨設 $x\geq y\geq z$, 則 $x+y\geq x+z\geq y+z$, $(x+y+z)+x\geq(x+y+z)+y\geq(x+y+z)+z$, 即

$$\frac{1}{y+z}\geq\frac{1}{z+x}\geq\frac{1}{x+y},\quad \frac{1}{x+y+2z}\geq\frac{1}{x+2y+z}\geq\frac{1}{2x+y+z}.$$

由 Chebyshev 不等式和 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+6\Big(\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\Big)\\
&\geq\frac{1}{3}(x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)\\
&\qquad+6\times\frac{1}{3}(x+y+z)\Big(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\Big)\\
&=\frac{1}{3}(x+y+z)\Big[\Big(\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}+\frac{1^2}{x+y}\Big)\\
&\qquad+6\times\Big(\frac{1^2}{2x+y+z}+\frac{1^2}{x+2y+z}+\frac{1^2}{x+y+2z}\Big)\Big]\\
&\geq\frac{1}{3}(x+y+z)\Big[\frac{(1+1+1)^2}{y+z+z+x+x+y}+6\Big(\frac{(1+1+1)^2}{2x+y+z+x+2y+z+x+y+2z}\Big)\Big]\\
&=6.
\end{aligned}$$

所以, 不等式 $h_a+h_b+h_c\geq 6r\Big(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\Big)$ 獲證。

**例**9: 在 $\triangle ABC$ 中, 求證: $ar_a+br_b+cr_c\geq\sqrt{bc}r_a+\sqrt{ca}r_b+\sqrt{ab}r_c$。

**證明**: 由 $r_a=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$, $r_b=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y}$, $r_c=\dfrac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z}$, 知

$$\begin{aligned}
&ar_a+br_b+cr_c\geq\sqrt{bc}r_a+\sqrt{ca}r_b+\sqrt{ab}r_c\\
&\Leftrightarrow\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq\frac{\sqrt{(z+x)(x+y)}}{x}+\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{y}+\frac{\sqrt{(y+z)(z+x)}}{z}
\end{aligned}$$

由 2 元均值不等式, 得

$$\frac{\sqrt{(z+x)(x+y)}}{x}+\frac{\sqrt{(x+y)(y+z)}}{y}+\frac{\sqrt{(y+z)(z+x)}}{z} \le \frac{2x+y+z}{2x}+\frac{x+2y+z}{2y}+\frac{x+y+2z}{2z},$$

因此, 只需要證

$$\frac{2x+y+z}{2x}+\frac{x+2y+z}{2y}+\frac{x+y+2z}{2z} \le \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$

成立, 即證 $6 \le \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$ 成立。

由 2 元均值不等式, 得

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \ge 6,$$

所以, 不等式 $ar_a+br_b+cr_c \ge \sqrt{bc}r_a+\sqrt{ca}r_b+\sqrt{ab}r_c$ 獲證。

## 參考文獻


1. 李發勇。對著名外森比克不等式幾個加強的代換簡證。數學傳播季刊, 43(3), 95-98, 2019。


—本文作者範花妹, 秦慶雄任教中國雲南省大理州漾濞縣第一中學 (高中部)—